

**G.P. Maggi**

# **Lezioni di Fisica Generale**

Per il corso di laurea in Ingegneria Edile

A.A. 2001/2002

(versione del 22-2-2002)



Politecnico di Bari

## **Premessa.**

Le Lezioni di Fisica Generale qui proposte non vogliono in alcun modo sostituire il libro di testo, esse vanno invece considerate complementari ad esso.

Sul libro di testo

- gli argomenti sono trattati in maniera più ampia, in molti casi osservando il problema da più punti di vista e mettendolo in relazione con altri argomenti collegati, in qualche caso anche con richiami storici.
- È corredato da molte figure che servono a rendere più chiari i fenomeni di cui si discute e le argomentazioni utilizzate.
- Per ogni argomento vengono riportati numerosi esempi e problemi svolti.

Le Lezioni dal canto loro rappresentano comunque un importante lavoro di sintesi dei vari argomenti trattati e quindi, in questo senso, possono facilitare il raggiungimento dell'obiettivo finale, cioè quello di completare la preparazione dell'esame di Fisica Generale nel più breve tempo possibile senza disperdersi su argomenti meno importanti. Ma proprio perché costituiscono una sintesi, rischiano presentare una visione dei fenomeni fisici trattati molto parziale.

Quindi queste lezioni vanno usate in connessione con il libro di testo. Quello a cui si è fatto riferimento nel prepararle è il classico:

David Halliday- Robert Resnick, Jearl Walker - *FONDAMENTI di FISICA* – Casa Editrice Ambrosiana

# Introduzione

## **La Fisica: presentazione.**

Nella vita quotidiana si incontrano frequentemente fenomeni che sono oggetto di studio della Fisica.

Consideriamo ad esempio l'automobile: pur in uno spazio così ristretto si verificano tutta una serie di fenomeni fisici:

0. innanzitutto il moto sia come moto di insieme di tutta l'automobile, ma anche il moto dei singoli particolari come il moto di rotazione delle ruote, il moto alternativo dei pistoni nei cilindri, etc. Cosa determina il moto dell'automobile? Quali sono le condizioni che determinano un moto di rotazione (le ruote), alternativo (i pistoni) o di semplice traslazione(moto di insieme)? Dove e come si può intervenire per migliorare la sicurezza nell'automobile (per es. sistema frenante ABS)?
0. trasformazione dell'energia interna contenuta nel carburante (la benzina) in movimento meccanico. In quali condizioni questa trasformazione si realizza con la massima efficienza.
0. fenomeni elettromagnetici: motorino di avviamento, alternatore, batteria, corrente elettrica, lampadine, emissione di luce dai fari, assorbimento di onde elettromagnetiche per ascoltare la radio, per ricevere una telefonata col cellulare.

Se anziché l'automobile considero un'abitazione, anche qui possiamo identificare alcuni fenomeni fisici:

0. al posto del moto c'è da chiedersi come mai l'abitazione non crolla, come è possibile farla resistere a varie sollecitazioni: vento, terremoti, scoppi, urti.
0. problemi legati al riscaldamento dell'abitazione nei mesi invernali e al raffreddamento in quelli estivi, alla conservazione dei cibi (frigorifero): in che modo si possono raggiungere questi obiettivi spendendo il meno possibile?
0. anche in una abitazione si verificano fenomeni elettromagnetici a cominciare dal passaggio di corrente nella resistenza del forno elettrico o della griglia elettrica, l'emissione di luce dalle lampadine dell'impianto di illuminazione, alla captazione delle onde elettromagnetiche per il funzionamento della radio e del televisore, per finire a quei processi che avvengono all'interno dei circuiti elettronici.

Chi usa l'automobile è anche familiare alcune grandezze fisiche:

- **Velocità** (rapidità con cui cambia la posizione dell'automobile = lo spazio percorso diviso per il tempo

impiegato a percorrerlo, misurata dal tachimetro)

- **Accelerazione** (rapidità con cui cambia la velocità dell'automobile = la variazione di velocità diviso per il tempo impiegato)
- **Percorso effettuato** (misurato dal contachilometri).
- **Spostamento** (lo spostamento differisce dal percorso effettuato. È il segmento orientato che ha come primo punto la posizione di partenza e come secondo punto quella di arrivo. Supponiamo che con l'automobile si sia andati dall'abitazione al supermercato e poi si sia tornati a casa, lo spostamento è zero (la posizione di arrivo coincide con quella di partenza) mentre il percorso effettuato è sicuramente maggiore di zero). Lo spostamento è caratterizzato da un **modulo**, la distanza tra il punto di arrivo e quello di partenza, da una **direzione**, quella della retta passante dal punto di arrivo e da quello di partenza (per due punti passa una sola retta), ed un **verso** quello dal punto di partenza al punto di arrivo).
- **Volume** (del serbatoio misurato attraverso l'indicatore di livello della benzina)
- **Cilindrata** (volume complessivo dei cilindri del motore)
- **Pressione** (dei pneumatici, misurata con il manometro)
- **Temperatura** (dell'acqua nel radiatore, misurata dal termometro)
- **Potenza** (del motore, indicato sul libretto di circolazione: è la base per il calcolo della tassa di circolazione)
- **Coppia** (massima. È una caratteristica del motore che solitamente i costruttori riportano sui depliant della vettura, una coppia massima più elevata indica la capacità della vettura di variare più rapidamente la propria velocità (ripresa))
- **Tensione** (della batteria solitamente 12 Volt)
- **Corrente elettrica** (la carica elettrica che attraversa una sezione del circuito elettrico in un secondo)
- **Resistenza elettrica** (la capacità di un circuito elettrico ad opporsi al passaggio di corrente elettrica)
- **Frequenza** (giri al minuto del motore misurata dal contagiri, per esempio 3000 giri al minuto, frequenza dell'onda radio sintonizzata dall'autoradio, per esempio 102 MHz, megahertz)

Per controllare i fenomeni fisici, per farli cioè avvenire quando a noi fa più comodo, nella maniera in cui desideriamo è necessario conoscerli, sapere cos'è che influisce su di essi, quali sono le cause che li determinano: conoscere cioè le leggi della Fisica.

Esempi di leggi fisiche.

$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$	II legge di Newton
$V = RI$	Legge di Ohm
$= 1 - \frac{T_2}{T_1}$	Rendimento massimo di una macchina termica operante tra le temperature $T_1$ e $T_2$ con $T_1 > T_2$

Le leggi fisiche altro non sono che delle relazioni tra le grandezze fisiche.

È chiaro che per poter confrontare i due membri di una relazione occorre misurare le grandezze coinvolte nella relazione.

## Grandezze fisiche.

Cosa sono le grandezze fisiche?

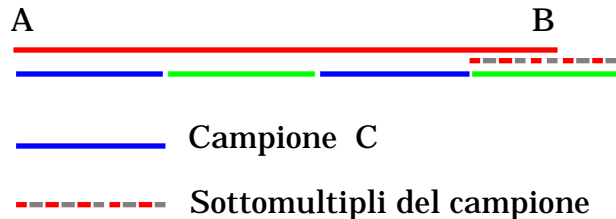
I fisici hanno adottato un atteggiamento pragmatico.

*Una grandezza ha significato in fisica se per essa è stato definito un metodo di misura ed è stata assegnata una unità di misura o campione.*

Questa definizione è quella che va sotto il nome di *definizione operativa delle grandezze fisiche* (\*).

*Data una grandezza fisica, si può scegliere un campione e si possono stabilire dei criteri per confrontare il campione con la grandezza che si vuole misurare.*

Per eseguire misure di lunghezza, per esempio quella di un segmento AB, bisogna scegliere il campione: possiamo prendere il segmento C. Poi bisogna specificare il metodo di misura: si riporta il campione C a partire dal punto iniziale A e si determina quante volte il campione, ed i suoi sottomultipli, sono contenuti nel segmento AB.



Si scriverà:  $d = 3.6$  Campioni

Non è necessario definire un campione per ogni grandezza fisica.

---

(\*) Si noti che la fisica non pretende di dare una spiegazione di tutto: non pretende cioè di spiegare cos'è la "lunghezza", cos'è il "tempo", cos'è la "massa", cos'è la "carica elettrica", etc. Tutto quello che fa è cercare di determinare come queste proprietà dei corpi intervengono nell'evoluzione di un fenomeno naturale, lasciando al futuro il compito di rispondere a queste domande fondamentali. L'esperienza ci mostra che con il progredire della conoscenza si riesce a rispondere ad alcune di esse: è stato trovato, per esempio, che il calore altro non è che una forma di energia, i fenomeni magnetici sono provocati dal moto di cariche elettriche, le onde luminose sono delle particolari onde elettromagnetiche, etc.

Le grandezze fisiche, infatti, sono legate da relazioni, le leggi fisiche; tali relazioni possono essere usate per definire i campioni delle grandezze derivate attraverso le relazioni.

Per esempio la velocità è legata allo spazio percorso  $d$  e all'intervallo di tempo impiegato  $t$  dalla relazione

$$v = \frac{d}{t}$$

per cui, se abbiamo definito un campione per lunghezze ed uno per il tempo, abbiamo immediatamente anche definito il campione di velocità: è proprio la velocità di quell'oggetto che percorre il campione di lunghezza in un campione di tempo.

Supponiamo che le grandezze usate in fisica siano solo tre, la distanza  $d$ , il tempo  $t$ , e la velocità  $v$ . Essendoci una relazione tra queste grandezze, è sufficiente specificare i campioni e la metodologia di misura per due sole di esse per specificare completamente il campione e la metodologia di tutte e tre le grandezze. Nell'esempio precedente due è il numero minimo di grandezze per le quali è necessario specificare il campione e la metodologia di misura per definire completamente il sistema di unità di misura, cioè per definire completamente le unità di misura per tutte e tre le grandezze.

Le due grandezze per le quali viene fissato il campione si diranno fondamentali, la terza sarà detta derivata. Ciascuna delle tre grandezze che stiamo considerando può essere scelta come fondamentale: si potrebbero scegliere per esempio come grandezze fondamentali la distanza e gli intervalli di tempo, oppure il tempo e la velocità.

Una volta fatta la scelta delle grandezze fondamentali si dice che è stato fissato il sistema di unità di misura; una scelta diversa delle grandezze fondamentali corrisponde ad un sistema di unità di misura diverso. Grandezze che sono fondamentali in un sistema di unità di misura possono essere derivate in un altro e viceversa.

Una volta scelte le grandezze fondamentali c'è ancora una arbitrarietà nella definizione dei loro campioni, per cui si possono avere sistemi di unità di misura che differiscono per il campione usato per una o più grandezze fondamentali.

Il numero di grandezze usate in fisica ovviamente è molto più grande di tre. A titolo di esempio nella tabella 1 sono elencate alcune delle grandezze usate in meccanica. Il numero di grandezze fondamentali non è però molto grande: per lo studio del moto dei corpi, in meccanica, il numero di grandezze fondamentali richiesto è tre.

Tabella 1  
Esempi di grandezze usate in Fisica

Grandezze fisiche	Simboli
<b>Lunghezza</b>	r
<b>Tempo</b>	t
<b>Massa</b>	m,M
Velocità	v
Accelerazione	a
Forza	F
Lavoro	L,W
Energia	K,U,E
Potenza	P
Quantità di moto	p,Q
Momento della forza	
Momento della quantità di moto	l

Quali sono i criteri che guidano nella scelta delle grandezze fondamentali?

Essenzialmente sono legati alla semplicità con cui si riesce a definire il campione ed alla sua accessibilità, cioè alla possibilità di poter tarare gli strumenti di misura direttamente con il campione stesso.

Un buon campione di misura deve essere accessibile, riproducibile, ma deve essere anche invariabile. Quest'ultima esigenza non sempre è conciliabile con le altre due.

In passato per la misura di lunghezza sono stati usati dei campioni derivanti da parti del corpo umano: pollice, piede, braccia, yarda. La yarda era definita come la distanza tra la punta del naso e la punta delle dita del braccio teso. Questo è un campione molto accessibile, trasportabile, ma quanto è invariabile? E' ovvio che persone di statura diversa hanno una distanza naso-punta\_delle\_dita diversa. Si potrebbe pensare di far riferimento, per definire il campione, ad una particolare persona, per esempio al re: ma, in questo caso, il campione non sarebbe più tanto accessibile e subirebbe comunque delle variazioni sia nel corso dell'esistenza del re che all'atto della sua



successione. A tutto questo si aggiunge poi la difficoltà di riportare la mano e la testa sempre nella stessa posizione.

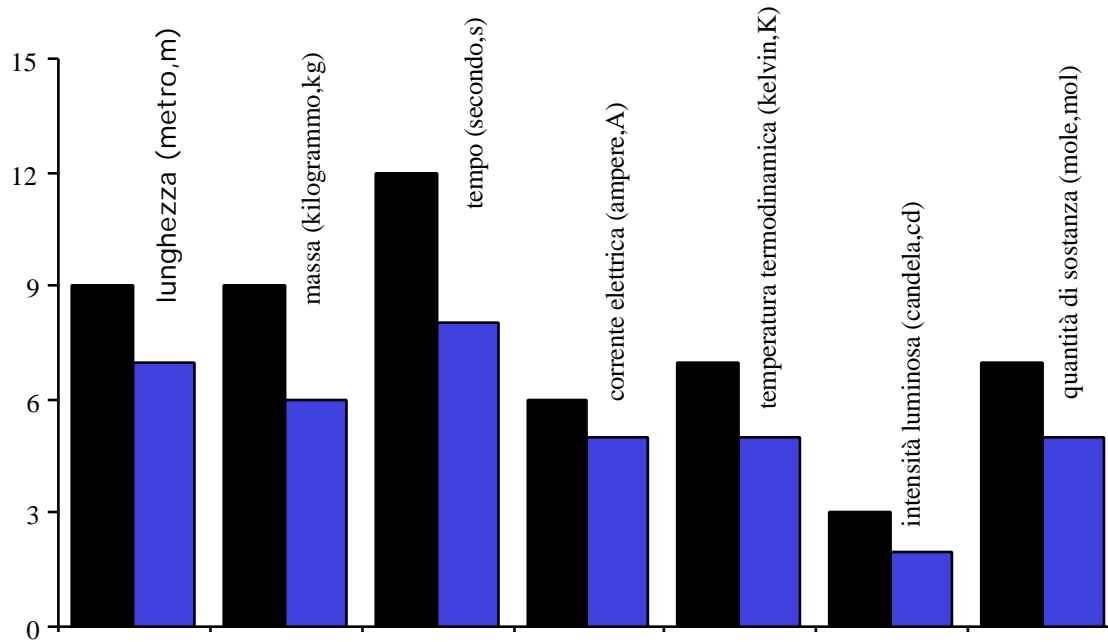
E' facile immaginare che l'uso di campioni di questo tipo poteva andare molto bene per gli avvocati, perché ovviamente dovevano succedere molte diatribe quando si vendevano o acquistavano terreni, ma era sicuramente inadeguato per lo sviluppo scientifico, il quale richiede che ricercatori che si trovano anche molto distanti tra loro, sia nello spazio che temporalmente, devono poter confrontare i risultati di esperimenti, cioè, i risultati di misure.

E' stato istituito un ente internazionale con il compito di studiare problemi relativi alla scelta delle grandezze fondamentali, alla definizione dei campioni di misura, etc. E' l'Ufficio Internazionale dei Pesi e Misure che ha sede a Sevres vicino Parigi.

Esiste anche una Conferenza Internazionale di Pesi e Misure che si riunisce periodicamente ed in cui vengono formulate delle raccomandazioni e suggerite delle soluzioni e delle metodologie di misura. I vari Stati che partecipano alla conferenza possono poi adottare le raccomandazioni della conferenza emanando delle leggi.

La XIV Conferenza Generale dei Pesi e Misure del 1971 ha suggerito di adottare il Sistema Internazionale (SI) basato sulle seguenti grandezze fondamentali e i rispettivi campioni:

<u>Unità fondamentali (7)</u>	<u>campione</u>	<u>simbolo</u>
Lunghezza	Metro	m
Massa	kilogrammo	kg
Tempo	Secondo	s
Corrente elettrica	Ampere	A
Temperatura Termodinamica	Kelvin	°K
Intensità luminosa	Candela	cd
Quantità di Materia	Mole	mol
<u>Unità supplementari (2)</u>		
Angolo piano	radiante	rad
Angolo solido	steradiano	sr



L'incertezza relativa è espressa come  $1/10^n$ . Nel grafico è rappresentato l'esponente n.

- incertezze relative del campione delle unità fondamentali
- precisioni richieste dalle applicazioni industriali

Multipli			Sottomultipli		
deca	10	da	deci	$10^{-1}$	d
etto	$10^2$	h	centi	$10^{-2}$	c
kilo	$10^3$	k	milli	$10^{-3}$	m
Mega	$10^6$	M	micro	$10^{-6}$	$\mu$
Giga	$10^9$	G	nano	$10^{-9}$	n
Tera	$10^{12}$	T	pico	$10^{-12}$	p
Peta	$10^{15}$	P	femto	$10^{-15}$	f
Esa	$10^{18}$	E	atto	$10^{-18}$	a

La stessa conferenza internazionale ha adottato dei prefissi per indicare i multipli e i sottomultipli dell'unità di misura (campione), cosa molto utile quando l'intervallo di valori che le diverse grandezze possono assumere è piuttosto ampio.

