**Esame di Teoria dei Segnali A**
**Ing. Informatica, Elettronica e Telecomunicazioni**

14 ottobre 2003

### Esercizio 1

Ci sono 3 vostri amici, Franco, Mario e Carlo, che ogni sera vi vengono a trovare alle 19:00 per una chiacchierata. Non vengono mai insieme però, ma ogni giorno solo uno di loro viene. Il 50% delle volte viene Franco, e, quando viene, metà delle volte arriva in ritardo. Nel caso che Franco non venga, vengono Mario o Carlo indifferentemente. Mario, quando viene, non è mai in ritardo, mentre Carlo, quando viene, lo è 9 volte su 10. Sono le 19:30 e suona il citofono: con chi è più probabile che vi arrabbierete visto che vi siete appena seduti a tavola?

*Soluzione*

Indichiamo con $F, M$ e $C$ gli eventi corrispondenti ai casi in cui vengano Franco, Mario, o Carlo, rispettivamente. Siccome solamente uno di loro viene, i 3 eventi sono disgiunti. Sappiamo che $P(F) = 1/2$. Quando Franco non viene, Mario o Carlo vengono indifferentemente, quindi

$$P(M|\overline{F}) = P(C|\overline{F}) = \frac{1}{2}.$$

Siccome $P(M|F) = P(C|F) = 0$, applicando il teorema della probabilità totale si ricava che

$$P(M) = P(M|F)P(F) + P(M|\overline{F})P(\overline{F}) = 0 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

e, analogamente, $P(C) = 1/4$. A questo punto, definiamo i due eventi $PU$ e $RI$, corrispondenti ai casi che la persona che viene sia puntuale o in ritardo. Sappiamo che la persona che viene stasera è in ritardo, quindi sappiamo che $RI$ si è verificato. Per decidere con chi arrabiarci, basta scoprire quale probabilità, fra $P(F|RI), P(M|RI)$ e $P(C|RI)$, è la maggiore.

Calcoliamo $P(F|RI)$. Applicando la formula di Bayes:

$$P(F|RI) = \frac{P(RI|F)P(F)}{P(RI)}.$$

Sappiamo che Franco, quando viene, è in ritardo metà delle volte, cioè $P(RI|F) = 1/2$. Analogamente, dal testo possiamo capire che $P(RI|M) = 0$

e $P(RI|C) = 9/10$. Applicando il teorema della probabilità totale:

$$\begin{aligned} P(RI) &= P(RI|F)P(F) + P(RI|M)P(M) + P(RI|C)P(C) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{4} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{19}{40} = 0.475 \end{aligned} \tag{1}$$

e quindi

$$P(F|RI) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{19}{40}} = \frac{10}{19} \cong 0.526\,.$$

Analogamente:

$$P(M|RI) = \frac{P(RI|M)P(M)}{P(RI)} = 0$$

e quindi

$$P(C|RI) = 1 - P(M|RI) - P(F|RI) = \frac{9}{19} \cong 0.473.$$

Possiamo concludere che la persona con cui più probabilmente vi arrabbierete è Franco.

**Soluzione Alternativa**

Invero, una volta escluso che il ritardatario sia Mario (dai dati del problema), basta confrontare le probabilità di ritardo a posteriori (formula di Bayes) $P(F|RI) = \frac{P(RI|F)P(F)}{P(RI)}$ con $P(C|RI) = \frac{P(RI|C)P(C)}{P(RI)}$, e per questo confronto non serve neppure calcolare la probabilità dell'evento RI (1). Infatti basta confrontare i numeratori, ed è evidente che

$$P(RI|F)P(F) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} > P(RI|C)P(C) = \frac{9}{10}\frac{1}{4}$$

per cui il ritardatario pi probabile è Franco.