Come appare dalla tabella i multipli e sottomultipli differiscono di fattori 10, il Sistema Internazionale è quindi un sistema metrico decimale.

### ***Il campione della lunghezza.***

La misura di una lunghezza in Fisica corrisponde alla stessa operazione che si fa in geometria per misurare la distanza tra i due estremi di un segmento rettilineo, operazione che abbiamo descritto in un esempio precedente. Per completare la definizione della lunghezza come grandezza fisica occorre fissare l'unità di misura o il campione. Nel Sistema Internazionale il campione di lunghezza è il metro.

Vediamo come storicamente è evoluta questa unità di misura.

Nel 1790 la costituente francese decise di porre fine al problema dei sistemi di unità di misura, affidando ad una commissione di esperti il compito di sostituire i sistemi tradizionali con uno che fosse semplice ed avesse i

campioni ben definiti. Della commissione facevano parte illustri scienziati come Lagrange e Laplace. Questa commissione si convinse che la grandezza, meno soggetta a variazioni temporali ed accessibile ai mezzi dell'epoca, a cui ancorare, mediante una definizione, il campione di lunghezza, fosse la dimensione della Terra. Precisamente si convenne di misurare la lunghezza del meridiano terrestre (tracciato sull'ellissoide geodetico di riferimento) passante per Parigi e di prendere come campione una frazione di esso, che corrispondesse ad una lunghezza comoda, cioè non molto diversa da quelle in uso, ormai selezionate dalla pratica e dal tempo. Al termine delle misurazioni del meridiano terrestre, durate 7 anni, fu costruita e depositata a Parigi una sbarra di platino puro che, alla temperatura del ghiaccio fondente, presentava fra i suoi estremi una distanza pari alla 40 milionesima parte del meridiano terrestre<sup>1</sup>. A questa lunghezza fu dato il nome di metro, nome che fu poi attribuito anche alla sbarra. Esso differiva di poco dalla Yarda britannica (1 m = 1.1 Y). Ci si accorse in seguito che il meridiano terrestre era più lungo, di 3422 m, di quanto era risultato dalle prime misure. Per evitare di correggere il campione e quindi tutte le copie in circolazione, si preferì abbandonare ogni riferimento al meridiano terrestre e considerare come metro la lunghezza della sbarra. Con il perfezionarsi delle tecniche di misura, ci si rese conto che c'erano delle variazioni di lunghezza nel metro dovute a variazioni di temperatura, che presto divennero intollerabili. Venne costruito un nuovo campione di lunghezza uguale al precedente, che venne depositato a Sevres, presso Parigi nel 1889, insieme ad apparecchi precisi all'uno su un milione per la costruzione delle copie. Questo campione tuttora in uso è costituito da una sbarra di platino-iridio, che presenta elevate caratteristiche di inalterabilità chimica e meccanica, e scarsa sensibilità alle variazioni di temperatura. Su questo campione sono stati costruiti dei campioni secondari, distribuiti agli uffici nazionali di metrologia di tutto il mondo. Questi ultimi vengono usati per tarare altri campioni più accessibili.

Tuttavia anche questo metro campione presenta degli inconvenienti. La sbarra campione potrebbe andare distrutta per qualche calamità o il metallo che la compone potrebbe alterarsi con il passare del tempo in maniera imprevedibile. Inoltre copie ottenute mediante un comparatore dotato di microscopio con un forte ingrandimento, hanno una precisione di 2-5 parti su 10<sup>7</sup>, limite imposto dalla grossolanità dei tratti che definiscono gli estremi del campione. Tale precisione è inferiore a quella raggiunta in alcune applicazioni industriali o in alcuni esperimenti di Fisica. Oltre alla precisione inadeguata, che è l'obiezione più importante, è anche scomodo confrontare le lunghezze con la sbarra campione, perché il confronto va fatto alla temperatura a cui è conservata la sbarra, per

---

<sup>1</sup> Se la lunghezza del meridiano terrestre è 40 000 000 m, allora il raggio terrestre sarà:

$$R_T = \frac{\text{lunghezza meridiano}}{2} = \frac{40000000\text{m}}{6,28} = \frac{40000\text{km}}{6,28} = 6369\text{km}$$

evitare variazioni di lunghezza della sbarra dovuta a variazioni di temperatura. Altre cause di imprecisione sono dovute alla reazione elastica del campione conseguente alla interazione con il corpo che si vuole misurare.

Queste difficoltà furono superate con la definizione, adottata per accordo internazionale nel 1961, di una unità naturale di lunghezza basata su una radiazione atomica. Poiché gli atomi di una data specie sono identici anche le radiazioni da loro emesse sono identiche. Perciò il campione della lunghezza definito sulla base delle proprietà degli atomi è riproducibile dappertutto. La sbarra metrica campione è stata confrontata accuratamente con la lunghezza d'onda della luce arancione emessa dal cripto 86 (questo isotopo è stato scelto perché può essere ottenuto con grande purezza in modo relativamente facile e a buon mercato). Si è deciso che  $1\,650\,763,73$

lunghezze d'onda del  $^{86}\text{Kr}$  costituiscono un metro. Questa definizione è quindi compatibile con la definizione basata sulla distanza tra i tratti incisi sulla sbarra di Sevres ma ha il vantaggio di essere circa 100 volte più precisa. Inoltre il campione può essere riprodotto in molti laboratori di tutto il mondo, visto che gli atomi sono universalmente disponibili e tutti gli atomi di una data specie sono identici ed emettono luce della stessa lunghezza d'onda.

Nella XVII Conferenza Generale dei Pesi e Misure, tenuta nell'ottobre del 1983, la definizione del metro campione è stata ulteriormente modificata. Oggi il metro campione viene definito come la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un tempo pari a  $1/299\,792\,458$  s. Questa definizione si basa sul fatto che la velocità della luce nel vuoto è una costante universale. La misura di una lunghezza viene così ricondotta ad una misura di tempo, che è la grandezza che sappiamo misurare con la massima precisione. Questo cambiamento ha reso ancora più accessibile il campione della lunghezza e ha consentito un ulteriore miglioramento di due ordini di grandezza della precisione nelle misure di lunghezza.

## ***Il campione del tempo.***

Il tempo si concepisce come qualcosa che scorre, indipendentemente dalla nostra volontà, e, in questo suo fluire, marca gli avvenimenti in maniera da ottenere una sequenza cronologicamente ordinata di eventi. Nella maggior parte dei problemi fisici non siamo interessati a questo aspetto del tempo (*tempo assoluto*), bensì alla misura dell'intervallo di tempo tra due eventi successivi.

La ricerca del campione di tempo presenta delle maggiori difficoltà rispetto a quello della lunghezza e della massa, perché non può essere materializzato come invece è stato fatto per le altre due grandezze.

Nel cercare il campione del tempo, l'attenzione dell'uomo è stata attratta da quei fenomeni che si ripetono nel tempo sempre nello stesso ordine e con le stesse modalità. Questi fenomeni sono detti periodici ed il susseguirsi delle varie fasi a partire da una scelta arbitrariamente come iniziale, fino a ritornare in essa è detto ciclo. L'intervallo di tempo necessario per percorrere un ciclo è detto periodo.

Per definire operativamente il tempo, bisogna fissare il periodo campione (o unità di misura). La misura di un intervallo di tempo tra due eventi successivi (durata di un fenomeno) si effettua contando quante volte il ciclo campione, nella ipotesi che la sua durata non vari, si ripete tra i due eventi successivi.

Il problema diventa quindi quello di scegliere il fenomeno periodico campione. L'attenzione è stata rivolta ai fenomeni astronomici. Il più familiare è la rotazione della terra intorno al proprio asse che determina la lunghezza del giorno. Esso fu usato fin dall'antichità come campione di tempo ed è ancora oggi alla base del campione del tempo civile.

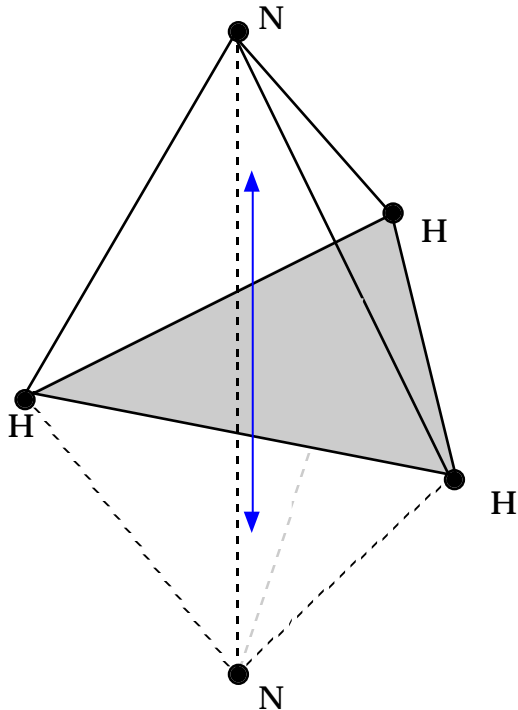
Il campione di tempo, il secondo, è definito come  $1/86400$  parte del giorno solare medio. Per giorno solare si intende l'intervallo di tempo che intercorre tra due passaggi successivi del sole sopra lo stesso meridiano terrestre.

Perché giorno solare medio? L'orbita descritta dalla terra intorno al sole è ellittica e la velocità di rivoluzione non è costante, di conseguenza anche la durata del giorno solare varia durante l'anno. Occorrerebbe quindi misurare la durata del giorno per tutto un anno e poi derivarne il valore medio. Il tempo così ottenuto è detto tempo universale T.U. E' chiaro che per poter attuare questa procedura occorre disporre di un buon orologio terrestre, tarato sulle osservazioni astronomiche, come per esempio i pendoli, gli orologi a quarzo, etc.).

Tuttavia il tempo determinato sulla base della rotazione terrestre non è adeguato per misure di alta precisione, a causa di una lenta diminuzione della velocità di rotazione della terra. Queste variazioni di velocità sono di una parte su  $10^8$  in un anno. Per questo motivo l'attenzione è stata rivolta all'altro moto periodico della terra, la sua rivoluzione intorno al sole. Il secondo è stato allora definito come una frazione dell'anno tropicale, che è il tempo

che intercorre tra due equinozi di primavera. In particolare, al fine di evitare problemi derivanti da una variabilità nella durata dell'anno tropicale, il secondo è stato definito come la  $1/31556925,97474^2$  dell'anno tropicale 1900. L'aver fissato l'anno, il 1900, rende il campione invariabile ma non accessibile.

Più recentemente, per migliorare le misure di tempo, per disporre di un campione facilmente riproducibile, legato a qualche proprietà fondamentale, l'attenzione è stata rivolta alle proprietà degli atomi. Sono così stati costruiti degli orologi atomici, che sfruttano le vibrazioni periodiche di alcuni tipi di atomi o molecole.



Tanto per fare un esempio, consideriamo la molecola di ammoniaca NH<sub>3</sub>. Questa molecola ha una struttura a piramide, con gli atomi di idrogeno ai tre vertici della base e l'atomo di azoto posto al vertice della piramide. L'atomo di azoto può trovarsi da un lato o dall'altro rispetto al piano individuato dai 3 atomi di idrogeno. In realtà l'atomo di azoto oscilla tra queste due posizioni con una frequenza di circa 24 miliardi di oscillazioni al secondo. Con le moderne tecniche si è in grado di usare il moto dell'atomo di azoto per controllare le oscillazioni di un circuito elettronico che quindi si sincronizza con le oscillazioni della molecola di ammoniaca.

Anche altre sostanze hanno proprietà analoghe a quelle dell'ammoniaca. Nel 1967 la XIII conferenza Generale dei Pesi e Misure ha scelto come campione internazionale di tempo il secondo definito con un orologio atomico basato su una particolare vibrazione dell'atomo di Cesio 133. In particolare il secondo è definito come il tempo necessario perché vengano compiuti 9192631770 cicli della particolare vibrazione degli atomi di cesio. Tale definizione del secondo è diventata operativa il 1 gennaio 1972. Il tempo misurato con questo orologio ha una precisione di una parte su  $10^{12}$ , che migliora di circa un fattore 1000 la precisione ottenibile con il campione astronomico.

---

<sup>2</sup> Da questa definizione ricaviamo che ci sono 31556925,97474 secondi in un anno (cioè all'incirca  $10^7$  secondi in un anno che però è più semplice da ricordare).

## **Il Campione della massa**

La massa è una proprietà intrinseca dei corpi, che può essere definita correttamente solo nella teoria dinamica dei corpi in movimento. Di questo parleremo nelle prossime lezioni. Il campione internazionale di massa è un cilindro di platino-iridio conservato nel Laboratorio di Pesi e Misure di Sevres. La massa del campione è per definizione 1 Kg.

Questa massa dovrebbe coincidere con quella di 1 dm<sup>3</sup> di acqua distillata alla massima densità, cioè alla temperatura di 3.98 °C, ma ciò è vero solo approssimativamente.

Come si è detto per le lunghezze, ogni nazione possiede almeno un ottimo campione di massa, in base al quale si costruiscono quelli via via meno precisi, che si usano nella vita di tutti i giorni. Sul modo con cui si devono confrontare le masse per determinare la loro misura in termini dell'unità di misura parleremo tra qualche lezione e faremo vedere che è necessario ricorrere a metodi dinamici. D'altro lato mostreremo, quando parleremo della Gravitazione Universale, che massa inerziale e massa gravitazionale coincidono, così che per il confronto delle masse si può ricorrere alle bilance.

La precisione che si riesce a raggiungere nella calibrazione di copie è di due parti su 100 milioni (10<sup>-8</sup>). Anche per le masse, dato il vasto campo di variabilità (la massa dell'elettrone è dell'ordine di 10<sup>-30</sup> Kg, quella dell'universo di 10<sup>50</sup> Kg), si useranno metodi diversi e non sempre diretti per la determinazione delle masse nei vari intervalli considerati.

## **Unità di massa atomica**

Su scala atomica disponiamo di un secondo campione di massa, che però non è una unità del Sistema Internazionale. E' la massa dell'atomo di <sup>12</sup>C, al quale, per accordo internazionale, è stata assegnata la massa atomica di esattamente 12 unità atomiche di massa. La massa di altri atomi può essere misurata con elevata precisione usando uno spettrometro di massa. E' stato necessario ricorrere ad un secondo campione di massa perché le attuali tecniche di laboratorio ci permettono di determinare le masse degli atomi in termini di unità di massa atomica con una precisione maggiore di quella ottenibile in termini del Kg campione.

La relazione tra i due campioni è :

$$1 \text{ u} = 1.6605402 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$$



Il campione di massa, non essendo legato ad una proprietà fondamentale, presenta gli stessi inconvenienti presentati dal campione del metro e che avevano portato alla ridefinizione del metro in termini di proprietà atomiche prima e della velocità della luce poi.

Sarebbe sicuramente auspicabile poter disporre anche per la massa, così come per la lunghezza e il tempo, di un campione atomico. Il campione di unità atomiche basato sul carbonio 12 non è però usabile per una ridefinizione del Kg campione. La relazione tra le due unità è precisa soltanto al livello di una parte su  $10^7$ . A tutt'oggi la precisione delle copie che si ottengono per paragone con il Kg campione è molto migliore di quelle ottenibili utilizzando il campione atomico.

### **Altri sistemi di unità di misura.**

- "cgs": Questo sistema per quel che riguarda la meccanica utilizza le stesse grandezze fondamentali del SI, cambiano invece le unità di misura (i campioni): il centimetro per la lunghezza e il grammo per la massa. L'unità di tempo è la stessa nei due sistemi di riferimento.
- "britannico": Le grandezze fondamentali della meccanica sono la lunghezza, misurata in piedi, la forza misurata in libbre, e il tempo misurato in secondi. Il sistema britannico non è un sistema decimale (un piede è uguale 12 pollici). Attualmente i campioni di libbra e di piede vengono definiti sulla base del kilogrammo e del metro del sistema SI. Per esempio un pollice è uguale 2.54 cm.
- "Sistema pratico degli ingegneri": utilizza come grandezze fondamentali la lunghezza (metro) , il tempo (secondo) e la forza, la cui unità di misura è il kilogrammopeso che corrisponde al peso del campione di massa del SI, quando si trova al livello del mare e a  $45^\circ$  di latitudine.

### Grandezze derivate dalla lunghezza.

Le grandezze derivate dalla lunghezza sono le superfici, i volumi e gli angoli.

Le superfici si possono esprimere per mezzo di funzioni omogenee di secondo grado delle lunghezze da cui dipendono :

triangolo	$1/2 \text{ base} \times \text{altezza}$
parallelogramma	$\text{base} \times \text{altezza}$
cerchio	$\times \text{raggio al quadrato}$
etc.	

Ciò si esprime simbolicamente mediante una equazione dimensionale:

$$[S] = [L^2]$$

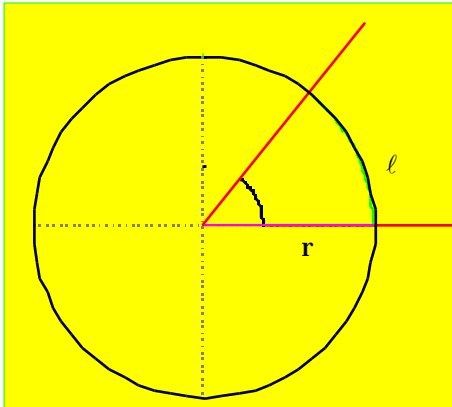
Si intende per *dimensione* di una grandezza, l'esponente, o gli esponenti, a cui vengono elevate le grandezze fondamentali.

Nel caso della superficie solo la lunghezza  $L$  ha un esponente diverso da zero: esso vale infatti 2. Si dirà pertanto che la superficie ha le dimensioni di una lunghezza al quadrato. Nel SI poiché il metro è unità di misura della lunghezza, l'unità di misura delle superfici è il  $m^2$ . Questo equivale ad aver assunto come campione di superficie un quadrato di lato unitario.

In maniera analoga, l'equazione dimensionale del volume è:

$$[V] = [L^3]$$

e l'unità di misura del volume nel SI è il  $m^3$ .



Nella vita comune gli angoli si misurano in gradi, l'angolo giro corrisponde a 360 gradi.

In fisica useremo un'altra unità di misura: il radiante. La misura di un angolo in radianti si ottiene dividendo la lunghezza dell'arco di cerchio sotteso,  $l$ , per il raggio del cerchio,  $r$ . Il rapporto di due lunghezze è ovviamente un numero puro; quindi gli angoli sono grandezze adimensionali. Tuttavia si preferisce aggiungere l'unità, rad[iante], accanto al numero, per chiarezza.

L'angolo giro è uguale a  $2\pi$  radianti, l'angolo retto a  $\pi/2$  radianti. L'angolo di 1 radiante è quello che sottende un arco di lunghezza  $l$  pari al raggio  $r$ .

L'equazione dimensionale per l'angolo si scriverà come

$$[\text{angolo}] = [L^0]$$

Analogamente, l'angolo solido sotteso da un cono con vertice in  $O$  è definito come il rapporto tra la superficie  $S$  tagliata dal cono sulla superficie sferica di raggio  $r$  e centro in  $O$  ed il raggio  $r$  al quadrato:

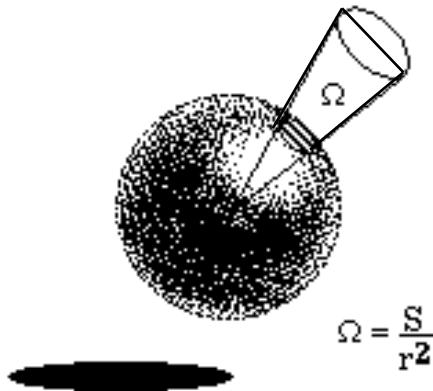
$$\Omega = \frac{S}{r^2}$$

Le sue dimensioni sono:

$$[\text{angolo solido}] = [L^2][L^{-2}] = [L^0]$$

Anche l'angolo solido è una grandezza adimensionale, ma si usa indicarlo con una unità di misura che è lo **steradiante** (sr).

L'angolo solido totale è uguale a  $4\pi$  sr.



$$\Omega = \frac{S}{r^2}$$

### **Grandezze derivate dalla massa e dalla lunghezza.**

La densità di un corpo,  $\rho$ , esprime la massa contenuta nell'unità di volume. Per un corpo omogeneo essa è data da:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

L'equazione dimensionale si scrive:

$$[\rho] = [M][L^{-3}]$$

e si misura in kilogrammi per metro cubo ( $\text{Kg/m}^3$ ).

Quando una delle dimensioni è molto più piccola rispetto alle altre due ed è uniforme, come nel caso di una lastra, di un foglio, allora si può definire una densità superficiale,  $\sigma$ , che è uguale alla massa contenuta nell'unità di superficie. Per un corpo omogeneo essa è data da:

$$\sigma = \frac{m}{S}$$

L'equazione dimensionale si scrive:

$$[\sigma] = [M][L^{-2}]$$

e si misura in kilogrammi per metro quadro ( $\text{Kg/m}^2$ ).

Quando poi due delle dimensioni del corpo sono trascurabili rispetto alla terza ed uniformi, come nel caso di un

filo, di una sbarra, etc, allora si può definire una densità lineare,  $\rho$ , che è uguale alla massa contenuta nell'unità di lunghezza. Per un corpo omogeneo essa è data da:

$$\rho = \frac{m}{\ell}$$

L'equazione dimensionale si scrive:

$$[\rho] = [M][L^{-1}]$$

e si misura in kilogrammi per metro (Kg/m).

### **Grandezze derivate dal tempo.**

Come grandezza derivata dal tempo, considereremo la frequenza. Essa si riferisce ad un fenomeno periodico ed esprime il numero di cicli compiuti nell'unità di tempo. Se  $n$  è il numero di cicli compiuti nell'intervallo  $t$ , allora la frequenza  $f$  è data da:

$$f = \frac{n}{t}$$

Se  $t$  è proprio uguale al periodo  $T$  del fenomeno periodico allora  $n$  è uguale a 1, per cui si può anche scrivere:

$$f = \frac{1}{T}$$

L'equazione dimensionale della frequenza, tenuto conto che  $n$  è un numero, e quindi senza dimensioni, si scrive:

$$[f] = [T^{-1}]$$

Nel SI l'unità di misura della frequenza è chiamata hertz (Hz,  $1\text{Hz} = 1\text{s}^{-1}$ ).

### **Grandezze derivate dalla lunghezza e dal tempo.**

Abbiamo già incontrato una di queste grandezze: la velocità. Abbiamo definito la velocità media di un corpo in moto come lo spazio percorso diviso il tempo impiegato:

$$v = \frac{d}{t}$$

L'equazione dimensionale della velocità si scrive come:

$$[V] = [L][T^{-1}]$$

Nel SI la velocità si misura in metri al secondo (m/s).

Un'altra grandezza derivata dalla lunghezza e dal tempo è l'accelerazione.

Per dare un'idea delle prestazioni di una automobile, una delle caratteristiche che viene elencata è il tempo necessario per far passare la velocità della vettura da 0 a 100 Km/h, per vetture sportive questo tempo è al di sotto dei 10 s. L'accelerazione è una misura della rapidità con cui cambia la velocità. Essa è definita come:

$$a = \frac{v}{t}$$

dove  $v$  è la variazione di velocità subita nell'intervallo di tempo  $t$ .

L'equazione dimensionale è:

$$[a] = [v][T^{-1}] = [L][T^{-2}]$$

Nel SI l'accelerazione si misura in metri al secondo al quadrato ( $\frac{m}{s^2}$ ).

Nel caso di una vettura che passa da 0 a 100 Km/h in 10 s, l'accelerazione media è:

$$a = \frac{v}{t} = \frac{100\text{km}}{10\text{s}} = \frac{100 \times 1000\text{m}}{10\text{s}} = 2.78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

### **Risultato di una misura.**

Supponiamo di voler misurare la distanza tra due punti A e B. Basta disporre lo strumento di misura, in questo caso un metro graduato, sul segmento AB, facendo coincidere un estremo del segmento con l'inizio del metro graduato e poi leggere la posizione di B sul metro graduato. Per distanze di qualche metro, il metro graduato è suddiviso in decimetri, centimetri e poi in millimetri. Per cui se tra A e B ci sono 2 metri, più 1 decimetro, più 5 centimetri, più 2 millimetri, diremo che la distanza tra A e B è 2.152 m e scriveremo:

$$d_{AB} = 2.152 \text{ m}$$

Cioè indicheremo la distanza tra A e B con un numero seguito dall'unità di misura. *L'unità di misura è essenziale per specificare completamente il risultato di una misura ed è errore grave ometterla.*

Il fatto di rappresentare il risultato della misura con il numero 2.152 ha un suo preciso significato.

Ogni misura, infatti, è affetta da errore. Scrivere quindi che la distanza tra A e B è 2.152 m significa attribuire alla misura un errore dell'ordine del millimetro, così come scrivere 2.15 m significa attribuire alla misura un errore dell'ordine di 1 centimetro, mentre scrivere 2.1524 significa attribuire un errore dell'ordine del decimo di millimetro. Il numero delle cifre specificate viene detto numero di cifre significative (N.B. anche lo zero può essere una cifra significativa). Un millimetro, un centimetro, un decimo di millimetro rappresentano l'errore assoluto,  $\Delta_A$ , in ciascuno dei tre casi. Si definisce errore relativo,  $r$ , il rapporto tra l'errore assoluto e la misura.

$$r = \frac{\Delta_A}{\text{misura}}$$

Nei tre casi avremo:

Misura	Errore assoluto, $\Delta_A$	Errore relativo, $r$
2.152 m	0.001 m	0.0005 = 0.05%
2.15 m	0.01 m	0.005 = 0.5%
2.1524 m	0.0001 m	0.00005 = 0.005%



## Propagazione dell'errore

Bisogna fare attenzione quando si usano delle relazioni per calcolare grandezze derivate: la misura di una grandezza derivata non può avere un numero di cifre significative maggiore di quello delle grandezze fondamentali da cui dipende.

Bisogna distinguere due casi:

0. La grandezza derivata è uguale alla somma o alla differenza di altre grandezze. In questo caso va considerato l'errore assoluto: l'errore assoluto della grandezza derivata non può essere più piccolo del più grande degli errori assoluti delle singole grandezze da cui dipende. Esempio: sul tetto di una abitazione alta 5.34 m, è disposta un'asta, che funziona da parafulmine, lunga 0.754 m. Determinare l'altezza dal suolo dell'estremità superiore del parafulmine.

5.34 m + Altezza dell'edificio: l'errore in questo caso è di 0.01 m

0.754 m = Altezza della sbarra: l'errore è di 0.001 m

6.09 m \_ Altezza complessiva: l'errore è di 0.01 m, non può essere più piccolo del più grande degli errori.

Se la lunghezza dell'asta fosse stata misurata in maniera molto più approssimata, diciamo con un errore dell'ordine di 0.1 m, allora anche l'altezza complessiva avrà lo stesso errore.

5.34 m + Altezza dell'edificio: l'errore in questo caso è di 0.01 m

0.7 m = Altezza della sbarra: l'errore è di 0.1 m

6.0 m Altezza complessiva: l'errore è di 0.1 m, non può essere più piccolo del più grande degli errori.

0. La grandezza derivata si ottiene mediante operazioni di moltiplicazione o divisione da altre grandezze. In questo caso va considerato l'errore relativo: l'errore relativo della grandezza derivata non deve essere più piccolo dell'errore relativo delle singole grandezze da cui dipende. [L'errore relativo deve essere dello stesso ordine del più grande degli errori relativi]. Supponiamo di voler calcolare la velocità di una automobile che ha percorso 100 m in 9.0 s. Il risultato della divisione è 11.111111..... con un numero infinito di 1. Ma noi sappiamo dalla maniera con cui sono state specificate sia la distanza che l'intervallo di tempo, che l'errore sulle due misure è dell'ordine dell'1% (1 m su 100 m, 0.1 s su 9.0 s), per cui anche il risultato del rapporto non

può avere una precisione maggiore dell' 1 %<sup>(\*)</sup> . Si scriverà pertanto che la velocità è  $v=11.1 \text{ m/s}$  (0.1 m/s su 11.1 m/s 1 %).

### **Errori nelle misure.**

Abbiamo affermato che ogni misura è affetta da errore. Gli errori che si possono commettere nell'eseguire una misura si distinguono in due categorie: *errori sistematici* ed *errori casuali*.

Gli errori sistematici dipendono dallo strumento di misura e dal metodo di misura, essi si ripresentano sempre alla stessa maniera eseguendo più volte la stessa misura. Una volta scoperta la causa dell'errore sistematico, esso può essere corretto.

Facciamo un esempio. Vogliamo usare il contachilometri di una automobile per misurare la distanza tra due punti. Il contachilometri essenzialmente conta i giri delle ruote: moltiplicando il numero di giri per la circonferenza delle ruote si ottiene la distanza percorsa.

Questo prodotto viene fatto all'interno dello strumento assumendo un certo valore per la circonferenza della ruota, fissato al momento della taratura da parte del costruttore. Supponiamo ora che per rendere più stabile la vettura questa venga abbassata montando delle ruote di diametro più piccolo: essendosi ridotta la circonferenza della ruota, il contachilometri misurerà, per un certo percorso, un valore più elevato di quello effettivo. Fino a che sulla vettura ci saranno ruote più piccole, le misure dei percorsi saranno sempre più alti dei valori effettivi.

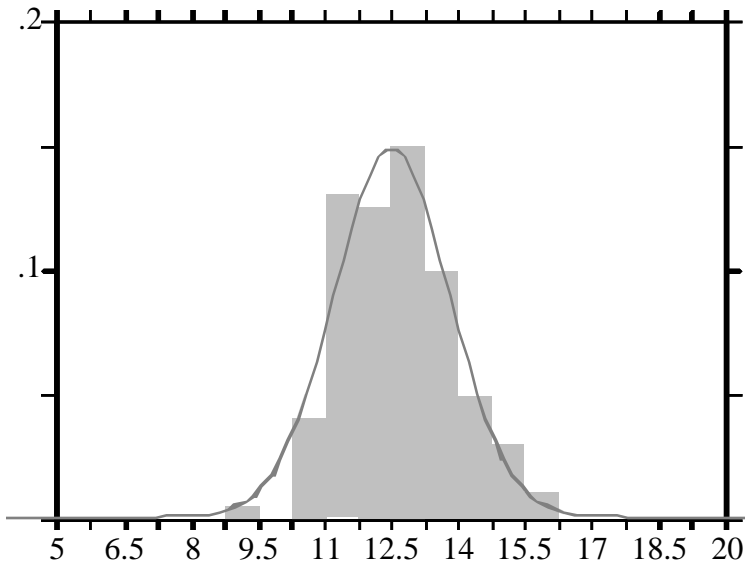
Per valutare l'entità dell'errore sistematico occorre ripetere la misura con uno strumento differente o impiegando un metodo diverso.

Gli errori casuali, a differenza di quelli sistematici, si presentano con un diverso valore ogni volta che si esegue una misura, e dipendono da tutti quei fattori che influenzano la misura in maniera casuale. Proprio a causa del fatto che l'errore casuale si manifesta ora in un senso ed ora in senso opposto, si può ottenere una stima più precisa della misura di una certa grandezza ripetendo più volte la misura e assumendo come risultato il valore medio delle  $n$  misure. L'errore in tal caso è ridotto di un fattore  $\sqrt{n}$  rispetto all'errore della singola misura.

---

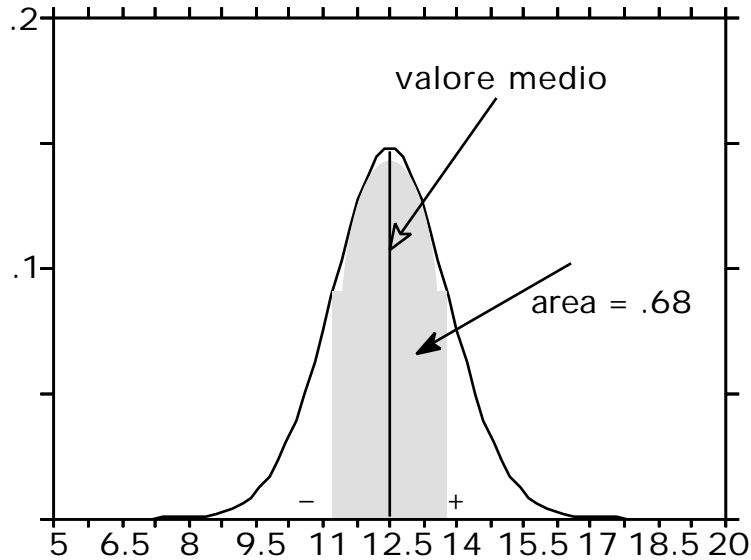
(\*) Nel caso considerato le due grandezze erano state misurate all'incirca con la stessa precisione. Nei casi in cui le due grandezze sono misurate con precisioni molto diverse, occorre ricordarsi che il risultato del rapporto non può avere una precisione migliore di ciascuna delle due determinazioni.

Distribuzione delle frequenze, media = 12.5



Se si riporta in un istogramma la distribuzione delle frequenze, il numero di volte la misura capita in un determinato intervallo, si ottiene, nell'ipotesi che gli errori siano veramente casuali, una tipica distribuzione a campana. (Nell'istogramma vengono riportati i valori delle frequenze diviso per l'ampiezza dell'intervallo  $x$ , in modo che l'area al di sotto dell'istogramma sia uguale a 1). Ovviamente la larghezza di tale distribuzione, che si indica con  $\sigma$ , dà una indicazione della precisione delle misure.