**Esercizio 2**

Una variabile casuale $X$ ha la seguente funzione densità di probabilità:

$$f_X(x) = f_X^c(x) + \frac{1}{4}\delta(x-1)$$

dove

$$f_X^c(x) = \begin{cases} \frac{1}{12} & -3 \le x \le 0 \\ \frac{1}{10} & 0 \le x \le 5 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e subisce la seguente trasformazione:

$$g(x) = \begin{cases} 2 & x \ge 2 \\ |x| & -2 < x < 2 \\ x+4 & x \le -2. \end{cases}$$

Determinare la funzione densità di probabilità della variabile aleatoria trasformata $g(X)$ e tracciarne il grafico. Determinare quindi valor medio di $g(X)$.

*Soluzione*

La funzione densità di probabilità della variabile aleatoria $X$ è mostrata in Fig. 1 mentre la funzione $g(x)$ che caratterizza la trasformazione di variabile

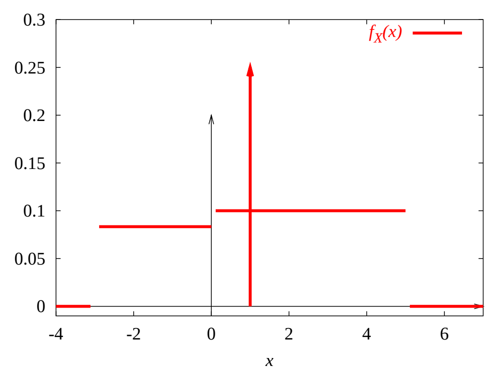


Figure 1: Funzione densità di probabilità della variabile aleatoria $X$ nell'esercizio 2.

casuale considerata è mostrata in Fig. 2. La variabile casuale $X$ è mista, e quindi tale sarà anche la variabile casuale ottenuta tramite la trasformazione e indicata come $Y = g(X)$. In particolare, possiamo immediatamente concludere che $Y$ presenterà una massa di probabilità (e quindi una delta nella espressione finale di $f_Y(y)$), pari ad $1/4$, concentrata in $g(1) = 1$—siccome $g(x)$ non presenta tratti costanti in corrispondenza di $y = 1$, possiamo concludere con certezza che la massa di probabilità concentrata in $y = 1$ è

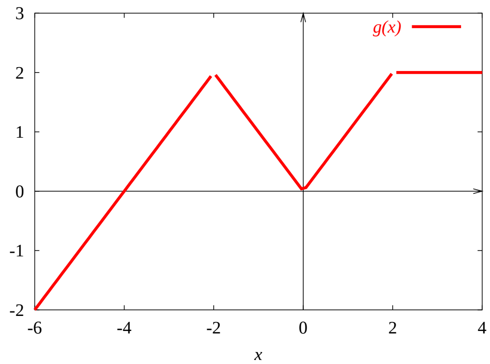


Figure 2: Funzione di trasformazione $g(x)$ nell'esercizio 2.

1/4. Applichiamo il teorema fondamentale per determinare il contributo, alla funzione densità di probabilità di $Y$, derivante da $f_X^c(x)$. Indichiamo tale componente di $f_Y(y)$ come $f'_Y(y)$. È immediato distinguere i seguenti casi.

- $y > 2$: in tale caso l'equazione $y = g(x)$ non ha soluzioni, quindi $f'_Y(y) = 0$.
- $y = 2$: in tale caso $g(x)$ presenta un tratto continuo. Si ha:

$$P\{Y = 2\} = \int_2^\infty f_X^c(x)dx = \int_2^5 \frac{1}{10}dx = \frac{3}{10}$$

  e quindi $f'_Y(y)$ presenta una delta, di area $3/10$, centrata in $y = 2$.
- $0 < y < 2$: in tale caso l'equazione $g(x) = y$ presenta 3 soluzioni:

$$\begin{array}{ll} x_1 = y - 4 & g'(x_1) = 1 \\ x_2 = -y & g'(x_2) = -1 \\ x_3 = y & g'(x_3) = 1. \end{array}$$