## Funzione gaussiana



Il significato di  $\sigma$  è il seguente: la probabilità che eseguendo una nuova misura il risultato differisca dal valore medio della distribuzione meno di  $\sigma$ , è del 68,3%. Tale probabilità sale al 95.5 % se si richiede che il risultato differisca dal valore medio meno di  $2\sigma$ , ad addirittura al 99.7% se si richiede che uno scarto più piccolo di  $3\sigma$ .

## **Il metodo scientifico.**

Da questa breve introduzione emerge che la conoscenza scientifica, dopo essere rimasta ferma per quasi due millenni sulle posizioni di Aristotele, ha subito negli ultimi 400 anni, da Galilei in poi, una brusca accelerazione che le ha consentito di progredire velocemente nella comprensione dei fenomeni naturali.

Questo travolgente successo è dovuto al metodo di indagine della Fisica moderna, introdotto appunto nel 1600 da Galilei.

**La fisica è una scienza sperimentale.** Essa cioè non si basa su speculazioni intellettuali, come accade per esempio per altre branche del pensiero umano: la filosofia, la teologia, la matematica, etc; ma la speculazione intellettuale per essere accettata deve superare la prova degli esperimenti.

Se due teorie spiegano una stessa classe di fenomeni, è molto facile in Fisica stabilire quale delle due è quella corretta. Se le due teorie non coincidono, ci sarà almeno un fenomeno naturale in cui le previsioni delle due teorie devono differire. Si eseguono degli esperimenti per studiare questo fenomeno: i risultati sperimentali consentiranno di ritenere una delle due teorie e di rigettare l'altra.

All'inizio del secolo la struttura atomica non era ancora ben compresa: uno dei modelli atomici, quello di Thompson, assumeva che la carica elettrica positiva era diffusa uniformemente all'interno del volume occupato dall'atomo ( $r \sim 10^{-10}$  m), e che gli elettroni fossero dispersi all'interno della carica positiva in maniera da rendere l'atomo globalmente neutro. Per testare questo modello Rutherford studiò il processo d'urto tra particelle alfa (nuclei dell'elio, aventi carica +2) ed atomi di oro e contò il numero di particelle alfa che rimbalzavano all'indietro sugli atomi di oro. Come dimostreremo studiando gli urti, le particelle alfa possono tornare all'indietro solo se si scontrano con una particella avente una massa più grande della propria. Nel modello di Thompson non è semplice immaginare come questo accumulo di massa possa prodursi: se si assume per l'atomo la struttura suggerita da Thompson non ci dovrebbero essere particelle alfa diffuse all'indietro. Rutherford invece contò un numero di particelle alfa diffuse all'indietro significativamente maggiore di quello atteso: questo risultato sperimentale suggeriva una struttura atomica in cui la massa e la carica positiva era concentrata nel nucleo ( $r_n \sim 10^{-15}$  m) con gli elettroni che si muovevano attorno al nucleo occupando il volume tipico dell'atomo ( $r_a \sim 10^{-10}$  m). L'esperimento di Rutherford permise anche di stimare le dimensioni del nucleo atomico che risultarono essere 5 ordini di grandezza più piccole di quelle atomiche.

In Fisica si distinguono due metodi di indagine, quello *induttivo* e quello *deduttivo*.

Nel primo caso, si parte dall'eseguire una serie di osservazioni sul fenomeno. Possibilmente esso viene ripetuto più volte in Laboratorio, cioè in una situazione controllata, che consente di variare a piacimento ciascuna delle grandezze fisiche che si pensa intervengano nello svolgimento del fenomeno. Si ottengono così una serie di

correlazioni tra le grandezze fisiche e sulla base di queste correlazioni possono essere formulate delle regole empiriche. Dalla osservazione di più fenomeni è possibile poi trovare delle relazioni più generali in grado di spiegare tutta una classe di fenomeni.

Un esempio di questo tipo di approccio è costituito dalla formulazione della legge di gravitazione universale da parte di Newton, che noi studieremo in dettaglio durante il corso.

L'astronomo Tycho Brahe eseguì una serie di misure sulla posizione dei pianeti riferita al sole. Sulla base di queste osservazioni, Keplero stabilì delle regole empiriche, le tre leggi che regolano il moto dei pianeti:

- i pianeti si muovono su orbite ellittiche.
- il segmento che congiunge il centro del sole con il centro del pianeta spazza aree uguali in tempi uguali.
- Il quadrato del periodo di rivoluzione è proporzionale al cubo della distanza media del pianeta dal sole.

Egli fornì così una descrizione cinematica del moto dei pianeti.

Più tardi Newton fornì anche la spiegazione dinamica, determinando la forza, la legge di gravitazione universale, che è responsabile del moto osservato da Keplero.

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r$$

Non solo questo: la legge di gravitazione universale è anche in grado di spiegare perché i corpi sulla terra cadono verso il basso (la famosa mela), un fenomeno che a prima vista non ha niente in comune con il moto dei pianeti.

Nell'altro tipo di approccio, quello deduttivo, si parte invece da qualche indizio di natura sperimentale, oppure da una intuizione dello scienziato circa il modo di comportarsi della natura, e si formula un modello che riesca a spiegare tutta una serie di fenomeni. Sulla base del modello si possono formulare delle leggi che poi possono essere verificate sperimentalmente.

Nel caso della teoria della relatività ristretta, Einstein partì dall'osservazione sperimentale che la velocità della luce aveva lo stesso valore per tutti gli osservatori anche in moto uniforme tra loro. Dalla esperienza quotidiana sappiamo che la velocità di una automobile misurata da un osservatore fermo sul ciglio della strada, differisce da quella misurata da un osservatore a bordo di un'altra vettura che si muova, per esempio, nella stessa direzione: per quest'ultimo l'automobile appare quasi ferma. All'inizio del secolo si pensava che la luce dovesse comportarsi come l'automobile: la sua velocità avrebbe dovuto essere diversa a seconda dello stato di moto dell'osservatore. In particolare ci si aspettava che un raggio di luce si dovesse comportare in maniera diversa se inviato nella stessa

direzione della velocità orbitale della terra o se inviato in una direzione perpendicolare a questa. Michelson e Morley eseguirono un esperimento in cui non osservarono la differenza prevista. Se ne dedusse pertanto che la velocità della luce è la stessa rispetto a tutti gli osservatori anche se in moto relativo uniforme tra loro. Partendo da questo fatto sperimentale, Einstein sviluppò la teoria della relatività ristretta: stabilì cioè delle regole di trasformazione che collegavano le misure di grandezze effettuate da un osservatore con quelle effettuate da un secondo osservatore in moto uniforme rispetto al primo. Queste regole di trasformazione erano caratterizzate dal fatto che la velocità della luce misurata dai due osservatori era la stessa. Da questa teoria derivano un certo numero di previsioni, in particolare viene stabilita l'equivalenza tra massa ed energia, che poi è stata verificata sperimentalmente negli esperimenti di fissione dell'uranio, o di fusione dei nuclei leggeri.

## ***Universalità delle leggi fisiche.***

In questo secolo, macchine costruite dall'uomo sulla base delle leggi fisiche determinate sulla terra, hanno viaggiato per tutto il sistema solare ed addirittura al di fuori di esso, inviando a terra una grande quantità di dati e continuando a funzionare secondo le specifiche di progetto, anche a grande distanza dalla terra.

Questi successi forniscono una conferma che le leggi della fisica, determinate studiando fenomeni che avvengono sulla terra, sono, in realtà, leggi universali: valgono allo stesso modo in questa stanza così come al centro della più remota galassia. Ovviamente, oltre ai satelliti artificiali, esistono altre prove della universalità delle leggi della Fisica.

Ma questo non è tutto. I fisici, oltre a pretendere che un certo fenomeno pur avvenendo in punti diversi dello spazio sia descritto sempre dalle stesse leggi, pretendono anche che uno stesso fenomeno sia regolato sempre dalle stesse leggi anche se avviene in tempi diversi: all'epoca della formazione delle galassie, ai nostri giorni, ma anche nel futuro tra cento o mille anni.

C'è però un'osservazione da fare: una teoria fisica, o una legge fisica non va considerata eterna. Infatti, può capitare che i risultati di un nuovo esperimento non siano descrivibili con la teoria: allora essa deve essere abbandonata o modificata. Per esempio la meccanica classica fornisce una descrizione corretta del moto dei corpi finché le loro velocità sono molto più piccole di quella della luce. Quando le velocità si avvicinano a quelle della luce, la meccanica classica fallisce, per cui deve essere sostituita con la meccanica relativistica.

Una qualsiasi teoria fisica, anche la più bella, può dunque risultare incompleta: il fisico deve vivere mantenendo intatta la capacità di criticare quelle teorie che ha usato con fiducia fino al giorno prima.

Vivere in questo modo è veramente difficile. Cambiamenti nel modo di pensare, richiedono, infatti, una grande dose di immaginazione e possono risultare realmente rivoluzionari.

Oggi noi siamo abituati a guardare al sistema solare come ad un insieme di pianeti che ruotano intorno al sole, ma pensate a ciò che accadde quando Copernico propose il suo sistema eliocentrico e quanti traumi produsse l'abbandono della "certezza" che terra fosse il centro dell'universo.

In un mondo in cui non esiste nessun tipo di moto (terrestre) che si mantenga perennemente se non alimentato in qualche modo, pensate a quanto rivoluzionaria sia stata la formulazione da parte di Galilei del principio di inerzia e cioè che "un corpo non soggetto a forze conserva il suo stato di moto rettilineo uniforme o di quiete". E' chiaro che sia la visione galileiana (i moti sulla terra sono rallentati da forze di attrito) che quella precedente, aristotelica (per mantenere in moto un corpo occorre applicare una forza) sono perfettamente equivalenti. La differenza tra i due diversi modi di interpretare i fenomeni, sta in quello che può essere dedotto a partire dall'assunzione iniziale. Il principio di inerzia formulato da Galilei ha consentito lo sviluppo della meccanica classica.



### **Unità di misura nelle espressioni algebriche.**

Le unità di misura in una espressione algebrica si comportano come un qualsiasi termine dell'espressione: si può moltiplicare o dividere per una unità di misura, si possono semplificare delle unità di misura, passare all'altro membro, etc.

Per esempio: Vogliamo calcolare la distanza percorsa da un'automobile che ha viaggiato per 3 h (ore) alla velocità di 60 Km/h.

$$v = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \qquad t = 3 \text{ h}$$

$$d = vt = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times 3\text{h} = 180\text{km}$$

l'ora (h) a numeratore si semplifica con quella a denominatore e il risultato risulta espresso, correttamente, in Km.

### **Cambiamento delle unità di misura.**

Supponiamo di voler convertire una misura in pollici in una in cm.

Calcolare in cm la diagonale dello schermo di un televisore da 22" ("=pollici). 22 è proprio la misura in pollici della diagonale dello schermo.

Sappiamo anche che  $1" = 2.54 \text{ cm}$ .

$$22" = 22 \times 1" = 22 \times 2.54 \text{ cm} = 55.88 \text{ cm}$$

Convertire la velocità di  $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  in metri al secondo (m/s).

$$v = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 60 \frac{1\text{km}}{1\text{h}}$$

Ricordando che  $1 \text{ Km} = 1000 \text{ m}$  e  $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$

e sostituendo, si ottiene:

$$v = 60 \frac{1\text{km}}{1\text{h}} = 60 \frac{1000\text{m}}{3600\text{s}} = \frac{600}{36} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 16.7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

### ***Equazioni dimensionali.***

Se la grandezza A può essere derivata dall'espressione

$$A = B + C + D + \dots$$

occorre che i termini dell'espressione abbiano tutti le stesse dimensioni, che sono poi le dimensioni di A. Per esempio, nel moto rettilineo uniformemente accelerato, lo spazio percorso a partire da una certa posizione iniziale  $x_0$  si può esprimere come:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

dove  $v_0$  è la velocità al tempo  $t=0$  e  $a$  è l'accelerazione.

Tutti i termini dell'espressione di  $x$  devono avere le stesse dimensioni.

$x$  è una lunghezza ed indicheremo le sue dimensioni con  $[L]$ .

Anche  $x_0$  è una lunghezza, quindi indicheremo le sue dimensioni con  $[L]$ .

Il secondo termine  $v_0 t$  ha dimensioni  $[v] [T]$ , ma le dimensioni di  $v = \frac{d}{t}$  sono  $[v] = [L] [T^{-1}]$ . Il secondo termine

ha quindi dimensioni  $[L] [T^{-1}] [T] = [L]$ .

Il terzo termine, tenendo conto che le dimensioni di  $a$  sono

$$[a] = [v] [T^{-1}] = [L] [T^{-1}] [T^{-1}] = [L] [T^{-2}],$$

ha dimensioni  $[a] [T^2] = [L] [T^{-2}] [T^2] = [L]$ .

Quindi tutti e tre i termini hanno le stesse dimensioni.

$$[L] = [L] + [L] + [L]$$

Questa proprietà può essere usata per verificare la consistenza di una relazione tra grandezze. Supponiamo che, durante la risoluzione di un problema, sorga il dubbio se la distanza percorsa sia data dal prodotto di  $v$  per  $t$  o dal rapporto di  $v$  per  $t$ . Ossia

$$d = vt \quad \text{oppure da} \quad d = \frac{v}{t}$$

Scriviamo le equazioni dimensionali per le due espressioni:

$$[L] = [L] [T^{-1}] [T] = [L] \quad [L] = [L] [T^{-1}] [T^{-1}] = [L][T^{-2}]$$

Quindi la prima delle due espressioni è corretta, la seconda no.

E' possibile anche ricavare la dipendenza di una grandezza fisica da altre grandezze da cui si suppone possa dipendere basandosi soltanto sulle equazioni dimensionali.

Supponiamo di voler ricavare la dipendenza il tempo impiegato da un grave a cadere da una altezza  $h$ . E' noto che un corpo pesante (grave), lasciato da una certa altezza, cade lungo la verticale.

Le grandezze in gioco sono:

- la distanza percorsa  $h$
- il tempo trascorso dall'inizio del moto  $t$
- un'altra grandezza potrebbe essere la massa  $m$  del corpo

- ed infine bisogna tenere conto che il moto avviene in vicinanza della terra. Di questo si tiene conto introducendo l'accelerazione di gravità  $g$ . Essendo una accelerazione,  $g$  ha dimensioni  $[L][T^{-2}]$  e vale  $9.81 \frac{m}{s^2}$ .

Posso scrivere:  $t = k m^x g^y h^z$  dove  $k$  è una costante adimensionale che il metodo non riesce a determinare,  $x, y, z$  sono invece gli esponenti da determinare. Applichiamo l'equazione dimensionale:

$$[T] = [M^x] [LT^{-2}]^y [L^z] = [M^x L^{y+z} T^{-2y}]$$

Perché l'equazione sia soddisfatta occorre che:

$x=0$	$x=0$
$-2y=1$	$y = -1/2$
$y+z=0$	$z = -y=1/2$

La dipendenza cercata allora è  $t = k g^{-0,5} h^{0,5}$ . In effetti la dipendenza corretta è  $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ .

**Secondo esempio:** Determinare il periodo  $t$  di un pendolo costituito da un corpo di massa  $m$  sospeso ad un filo di lunghezza  $l$ .

Come prima  $t = k m^x g^y l^z$  con  $k$  costante adimensionale.

L'equazione dimensionale si scrive:

$$[T] = [M^x] [LT^{-2}]^y [L^z] = [M^x L^{y+z} T^{-2y}]$$

che è soddisfatta se:

$$x = 0$$

$$-2y = 1$$

$$y+z = 0$$

$$y = -\frac{1}{2}$$

$$z = -y = \frac{1}{2}$$

La dipendenza cercata allora è  $t = k\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ . In effetti la dipendenza corretta è  $t = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ .

## Sistemi di riferimento.

Il primo argomento che affronteremo nello studio della fisica, riguarda il moto dei corpi.

Cosa si intende per moto? Come si può descrivere il moto di un corpo?

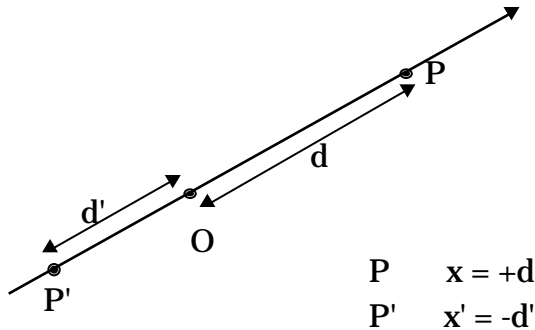
Intanto possiamo osservare che il moto è un concetto relativo, nel senso che per parlare di moto di un corpo bisogna specificare rispetto a che cosa il corpo varia la sua posizione.

Dobbiamo quindi sviluppare un formalismo che ci consenta di specificare la posizione di un corpo rispetto ad un altro, per essere poi in grado di poter descrivere come varia tale posizione.

Per definire la posizione di un punto nello spazio useremo un sistema di riferimento cartesiano, ed useremo anche le regole della geometria euclidea, come il teorema di Pitagora, le formule della trigonometria, etc... Finora non ci sono evidenze che la geometria euclidea non dia una buona descrizione del mondo fisico.

## Posizione di un punto su di una retta.

Per rappresentare la posizione di un punto su di una retta si sceglie in maniera arbitraria un punto della retta, O, come origine del riferimento e si fissa sempre in maniera arbitraria un verso sulla retta (retta orientata, asse orientato).



Utilizzando la definizione operativa della lunghezza si può misurare la distanza tra l'origine O ed il generico punto sulla retta: sia  $d$  per il punto P e  $d'$  per il punto P'.

Si assegna al punto la coordinata  $x$  uguale alla distanza da O presa con il segno *più* (+) se il punto viene dopo O quando la retta viene percorsa nel verso fissato, con il segno *meno* (-), se il punto viene prima di O quando la retta viene percorsa nel verso fissato. (Nel caso della figura, la coordinata di P è positiva, quella di P' è negativa.)

## Posizione di un punto nel piano. Rappresentazione cartesiana.

Per specificare la posizione di un punto in un piano si può introdurre un sistema cartesiano formato da due assi orientati perpendicolari tra loro, l'asse  $x$  e l'asse  $y$ . Le origini sui due assi orientati vengono fissate in maniera da coincidere con il loro punto di intersezione. Inoltre l'orientazione dell'asse  $y$  viene scelta in modo che l'asse  $x$  per sovrapporsi all'asse  $y$  deve essere ruotato di  $90^\circ$  in senso antiorario.

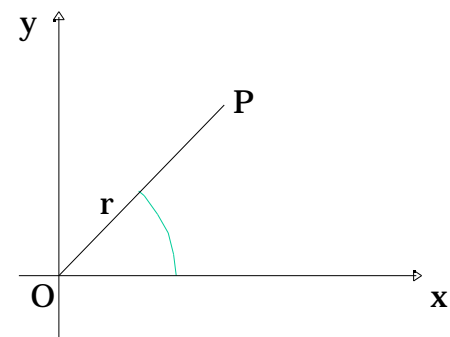
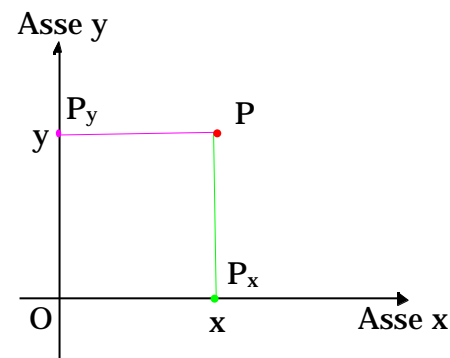
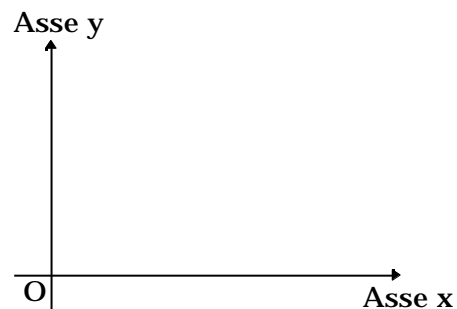
La posizione di un generico punto  $P$  del piano può essere descritta specificando la coppia ordinata  $(x,y)$ , in cui  $x$  rappresenta la posizione del punto proiezione  $P_x$  sull'asse  $x$  (determinata utilizzando la definizione precedentemente data di posizione di un punto su una retta) e, in maniera analoga,  $y$  rappresenta la posizione del punto proiezione  $P_y$  sull'asse  $y$ . (I punti proiezione  $P_x$  e  $P_y$  sugli assi  $x$  e  $y$  possono essere determinati in maniera univoca mandando da  $P$  le perpendicolari rispettivamente all'asse  $x$  e all'asse  $y$ .)

### Posizione di un punto nel piano. Rappresentazione polare.

Una maniera alternativa per rappresentare la posizione del punto  $P$  nel piano è quella di specificare la coppia ordinata  $(r, \theta)$  in cui  $r$  è la distanza di  $P$  dall'origine  $O$  e  $\theta$  è l'angolo che la retta passante per  $O$  e  $P$  ed orientata da  $O$  a  $P$  forma con un asse orientato arbitrariamente scelto nel piano, per esempio l'asse  $x$ .

L'angolo, espresso in radianti, è positivo se l'asse di riferimento, nel nostro caso l'asse  $x$ , deve essere ruotato in senso antiorario per sovrapporlo alla retta orientata passante per  $O$  e  $P$ , negativo in caso contrario.

Le due rappresentazioni cartesiane ( $P(x,y)$ ) e polare ( $P(r, \theta)$ ), sono ovviamente equivalenti. Valgono infatti le seguenti relazioni per passare dall'una all'altra delle due rappresentazioni.



$$x = r \cos$$

$$y = r \sin$$

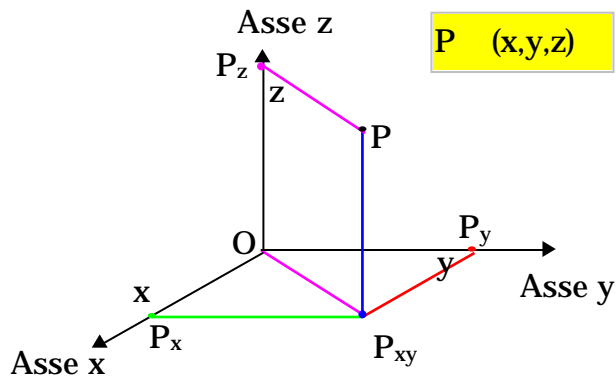
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \arctan g \frac{y}{x} \quad \text{se } x > 0 \quad (*)$$

$$= \arctan g \frac{y}{x} + \quad \text{se } x < 0$$

### Posizione di un punto nello spazio. Rappresentazione cartesiana.

Per specificare la posizione di un punto nello spazio introduciamo una terna di riferimento cartesiana, costituita da tre assi orientati,  $x, y, z$ , ortogonali tra di loro. In particolare useremo una terna destrorsa, cioè con l'asse  $x$  disposto secondo il pollice, l'asse  $y$  secondo l'indice, e quello  $z$  secondo il medio della mano destra. La posizione del generico punto  $P$  nello spazio sarà determinata dalle coordinate dei punti proiezione sugli assi orientati  $x, y$  e  $z$ .



Per determinare i punti proiezione sugli assi cartesiani si manda da  $P$  la **parallela** all'asse  $z$  fino ad incontrare il piano  $xy$ : si determina così il punto  $P_{xy}$  proiezione di  $P$  sul piano  $xy$ . Si congiunge con un **segmento** l'origine  $O$  con il punto  $P_{xy}$ : la proiezione di  $P$  sull'asse  $z$ ,  $P_z$ , si determina mandando da  $P$  un **segmento parallelo** al segmento  $OP_{xy}$ . La proiezione  $P_x$  di  $P$  sull'asse  $x$  si determina mandando da  $P_{xy}$  la **parallela** all'asse  $y$  fino ad intersecare l'asse  $x$ , mentre la proiezione  $P_y$  di  $P$  sull'asse  $y$  si determina mandando da  $P_{xy}$  la **parallela** all'asse  $x$  fino ad intersecare l'asse  $y$ .

(\*) Si osservi che l'arcotang fornisce un angolo compreso tra  $-90^\circ$  e  $+90^\circ$ , l'angolo invece può assumere tutti i valori tra  $0$  e  $360^\circ$ . Per ottenere il valore corretto dell'angolo occorre guardare al segno di  $x$ : se  $x$  è positivo il valore dell'angolo è quello fornito dall'arcotang; se invece  $x$  è negativo allora al valore ottenuto dall'arcotang occorre sommare  $180^\circ$ .



# Grandezze vettoriali

## **Vettore spostamento.**

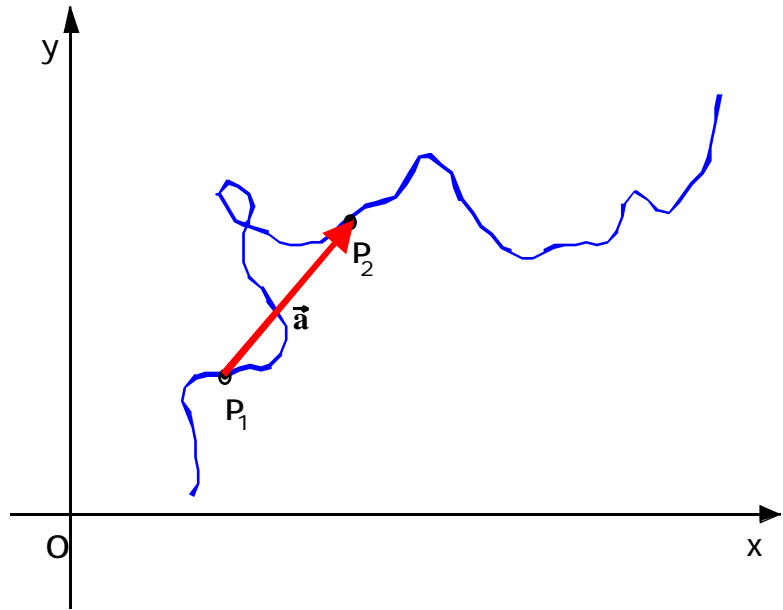
Supponiamo di avere un piano, di introdurre un sistema di assi cartesiani,  $x$  e  $y$ , e di avere un insetto, per esempio una formica, che si muova sul piano.

L'insieme delle posizioni via via occupate dalla formica man mano che passa il tempo si chiama "*traiettoria*", rappresentata dalla curva nel disegno.

Se la formica ad un certo istante di tempo  $t_1$  si trovava nella posizione  $P_1$  e all'istante  $t_2$ , nella posizione  $P_2$ : indichiamo con  $s$  il "*percorso effettuato*" dalla formica nell'intervallo di tempo  $[t_1, t_2]$ . Osserviamo però che questa grandezza, il "*percorso effettuato*", non contiene molte informazioni. Infatti se si conosce la posizione iniziale  $P_1$ , il "*percorso effettuato*"  $s$  nell'intervallo di tempo  $[t_1, t_2]$ , è possibile determinare la posizione finale solo se è nota la traiettoria seguita dalla formica.

Il moto della formica nell'intervallo di tempo  $[t_1, t_2]$  può essere anche rappresentato attraverso il **vettore spostamento** che corrisponde al segmento orientato dal punto di partenza  $P_1$  al punto di arrivo  $P_2$ . Si dirà allora che nell'intervallo di tempo  $[t_1, t_2]$  la formica ha subito uno spostamento da  $P_1$  a  $P_2$ . Lo

spostamento è, perciò, caratterizzato da un **modulo** (la distanza tra  $P_1$  a  $P_2$ ), una **direzione**, (quella della retta

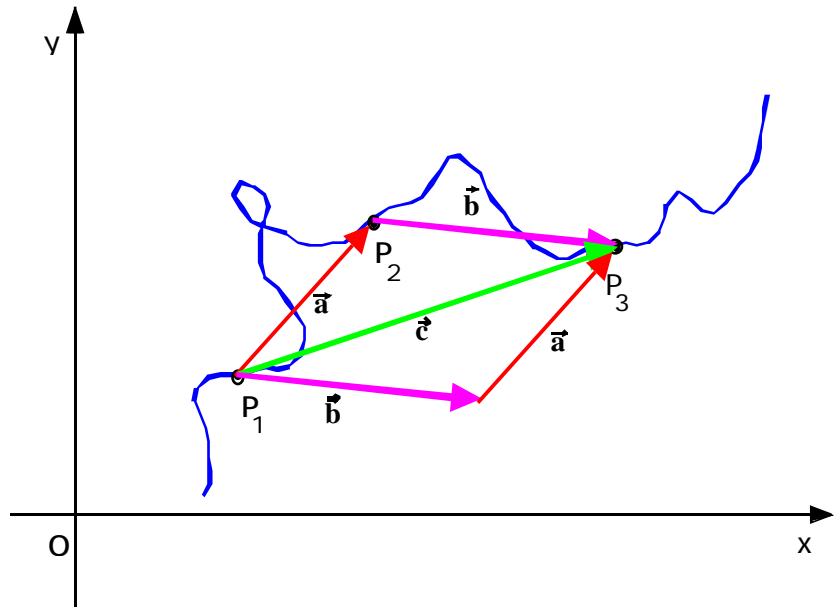


passante per  $P_1$  e  $P_2$ ), e un *verso*, (quello da  $P_1$  a  $P_2$ ). Indicheremo lo spostamento con uno dei simboli comunemente usati per rappresentare un vettore, per esempio  $\vec{a}$ . (E' facile notare che se si conosce la posizione iniziale e lo spostamento subito dalla formica nell'intervallo  $[t_1, t_2]$ , è facile predire la posizione finale senza la necessità di conoscere la traiettoria seguita dalla formica).

### **Regola della somma di due spostamenti.**

Supponiamo ora che la formica, continuando a spostarsi sul piano, all'istante  $t_3$  si trovi nella posizione  $P_3$ . Nell'intervallo  $[t_2, t_3]$  lo spostamento è dato dal segmento orientato  $P_2P_3$ , che indichiamo con  $\vec{b}$ . Lo spostamento complessivo subito dalla formica nell'intervallo  $[t_1, t_3]$ , cioè la somma di  $\vec{a} + \vec{b}$ , è dato dal segmento orientato  $P_1P_3$  che indichiamo con  $\vec{c}$ .

La somma dei due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  si ottiene graficamente come mostrato in figura, cioè riportando il vettore  $\vec{b}$  a partire dall'estremo del vettore  $\vec{a}$  (o equivalentemente riportando il vettore  $\vec{a}$  a partire dall'estremo del vettore  $\vec{b}$ ): la somma dei due vettori si otterrà congiungendo il punto iniziale del vettore  $\vec{a}$  con il punto estremo del vettore  $\vec{b}$  (o equivalentemente congiungendo il punto iniziale del vettore  $\vec{b}$  con il punto estremo del vettore  $\vec{a}$ ). Questa regola di somma va sotto il nome di **regola del parallelogramma**. Il vettore somma è infatti dato dalla diagonale del parallelogramma avente per lati i vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ .



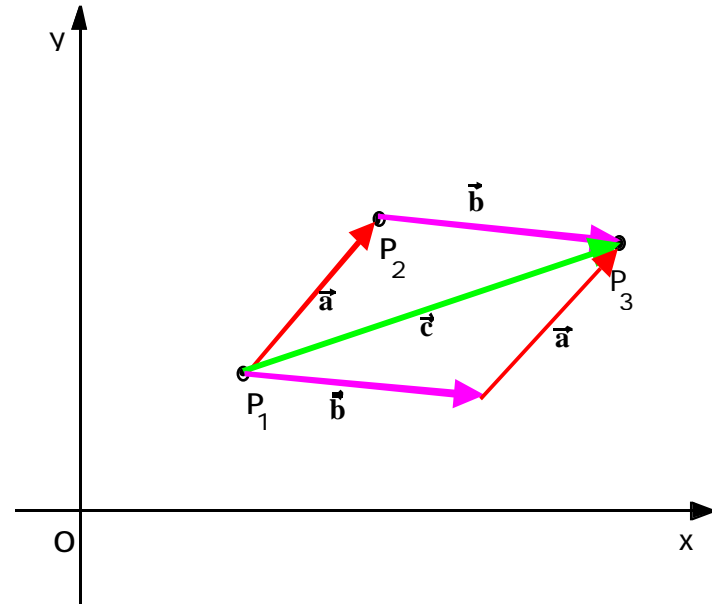
Conseguenza immediata della regola del parallelogramma è che la somma di due vettori è commutativa, cioè:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

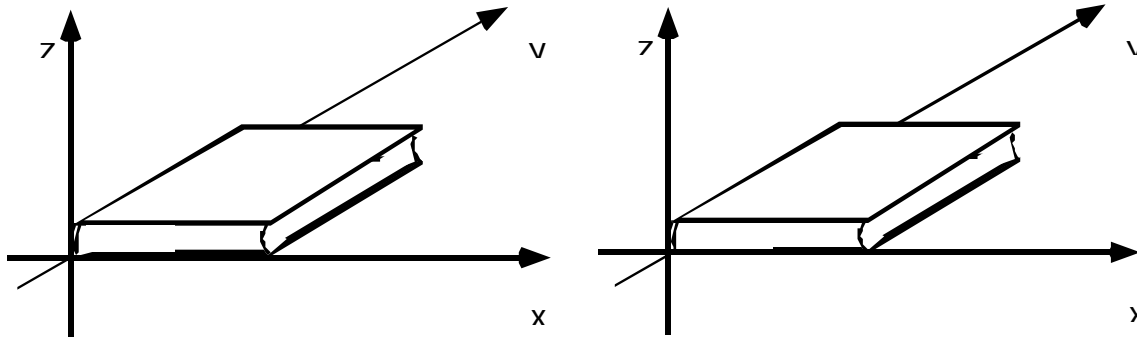
Si dicono *vettoriali* quelle grandezze che sono rappresentabili con *un modulo, una direzione ed un verso* e che si sommano con la regola del parallelogramma. (Nel seguito rappresenteremo le grandezze vettoriali con una lettera in grassetto, con sovrapposta una freccia.) Grandezze vettoriali, oltre allo spostamento, sono la velocità, l'accelerazione, la forza, la quantità di moto, il campo elettrico, il campo magnetico, etc. Abbiamo già visto come lo spostamento possa essere rappresentato come un segmento orientato. Anche le altre grandezze vettoriali, pur non avendo le dimensioni di una lunghezza, possono essere rappresentate graficamente con un segmento orientato di lunghezza proporzionale al modulo del vettore. Quelle grandezze che invece sono rappresentabili solo con un numero, come la massa, il tempo, il lavoro, l'energia, la temperatura, il volume, la pressione, etc., si diranno *scalari*.