  Quindi:

$$\begin{aligned} f'_Y(y) &= \frac{f_X^c(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X^c(x_2)}{|g'(x_2)|} + \frac{f_X^c(x_3)}{|g'(x_3)|} \\ &= f_X^c(x_1) + f_X^c(x_2) + f_X^c(x_3) \end{aligned}$$

  dove $f_X^c(x_2) = 1/12$ e $f_X^c(x_3) = 1/10$. Per quanto riguarda $f_X^c(x_1)$, bisogna distinguere due sottocasi:

- $1 \leq y < 2$: in tale caso $f_X^c(x_1) = 1/12$, e quindi $f'_Y(y) = 1/12 + 1/12 + 1/10 = 4/15$.
- $0 < y \leq 1$: in tale caso $f_X^c(x_1) = 0$, e quindi $f'_Y(y) = 0 + 1/12 + 1/10 = 11/60$.

• $y = 0$: l'equazione $g(x) = y$ presenta 2 soluzioni: $x_1 = -4$ e $x_2 = 0$. La soluzione $x_2 = 0$ è degenere, visto che $g'(x_2)$ non è definita. Cionostante, non ci sono problemi, siccome non c'è alcuna massa di probabilità (relativa ad $X$) concentrata in $x_1$ o $x_2$.

• $y < 0$: c'è un'unica soluzione $x_1 = y - 4$. Siccome $f_X(x_1) = 0$, segue $f'_Y(y) = 0$.

A questo punto, possiamo scrivere in modo più compatto la funzione densità di probabilità $f'_Y(y)$ come segue:

$$f'_Y(y) = f_Y^c(y) + \frac{3}{10}\delta(y-2)$$

dove

$$f_Y^c(y) = \begin{cases} \frac{11}{60} & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{4}{15} & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} .$$

Per concludere, la densità di probabilità cercata è:

$$f_Y(y) = f_Y^c(y) + \frac{1}{4}\delta(y-1) + \frac{3}{10}\delta(y-2).$$

La funzione densità di probabilità della variabile aleatoria $Y$ è mostrata in Fig. 3

Il valore medio di $Y$ è il seguente:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y^c(y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{1}{4}\delta(y-1) dy + \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{3}{10}\delta(y-2) dy \\ &= \frac{11}{60}\int_0^1 y dy + \frac{4}{15}\int_1^2 y dy + \frac{1}{4} \times 1 + \frac{3}{10} \times 2 \approx 1.341. \end{aligned}$$

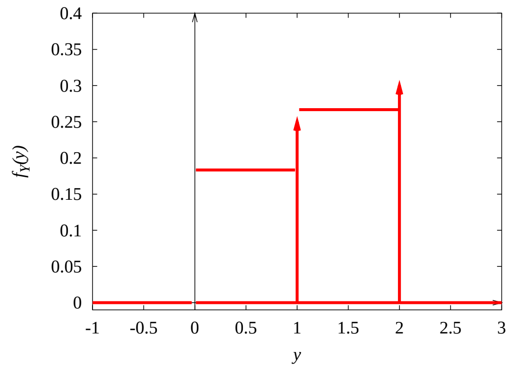


Figure 3: Funzione densità di probabilità della variabile aleatoria $Y$ nell'esercizio 2.

Tale valor medio si poteva anche calcolare col teorema dell'aspettazione (*ed era buona norma farlo per verificare indirettamente che i conti precedenti fossero corretti*), calcolando graficamente le aree sottese dal prodotto $g(x)f_X(x)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[g(X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx \\ &= \frac{1}{12}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{12}\cdot 2+\frac{1}{10}\cdot 2+ \\ &\quad +\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{10}\cdot 6 \approx 1.341\end{aligned}$$

**Esercizio 3**

Si considerino 4 variabili casuali indipendenti $X_1, X_2, X_3$, e $X_4$, tutte esponenziali con parametri $\mu_1, \mu_2, \mu_3$, e $\mu_4$, rispettivamente. Determinare la funzione densità di probabilità della variabile aleatoria $X$ definita come segue:

$$X = \min\{X_1, \min\{X_2, \min\{X_3, X_4\}\}\}.$$

*Soluzione*

Definiamo preliminarmente $Y = \min\{X_3, X_4\}$. Cerchiamo di determinare la funzione di distribuzione cumulativa di $Y$. Considerando la partizione costituita dai due eventi $\{X_3 \leq X_4\}$ e $\{X_3 > X_4\}$, si ha:

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{\min\{X_3, X_4\} \leq y\} \\
&= P\{\min\{X_3, X_4\} \leq y | X_3 > X_4\} P\{X_3 > X_4\} \\
&\quad + P\{\min\{X_3, X_4\} \leq y | X_3 \leq X_4\} P\{X_3 \leq X_4\} \\
&= P\{X_4 \leq y | X_3 > X_4\} P\{X_3 > X_4\} \\
&\quad + P\{X_3 \leq y | X_3 \leq X_4\} P\{X_3 \leq X_4\} \\
&= P\{X_4 \leq y, X_3 > X_4\} + P\{X_3 \leq y, X_3 \leq X_4\}.
\end{aligned}
$$

I due eventi $\{X_4 \leq y, X_3 > X_4\}$ e $\{X_3 \leq y, X_3 \leq X_4\}$ sono ovviamente disgiunti, e rappresentati in Fig. 4. Ricorrendo all'intepretazione grafica

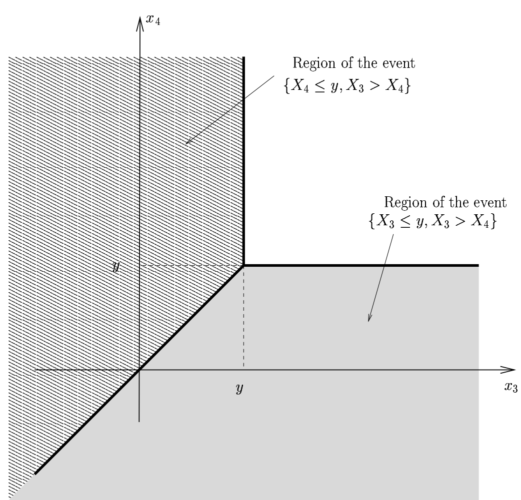


Figure 4: Regione, nel piano $(x_3, x_4)$, corrispondente all'evento $\{\min\{X_3, X_4\} \leq y\}$.

della funzione cumulativa di distribuzione congiunta di due variabili causuali, è immediato concludere che la probabilità associata alla regione indicata in Fig. 4 si può scrivere come segue:

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= F_{X_4}(y) + F_{X_3}(y) - F_{X_3, X_4}(y, y) \\
&= F_{X_4}(y) + F_{X_3}(y) - F_{X_4}(y) F_{X_3}(y)
\end{aligned}
$$

dove l'ultimo passaggio è ottenuto sulla base dell'independenza fra le variabili casuali $X_3$ e $X_4$. Ovviamente, $F_Y(y) = 0$ se $y \leq 0$. Derivando, e tenendo conto che le variabili casuali sono esponenziali:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= f_{X_4}(y) + f_{X_3}(y) - f_{X_3}(y)F_{X_4}(y) - f_{X_4}(y)F_{X_3}(y) \\
&= \mu_4 e^{-\mu_4 y} + \mu_3 e^{-\mu_3 y} - \mu_3 e^{-\mu_3 y}\left(1 - e^{-\mu_4 y}\right) - \mu_4 e^{-\mu_4 y}\left(1 - e^{-\mu_3 y}\right) \\
&= (\mu_3 + \mu_3)e^{-(\mu_3+\mu_4)y} \quad y \geq 0.
\end{aligned}$$

Abbiamo scoperto che $Y$ è una variabile casuale esponenziale con parametro $\mu_3+\mu_4$. Siccome $Y$ è indipendente da $X_2$, è immediato concludere che la variabile casuale $\min\{X_2, \min\{X_3, X_4\}\}$ è anch'essa esponenziale, con parametro $\mu_2 + \mu_3 + \mu_4$. Quindi, facendo un ultimo passo, segue che $X$ è una variabile casuale esponenziale con parametro $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$.