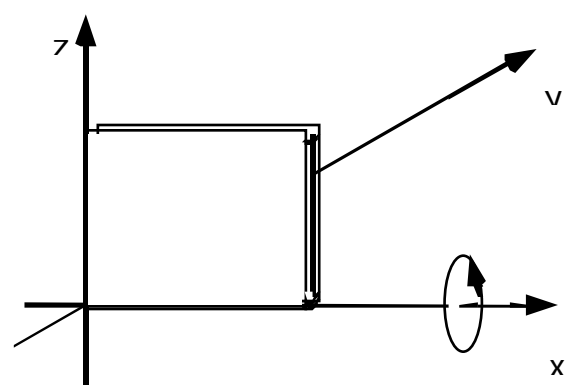
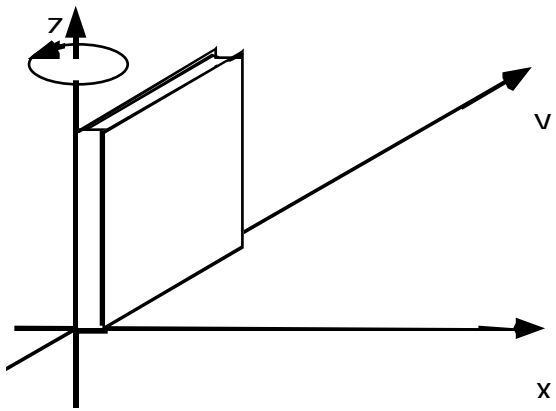
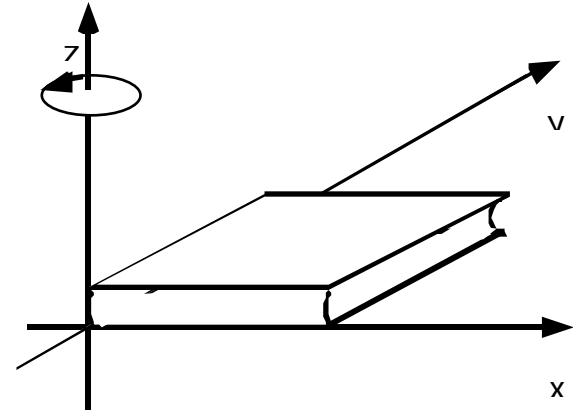
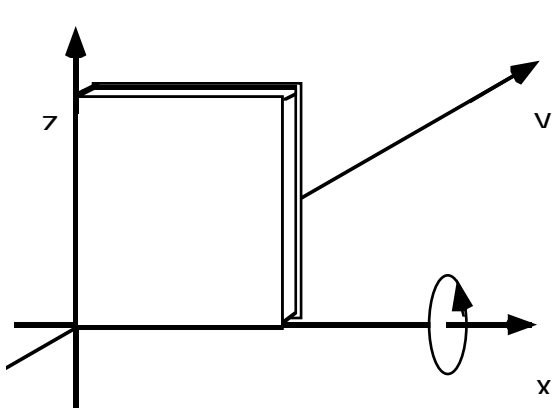
Non tutte le grandezze rappresentabili con un modulo, una direzione e un verso sono dei vettori, cioè si sommano con la regola del parallelogramma. Un esempio sono le rotazioni. Una rotazione può essere rappresentata con

un modulo:	l'angolo di rotazione
una direzione:	quella dell'asse di rotazione
un verso:	verso positivo sull'asse di rotazione per una rotazione in senso antiorario, negativo per una in senso orario.



Però le rotazioni finite non si sommano secondo la regola del parallelogramma, infatti non sono commutative. Prendete un libro, assumete un sistema di riferimento con l'asse  $x$  lungo il bordo inferiore, l'asse  $y$  lungo il dorso, e l'asse  $z$  uscente dalla copertina e provate ad eseguire due rotazioni successive di  $90^\circ$ , una rispetto all'asse  $x$  e l'altra rispetto all'asse  $z$ . Osserverete che il risultato è diverso se si effettua prima la rotazione rispetto all'asse  $x$  o quella rispetto all'asse  $z$ . Quindi le rotazioni non soddisfano la regola del parallelogramma e non sono rappresentabili con dei vettori. Tuttavia si può osservare che la differenza tra i due stati finali, che si ottengono invertendo l'ordine delle due rotazioni, è tanto più piccola quanto più piccola è l'ampiezza delle due rotazioni: i due stati finali infatti coincidono se le due rotazioni sono infinitesime. Le rotazioni infinitesime commutano, obbediscono cioè alla regola del parallelogramma, e quindi si comportano come vettori.





### **Proprietà della somma tra vettori.**

Abbiamo già sottolineato che la somma di due vettori gode della proprietà commutativa, cioè:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

proprietà che deriva direttamente dalla regola di somma del parallelogramma.

Sempre mediante una rappresentazione geometrica, possiamo verificare che la somma tra vettori gode della proprietà associativa:

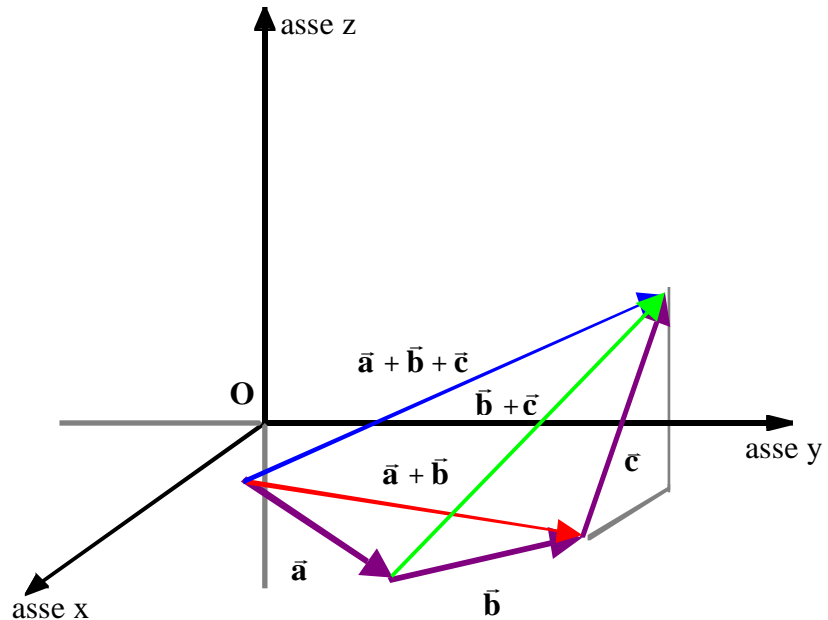
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

e della proprietà distributiva:

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

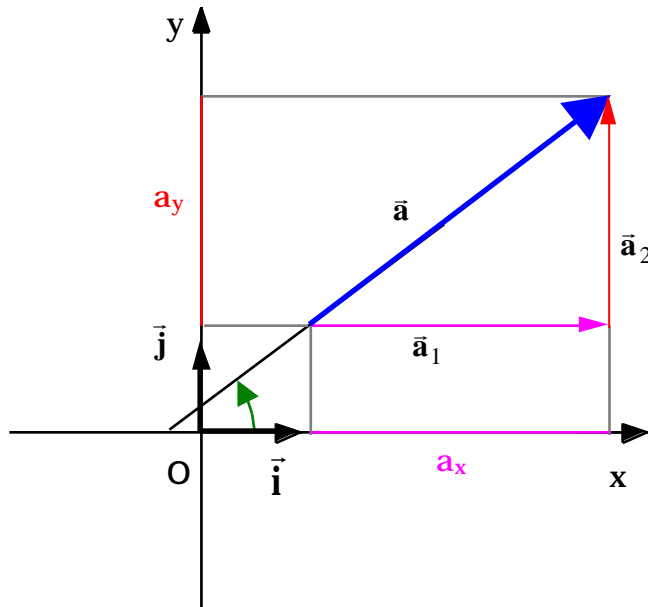
L'elemento neutro della somma è il vettore nullo  $\vec{0}$  che ha modulo uguale a zero, direzione e verso indeterminati. La somma di un vettore e del vettore nullo è uguale al vettore stesso.

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$



## Componenti di un vettore.

Consideriamo il vettore  $\vec{a}$ , giacente nel piano xy: possiamo pensare di ottenere  $\vec{a}$  come somma di due vettori  $\vec{a}_1$  e  $\vec{a}_2$ , il primo parallelo all'asse delle x, il secondo parallelo all'asse delle y. I due vettori  $\vec{a}_1$  e  $\vec{a}_2$  sono pertanto mutuamente ortogonali.



$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

Si definiscono componenti cartesiane del vettore  $\vec{a}$  i due scalari  $a_x$  e  $a_y$  che sono le proiezioni di  $\vec{a}$  sull'asse x e sull'asse y rispettivamente.

In particolare  $a_x$  è uguale al modulo di  $\vec{a}_1$  preso con il segno positivo se  $\vec{a}_1$  è diretto secondo l'asse x, con il segno negativo se  $\vec{a}_1$  è diretto in verso opposto a quello dell'asse x. In maniera analoga  $a_y$  è positivo se  $\vec{a}_2$  è diretto secondo l'asse y, negativo se diretto in verso opposto.

Se  $\alpha$  è l'angolo che il vettore  $\vec{a}$  forma con l'asse x ed  $a$  è il modulo di  $\vec{a}$ , allora le due componenti cartesiane  $a_x$  e  $a_y$  possono essere ottenute attraverso

$$a_x = a \cos \alpha$$

$$a_y = a \sin \alpha$$

Si osservi che le due espressioni precedenti determinano correttamente anche i segni delle componenti.

Se invece sono note le componenti cartesiane del vettore  $(a_x, a_y)$ . Ovviamente le due rappresentazioni sono equivalenti: le relazioni per passare da una rappresentazione all'altra sono date da:

$$a_x = a \cos$$

$$a_y = a \sin$$

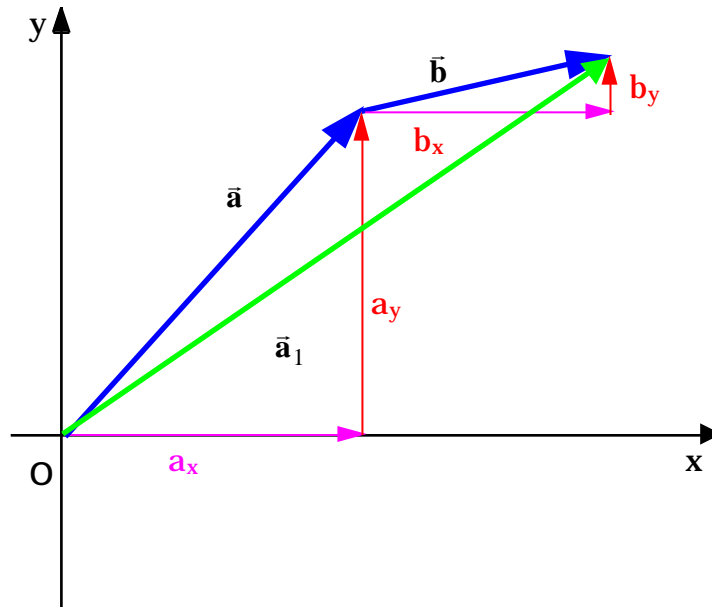
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$\text{tang} = \frac{a_x}{a_y}$$

Da notare che mentre i vettori sono indipendenti dal sistema di coordinate usato, le componenti del vettore hanno significato solo se si specifica il sistema di coordinate usato: per un sistema diverso, esse sono diverse.

### *Somma di due vettori utilizzando le componenti cartesiane.*

Supponendo di voler sommare i due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ .



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

Come già sappiamo il vettore somma  $\vec{c}$  si ottiene con la regola del parallelogramma (vedi figura). Sempre dalla figura è facile rendersi conto che la componente x del vettore somma,  $c_x$ , è data dalla somma delle componenti x dei vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , rispettivamente  $a_x$  e  $b_x$ . In maniera analoga può essere ottenuta la componente y. In conclusione:

$$c_x = (a_x + b_x)$$

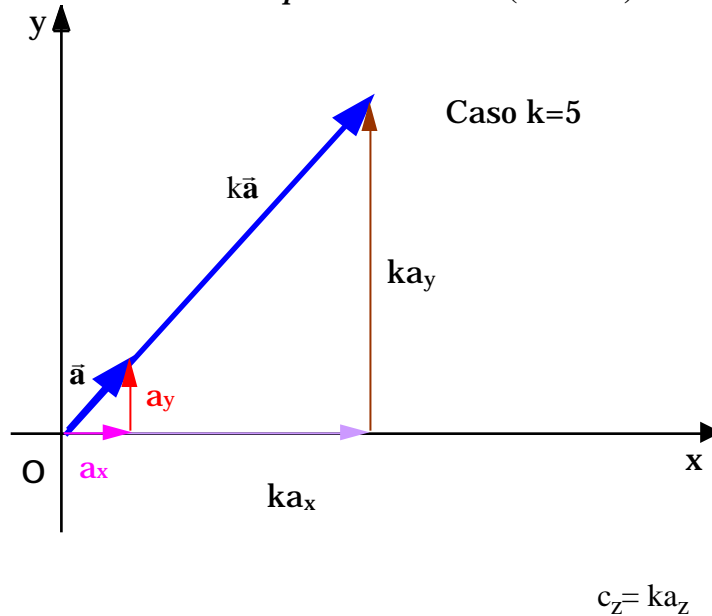
$$c_y = (a_y + b_y)$$

Se anziché essere nel piano, fossimo stati nello spazio, allora ci sarebbe stata anche la terza componente, z, cioè

$$c_z = (a_z + b_z)$$



**Prodotto di uno scalare per un vettore (  $\vec{c} = k\vec{a}$  ).**



Il risultato del prodotto di uno scalare  $k$  per un vettore  $\vec{a}$  è ancora un vettore che ha la stessa direzione del vettore  $\vec{a}$ , lo stesso verso se  $k$  è positivo, verso opposto se  $k$  è negativo, e modulo pari a  $|k|$  volte il modulo di  $\vec{a}$ . Se  $k$  non è un numero puro, ma ha delle dimensioni, allora  $\vec{c}$  rappresenta una grandezza diversa da quella rappresentata da  $\vec{a}$  (per es. se  $\vec{a}$  rappresenta una accelerazione e  $k$  è una massa, allora  $\vec{c}$  è una forza).

Dal punto di vista delle componenti, facendo riferimento alla figura si vede che:

$$c_x = ka_x$$

$$c_y = ka_y$$

Per vettori nello spazio occorre tener conto anche della terza componente,  $z$ ,

$$c_z = ka_z$$

### *Differenza tra due vettori $\vec{a} - \vec{b}$ .*

Dalla definizione di prodotto di uno scalare per un vettore ricaviamo che il vettore  $-\vec{b}$  è un vettore che ha lo stesso modulo e direzione del vettore  $\vec{b}$  ma verso opposto.

La differenza tra due vettori,  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , si interpreta come la somma di  $\vec{a}$  col vettore  $-\vec{b}$ , cioè:

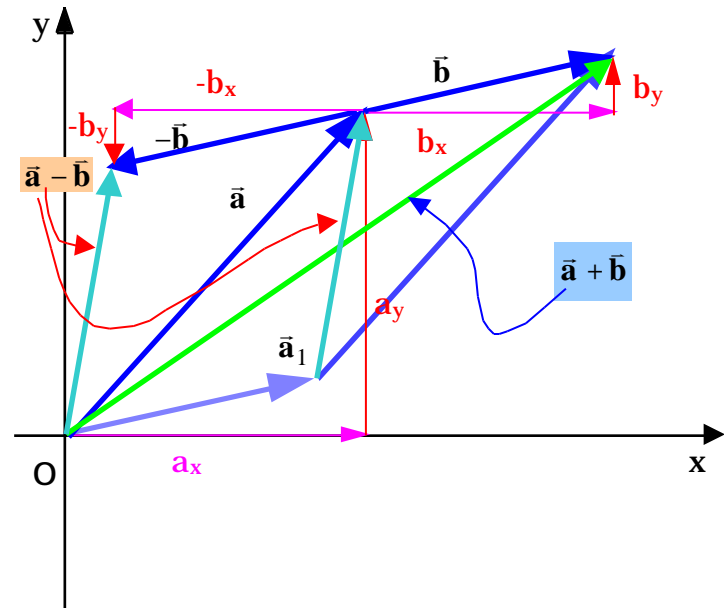
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

La differenza tra due vettori coincide con l'altra diagonale del parallelogramma costruito con i due vettori (l'altra diagonale è la somma). Utilizzando le componenti cartesiane:

$$(\vec{a} - \vec{b})_x = a_x - b_x$$

$$(\vec{a} - \vec{b})_y = a_y - b_y$$

$$(\vec{a} - \vec{b})_z = a_z - b_z$$



### ***Versori.***

I vettori adimensionali di modulo unitario si chiamano ***versori***.

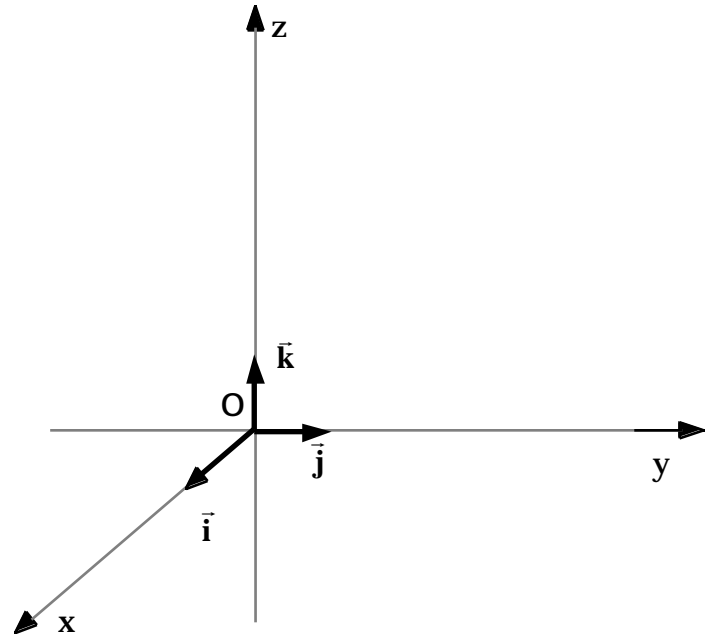
Un versore rappresenta una direzione ed un verso nello spazio. Se  $\bar{\mathbf{u}}_a$  è un versore, il vettore  $\bar{\mathbf{a}}$  parallelo e concorde con  $\bar{\mathbf{u}}_a$  di modulo  $a$  si può rappresentare come:

$$\bar{\mathbf{a}} = a\bar{\mathbf{u}}_a$$

Deriva dalla definizione di prodotto di uno scalare per un vettore.

Particolarmente importanti sono i versori  $\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}$  e  $\bar{\mathbf{k}}$ ,

qualche volta anche indicati con  $\bar{\mathbf{u}}_x, \bar{\mathbf{u}}_y$  e  $\bar{\mathbf{u}}_z$ , che rappresentano la direzione ed il verso rispettivamente degli assi  $x$ ,  $y$  e  $z$  della terna di assi cartesiani di riferimento.



### ***Rappresentazione di un vettore mediante le sue componenti cartesiane.***

Dato il vettore  $\bar{\mathbf{a}}$ , di componenti  $a_x$ ,  $a_y$  (e  $a_z$ ), ricordando il significato delle componenti cartesiane e dei vettori componenti, nonché la definizione di prodotto di uno scalare per un vettore, si può scrivere:

$$\bar{\mathbf{a}} = a_x \bar{\mathbf{i}} + a_y \bar{\mathbf{j}} \quad (+ a_z \bar{\mathbf{k}})$$

### ***Significato di una relazione vettoriale.***

Consideriamo una relazione vettoriale

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}}$$

Dire che il vettore  $\vec{\mathbf{a}}$  è uguale al vettore  $\vec{\mathbf{b}}$ , vuol dire che i due vettori hanno lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso. In termini di componenti questo vuol dire che comunque si scelgono due (nel piano, tre nello spazio) direzioni mutuamente ortogonali, le componenti cartesiane dei due vettori devono essere uguali.

La singola equazione vettoriale risulta pertanto equivalente a due (nel piano, tre nello spazio) equazioni scalari tra le componenti.

Scegliendo le direzioni degli assi coordinati x,y (e z): si avrà:

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}} \quad \begin{array}{l} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ (a_z = b_z) \end{array}$$

Consideriamo la seconda legge di Newton:

$$\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$$

Sulla base di quello che abbiamo visto deve essere:

$$\begin{array}{l} \left( \vec{\mathbf{F}} \right)_x = (m\vec{\mathbf{a}})_x \\ \left( \vec{\mathbf{F}} \right)_y = (m\vec{\mathbf{a}})_y \\ \left[ \left( \vec{\mathbf{F}} \right)_z = (m\vec{\mathbf{a}})_z \right] \end{array}$$

Ma:  $\left( \vec{\mathbf{F}} \right)_x = F_x$ . Relazioni simili alla precedente valgono per le altre proiezioni. Inoltre  $(m\vec{\mathbf{a}})_x = ma_x$  e similmente per le altre proiezioni.

Alla fine si può dire che l'equazione vettoriale

$$\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$$

è equivalente a due (se siamo nel piano, tre se siamo nello spazio) equazioni scalari del tipo:

$$\begin{aligned} F_x &= ma_x \\ F_y &= ma_y \\ \left[ \begin{array}{l} F_z = ma_z \end{array} \right] \end{aligned}$$

comunque si scelgano le direzioni degli assi x,y (e z), purché mutuamente ortogonali tra di esse.

# Cinematica.

## **Introduzione.**

La cinematica, fornisce una descrizione del moto in termini delle grandezze caratteristiche del moto stesso: la lunghezza, il tempo e le grandezze derivate da queste, cioè la velocità e l'accelerazione. La cinematica, quindi, determina le relazioni tra queste grandezze.

La dinamica completa la descrizione del moto partendo dalle cause che lo hanno prodotto.

Per descrivere il moto di un corpo, bisogna essere in grado di descrivere come varia la sua posizione in funzione del tempo. Abbiamo già visto che la posizione di un corpo può essere specificata introducendo un sistema di riferimento<sup>(\*)</sup>, per esempio una terna cartesiana.

Il moto dipende dal sistema di riferimento in cui viene studiato.

Consideriamo il moto di una persona che, rispetto ad un sistema di riferimento solidale con la stanza in cui si trova, percorre un tratto di 5 m in 2 s. In un sistema di riferimento solidale con se stesso, invece la persona non si è mossa per niente. In un sistema di riferimento con origine nel centro della terra e assi invariabilmente orientati rispetto alle stelle fisse, la persona si è invece spostata di circa 1 Km a causa del moto di rotazione della terra su se stessa. Si è spostata di una distanza ancora maggiore in un sistema di riferimento con origine nel centro del sole ed assi invariabilmente orientati rispetto alle stelle fisse perché trascinato dalla terra nel suo moto di rivoluzione attorno al sole. E, infine, se si scegliesse come riferimento una terna con origine nel centro della Via Lattea e assi invariabilmente orientati rispetto alle galassie lontane, bisognerebbe tenere conto anche del moto di tutto il sistema solare all'interno della Via Lattea. E così via.

Quale sistema di riferimento conviene scegliere per descrivere il moto?

Quello in cui la descrizione del moto è la più semplice possibile, quello in cui si riescono ad evidenziare meglio quegli aspetti del moto che maggiormente ci interessano. Per un moto che avviene nel Laboratorio, un sistema di riferimento solidale con il Laboratorio è più che sufficiente. Per descrivere il moto della luna o dei satelliti artificiali attorno alla terra, si può prendere un riferimento solidale con la Terra e con gli assi invariabilmente orientati

---

(\*) Il sistema di riferimento sarà spesso indicato nel seguito anche con il termine osservatore.

rispetto alle stelle fisse. Per descrivere il moto della Terra, o dei pianeti intorno al sole, va meglio un sistema di riferimento solidale con il Sole<sup>3</sup>. Per descrivere un moto che avviene all'interno di un treno che si muove con una certa velocità rispetto al suolo, si può usare un sistema di riferimento legato al treno.

Dal punto di vista cinematico tutti i sistemi di riferimento sono equivalenti tra di loro, quello che cambia scegliendo l'uno o l'altro, è che la descrizione del moto diventa più o meno complessa. Questo vale per esempio per la descrizione del moto dei pianeti nel sistema geocentrico o eliocentrico. Vedremo poi in dinamica come si fa a selezionare quella classe di sistemi di riferimento in cui le leggi della dinamica sono valide.

Con l'introduzione di un sistema di riferimento si può specificare la posizione di un corpo. Per descriverne il moto, è necessario anche un orologio che scandisca il tempo e quindi permetta di mettere in corrispondenza la posizione occupata dal corpo e l'istante di tempo in cui ciò accade. In conclusione, per poter descrivere un moto, è necessario un sistema di riferimento e un orologio che inizi a misurare il tempo a partire da un istante arbitrario, assunto come l'istante iniziale ( $t=0$ ).

Cominceremo a studiare il moto dei corpi che possono essere localizzati specificando soltanto la posizione di un punto, studieremo cioè il moto del *punto materiale*, un punto geometrico dotato di massa.

Questa naturalmente è un'astrazione, serve per semplificare il problema: i corpi presenti in natura in generale non sono puntiformi ma hanno delle strutture molto complesse: sono fatti di atomi e molecole. A loro volta gli atomi sono fatti di protoni e neutroni confinati nel nucleo dell'atomo e di elettroni che permeano tutto il volume atomico. Anche i componenti elementari dell'atomo, i protoni ed i neutroni, si comportano come strutture complesse fatte a loro volta di quark; al momento attuale solo gli elettroni e i quark mostrano una struttura semplice, puntiforme.

E' giustificato rappresentare un corpo materiale mediante un punto?

Se siamo interessati al “*moto di insieme*” degli oggetti e non alla descrizione dettagliata del moto di ogni loro parte, allora l'approssimazione del punto materiale è una buona approssimazione: così se vogliamo descrivere il moto di una automobile che si sposta tra due città o di una nave che si sposta tra due porti possiamo rappresentare questi oggetti come dei punto materiali. Ovviamente in questo modo si rinuncia alla descrizione della rotazione delle ruote, del moto alternativo dei pistoni nel motore, alla rotazione delle eliche, etc.

Anche corpi di grandi dimensioni come la terra possono essere rappresentati come un punto materiale. Nello

---

<sup>3</sup> Si noti che per molti anni, fino a Copernico, per la descrizione del:moto dei pianeti è stato usato un sistema di riferimento solidale con la Terra (geocentrico).

studio del moto della Terra intorno al Sole, dato che le dimensioni della Terra sono molto più piccole rispetto alla distanza Terra-Sole, la Terra può essere pensata come un punto materiale ( $R_T = 6.4 \cdot 10^6$  m, distanza Terra-Sole =  $1 \text{ UA} = 1.5 \cdot 10^{11}$  m). Ovviamente con questa semplificazione si perderanno molti dettagli del moto terrestre, per esempio non riusciremo a descrivere quei moti che dipendono proprio dalla estensione della terra, come per esempio la rotazione attorno all'asse terrestre, il moto di precessione dell'asse terrestre e le variazioni delle dimensioni della terra (fenomeno delle maree): infatti un punto materiale, proprio perché non ha dimensioni, non può essere dotato di questi tipi di moto.

Il fatto che si possano approssimare corpi complessi con un punto materiale ha comunque un fondamento teorico. Vedremo infatti che dato un qualunque corpo esiste un suo punto caratteristico, denominato Centro di Massa. Il moto del corpo, comunque complesso, può essere sempre scomposto nel moto del centro di massa, che descrive il "moto di insieme" del corpo stesso, più il moto delle varie parti del corpo rispetto al centro di massa.

Ne risulta che se il corpo è rigido, le varie parti che costituiscono il corpo non si muovono l'una rispetto all'altra (si pensi ad un corpo solido), e se il suo moto è di pura traslazione, cioè tutte le parti del corpo si muovono allo stesso modo, con la stessa velocità, il moto del Centro di Massa è sufficiente da solo a descrivere completamente il moto dell'intero corpo rigido.

### ***Moti rettilinei.***

Cominciamo lo studio del moto dei corpi con il moto rettilineo. La **traiettoria**, che è il luogo dei punti via via occupati dal punto materiale, è in questo caso una retta. Esistono diversi esempi di moti rettilinei: il moto di caduta di un corpo abbandonato con velocità nulla da una certa altezza sulla superficie terrestre, il moto di un'automobile su un tratto di strada rettilineo, il moto dell'ascensore, il moto oscillatorio di un grave appeso ad un soffitto mediante una molla, etc.

Per descrivere la posizione del punto materiale durante il suo moto è sufficiente introdurre un riferimento unidimensionale lungo la traiettoria rettilinea: occorre cioè fissare sulla traiettoria il verso positivo e l'origine del sistema di riferimento (chiameremo "asse x" l'asse orientato così definito).

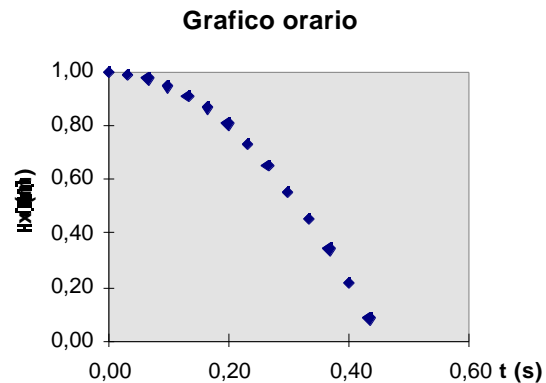
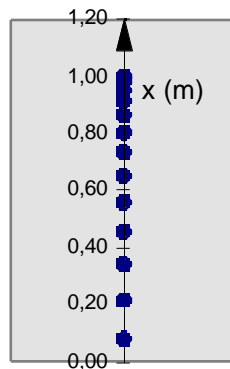
Poi, con l'ausilio di un orologio che comincia a misurare il tempo dall'istante in cui inizia l'osservazione del moto, mettiamo in corrispondenza la **posizione** occupata dal punto materiale lungo la traiettoria con l'**istante** di tempo



in cui tale posizione viene occupata. Definiamo cioè la posizione del punto materiale in *funzione del tempo*  $x = x(t)$ .

t (s)	x (m)
0,00	1,00
0,03	0,99
0,07	0,98
0,10	0,95
0,13	0,91
0,17	0,86
0,20	0,80
0,23	0,73
0,27	0,65
0,30	0,56
0,33	0,46
0,37	0,34
0,40	0,22
0,43	0,08

Tabella 1



La posizione del punto materiale che si muove sulla traiettoria rettilinea in funzione del tempo,  $x=x(t)$  potrà essere rappresentata o mediante una espressione analitica:

$$x = 1,00 - \frac{1}{2}9,81t^2 \quad \begin{array}{l} x \text{ in m} \\ t \text{ in s} \end{array}$$

detta **legge oraria**, oppure mediante una rappresentazione grafica, il **grafico orario**.

Nel grafico orario si riporta sull'asse delle **ascisse** il tempo  $t$ , mentre sull'asse delle **ordinate** la posizione del punto materiale. (poiché il tempo non è una lunghezza, per rappresentare il tempo sull'asse delle ascisse occorre definire una **scala**, per esempio  $1 \text{ cm} = 0,1 \text{ s}$ . D'altra parte spesso anche la posizione, sebbene sia una lunghezza, viene rappresentata mediante una scala: per esempio  $1 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}$ ).

Nel grafico precedente è riportata la posizione del punto materiale agli istanti di tempo riportati nella Tab. 1. E' facile immaginare che misurando la posizione del punto materiale ad intervalli di tempo sempre più piccoli si riesca a conoscere la posizione del punto materiale ad ogni istante di tempo. In realtà, una volta determinati un certo numero di punti, si interpolano i punti misurati con una curva continua: l'esperienza mostra infatti che un punto materiale per spostarsi da una posizione ad un'altra deve occupare tutte le posizioni intermedie, non è mai stato verificato sperimentalmente che un corpo sia sparito da una posizione e riapparso allo stesso istante in un'altra posizione ad una distanza finita della prima. La posizione è una vera funzione del tempo, nel senso che a ciascun istante di tempo è associata una ed una sola posizione: non è mai stata riscontrata sperimentalmente la possibilità per un corpo di occupare due posizioni diverse allo stesso tempo (ubiquità).