**Soluzione Alternativa**

Era sufficiente notare che $X = \min\{X_1, \min\{X_2, \min\{X_3, X_4\}\}\}$ è equivalente a $X = \min\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ ed è semplice cercare il complemento della funzione di distribuzione (CDF) di $X$:

$$\begin{aligned}
1 - F_X(x) &= P\{X > x\} = P\{X_1 > x,\, X_2 > x,\, X_3 > x,\, X_4 > x\} \\
&= P\{X_1 > x\}P\{X_2 > x\}P\{X_3 > x\}P\{X_4 > x\} \\
&= e^{-\mu_1 x}e^{-\mu_2 x}e^{-\mu_3 x}e^{-\mu_4 x} \\
&= e^{-(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4)x}
\end{aligned}$$

dove il primo passaggio si deduce dal fatto che, se il minimo delle $X_i$ è maggiore di $x$, allora *tutte* le $X_i$ sono maggiori di $x$, e viceversa. Il secondo passaggio usa l'indipendenza delle $X_i$. Il terzo passaggio usa la CDF delle esponenziali $X_i$. Dall'equazione precedente cui deduciamo che $F_X(x) = 1 - e^{-\mu x}$, con $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$, e dunque $X$ è una V.A. esponenziale di parametro $\mu$.

**Esercizio 4**

Pensando a quando andate al supermercato a fare la spesa, supponete che la quantità di cose che comprate possa essere modellata come una variabile casuale $X$ uniformemente distribuita in (0,3). Il tempo impiegato alla cassa sia la variabile casuale $T$. Supponendo che si realizzi $X = x$, il valor medio del tempo impiegato alla cassa è $4x + 3$ e la varianza del tempo impiegato è 5. Calcolare la varianza del tempo impiegato alla cassa.

*Soluzione*

Sappiamo che

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[T|X=x] &= 4x+3 \\ \mathrm{VAR}[T|X=x] &= 5. \end{aligned}$$

Siccome

$$\mathrm{VAR}[T] = \mathrm{E}[T^2] - (\mathrm{E}[T])^2$$

cerchiamo di calcolare i due valori medi a secondo membro. Tenendo conto che $X$ è uniformemente distribuita in (0,3), si ha:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[T] &= \mathrm{E}_X[\mathrm{E}[T|X]] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}[T|X=x] f_X(x) dx = \int_0^3 (4x+3)\frac{1}{3} dx = 9. \end{aligned}$$

Analogamente possiamo scrivere che

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[T^2] &= \mathrm{E}_X[\mathrm{E}[T^2|X]] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}[T^2|X=x] f_X(x) dx. \end{aligned}$$

Siccome

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[T^2|X=x] &= \mathrm{VAR}[T|X=x] + (\mathrm{E}[T|X=x])^2 \\ &= 5 + (4x+3)^2 \end{aligned}$$

segue:

$$\mathrm{E}[T^2] = \int_0^3 [5 + (4x+3)^2]\frac{1}{3} dx = 98.$$

Per concludere, la varianza del tempo impiegato alla cassa è:

$$\mathrm{VAR}[T] = 98 - 9^2 = 17.$$

**Soluzione Alternativa**

Si poteva applicare la formula della varianza:

$$VAR[T] = E[VAR[T|X]] + VAR[E[T|X]] \, .$$

Infatti $E[VAR[T|X]] = E[5] = 5$, e

$$VAR[E[T|X]] = VAR[4X+3] = VAR[4X] = 16VAR[X]$$

e poi un rapido calcolo col teorema dall'aspettazione cui dà $E[X] = 3/2$, $E[X^2] = 3$ da cui $VAR[X] = E[X^2] - E^2[X] = 3 - 9/4 = 3/4$ e infine

$$VAR[T] = 5 + 16VAR[X] = 5 + 16 \cdot \frac{3}{4} = 17\,.$$