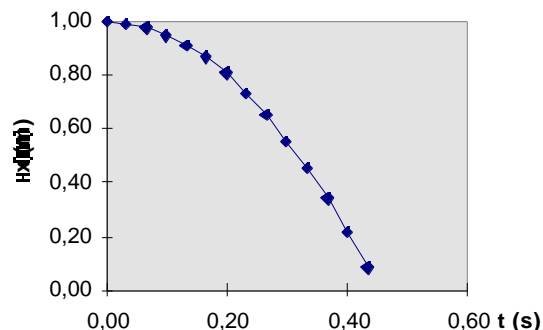
Se si conosce la legge oraria, o il grafico orario, è facile determinare la posizione in cui si trovava il punto materiale ad un particolare istante di tempo (per esempio, nel nostro caso al tempo  $t = 0.2 \text{ s}$ ).

#### Legge oraria

Se si conosce la legge oraria basta sostituire il valore del tempo nella espressione analitica e calcolare la posizione:

$$x = 10 - \frac{1}{2}9,81t^2 \quad \begin{array}{l} x \text{ in m} \\ t \text{ in s} \end{array}$$

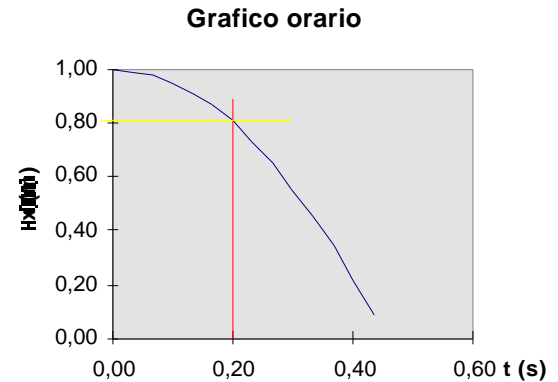
Grafico orario



$$x = 1,0 - \frac{1}{2} 9,81 \times 0,2^2 = 1,0 - \frac{1}{2} 9,81 \times 0,04 = 1,0 - 0,196 = 0,803 \text{ (m)}$$

### Grafico orario

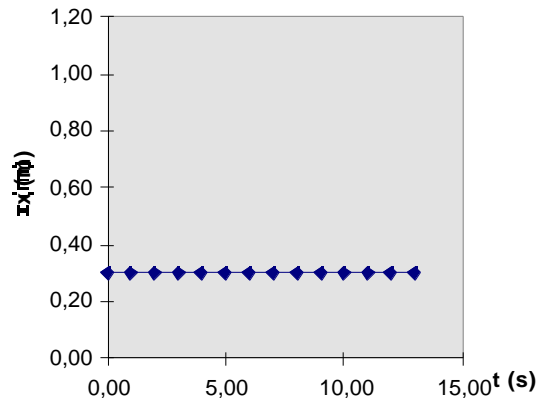
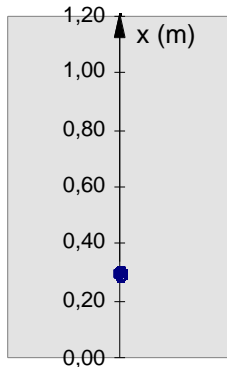
Dal punto sull'asse delle ascisse corrispondente a 0,2 s, si manda la parallela all'asse delle ordinate fino ad intersecare la curva che rappresenta il grafico orario. Dal punto di intersezione si manda la parallela all'asse delle ascisse fino ad intersecare l'asse delle ordinate e si determina la posizione di quest'ultimo punto sull'asse delle ordinate.



### Alcuni esempi di grafici orari.

#### Punto materiale fermo.

Un punto materiale fermo occupa sempre la stessa posizione: se



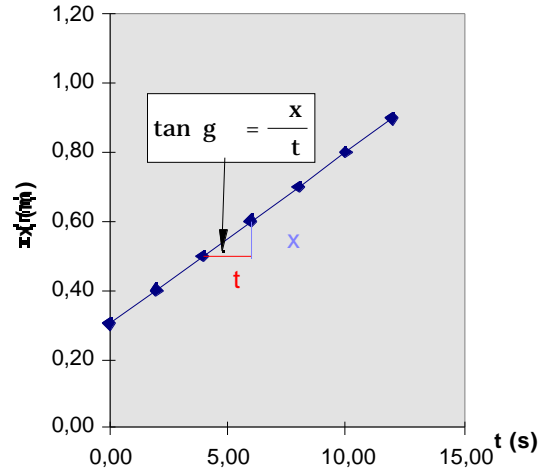
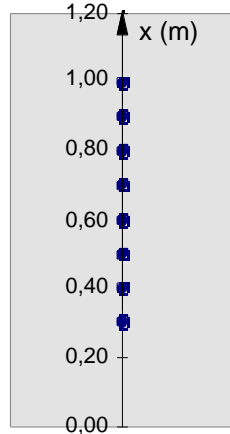
si va a misurare tale posizione ad intervalli regolari di tempo, si troverà sempre lo stesso valore. Il grafico orario è costituito da una retta parallela all'asse delle ascisse, la cui pendenza è nulla. Si noti che anche la velocità del punto materiale è nulla. La legge oraria sarà quindi:

$$x = x_0$$

dove  $x_0$  rappresenta la posizione costante del punto materiale.

### Punto materiale in moto con velocità costante.

Poiché la velocità è costante, il punto materiale percorrerà tratti uguali in intervalli di tempo uguali ( $x = v t$ ). Il grafico orario sarà rappresentato da una retta inclinata. Maggiore è la velocità del punto materiale, tanto più grande sarà la pendenza della retta nel grafico orario. D'altra parte la pendenza della retta è proprio uguale alla velocità del punto materiale. Infatti



$$\text{pendenza} = \tan g = \frac{x}{t} = v$$

La legge oraria, corrispondente all'equazione della retta nel grafico orario) sarà data da:

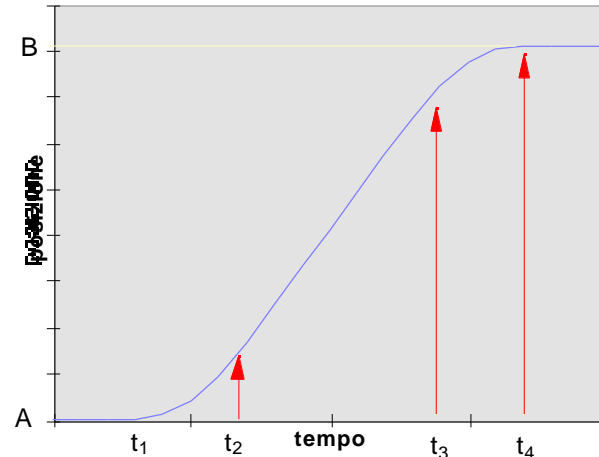
$$\mathbf{x(t) = x_0 + vt}$$

dove  $x_0$  è la posizione del punto materiale al tempo  $t = 0$ .

### **Moto di un'automobile su di un tratto rettilineo.**

Inizialmente l'automobile si trova in A ferma. Il grafico orario è una retta parallela all'asse delle ascisse. All'istante  $t_1$  l'automobile viene messa in moto e comincia ad acquistare velocità come si deduce dalla pendenza variabile del grafico orario. La pendenza del grafico continua ad aumentare fino all'istante di tempo  $t_2$ , il che vuol dire che la velocità dell'automobile continua ad aumentare fino all'istante  $t_2$ . Successivamente il grafico orario ha una pendenza costante e quindi l'automobile percorre un tratto di strada a velocità costante. All'istante di tempo  $t_3$ , l'automobile giunta nei pressi della sua destinazione finale comincia a rallentare: si può notare che la pendenza del grafico diminuisce fino a ridursi a zero all'istante di tempo  $t_4$  in cui l'automobile si ferma nella posizione B. Dopo  $t_4$  l'automobile resta ferma nella posizione B (tratto orizzontale del grafico).

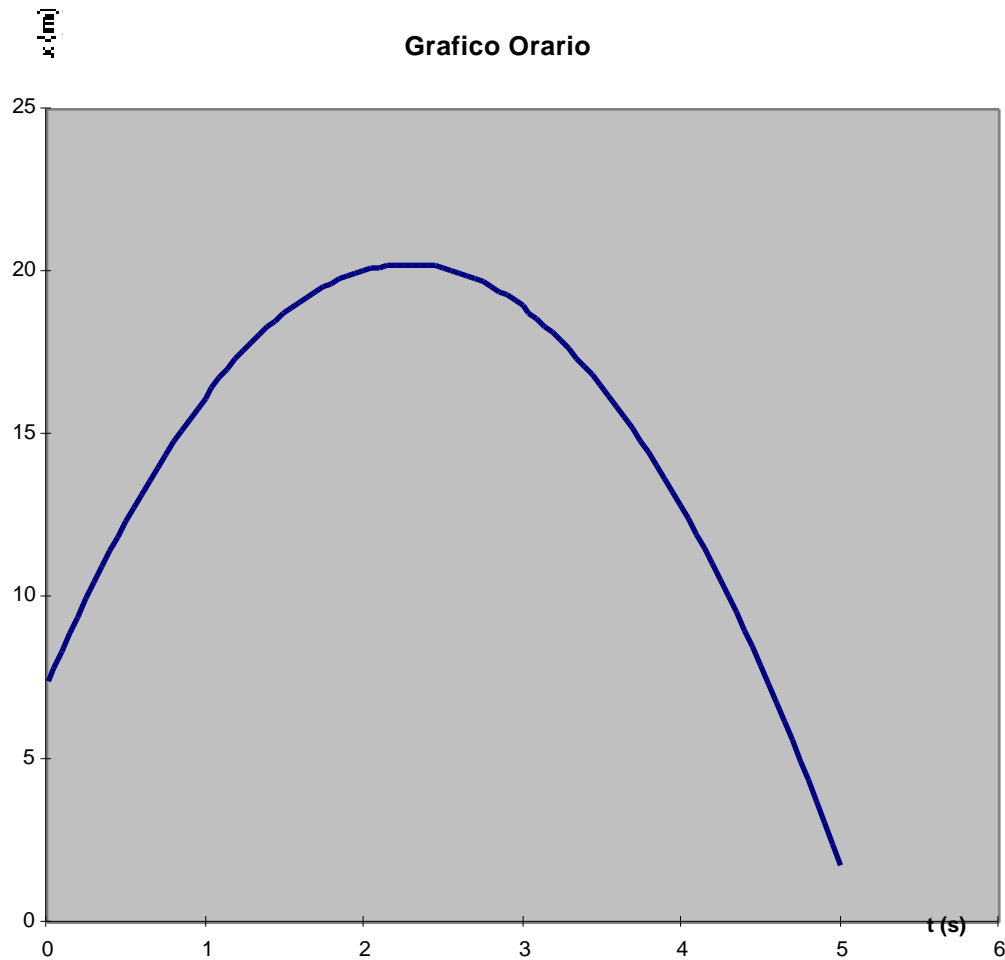
**Moto di una automobile su un tratto rettilineo**



### **Moti rettilinei: definizione della velocità.**

Supponiamo di conoscere l'equazione oraria del moto e che la dipendenza della posizione  $x$  dal tempo sia del tipo

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

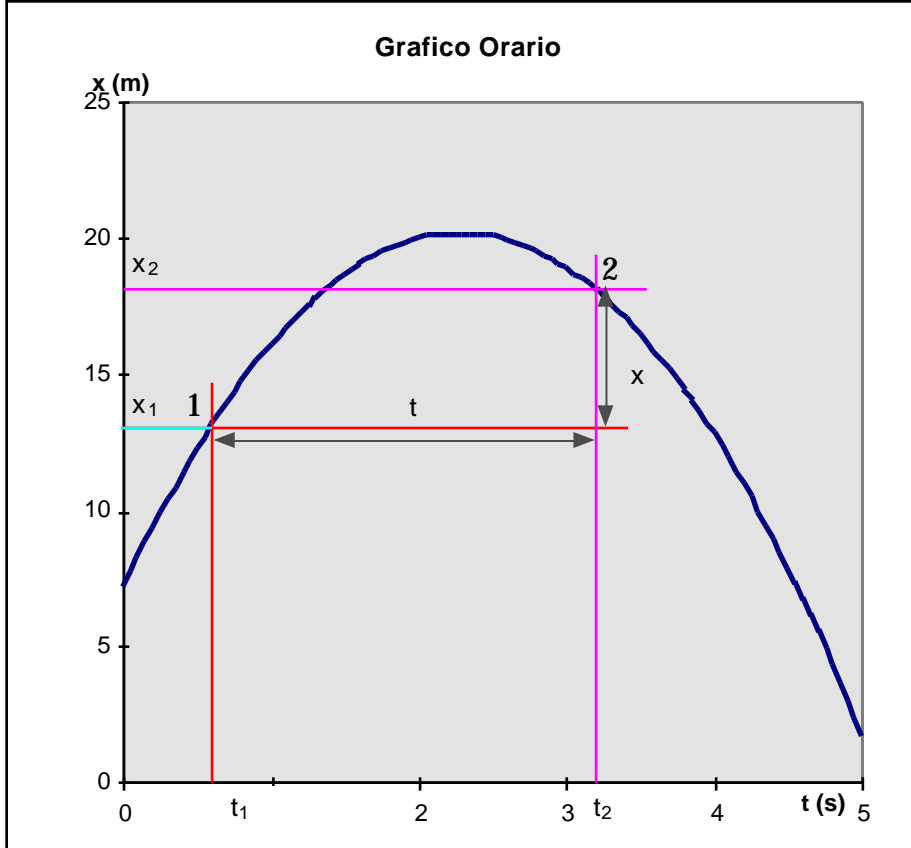


dove  $x_0$  è la posizione del punto materiale all'istante di tempo  $t=0$  (supponiamo valga 7.2 m),  $v_0$  e  $a_0$  sono delle

costanti il cui significato apparirà più chiaro una volta completato lo studio del presente e del prossimo paragrafo. Le dimensioni di  $v_0$  sono  $[LT^{-1}]$ , pertanto nel Sistema Internazionale le unità di misura saranno m/s, mentre le dimensioni di  $a_0$  sono  $[LT^{-2}]$  e le sue unità di misura saranno  $m/s^2$ . Supponiamo infine che i rispettivi valori numerici siano  $v_0 = 11.4$  m/s e  $a_0 = -5.0$   $m/s^2$ . L'equazione oraria diventa pertanto:

$$x = 7.2 + 11.4 t - 2.5 t^2$$

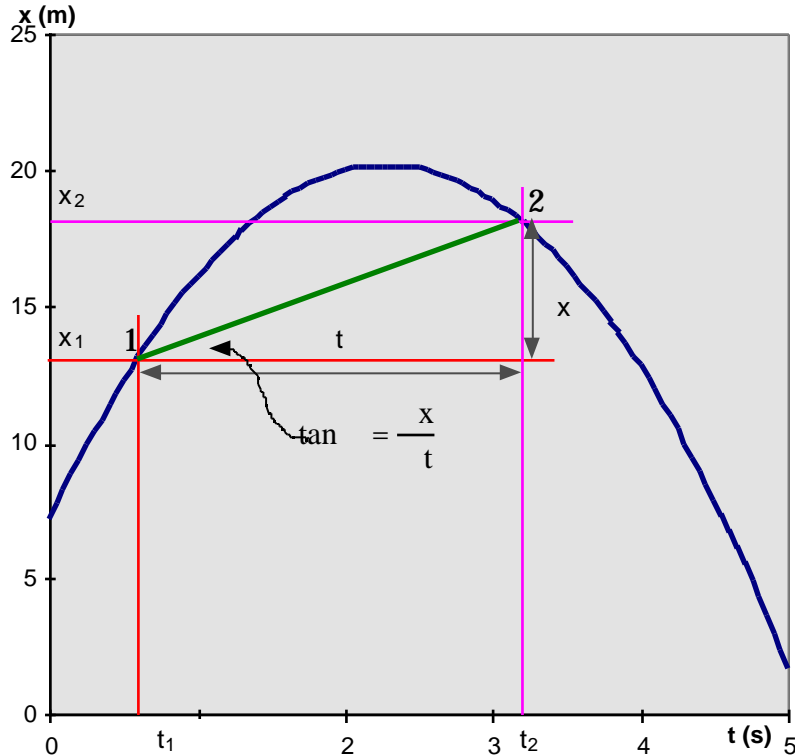
(x in m quando t è in s)



Questa funzione (cioè la dipendenza della posizione dal tempo) può essere rappresentata in un grafico. Riportiamo sull'asse delle ascisse il tempo e sull'asse delle ordinate la posizione del punto materiale. (Per poter rappresentare il tempo come una lunghezza sull'asse delle ascisse, dobbiamo introdurre un coefficiente di proporzionalità, per cui per esempio 1 cm corrisponde a 1 s).

La curva disegnata, che rappresenta la funzione  $x(t) = 7.2 + 11.4 t - 2.5 t^2$ , mette in relazione l'istante di tempo con la posizione occupata sulla traiettoria rettilinea dal punto materiale. Supponiamo di voler conoscere la posizione del punto materiale all'istante di tempo  $t_1$ . Si manda per  $t_1$  la parallela all'asse delle ordinate fino ad intersecare la curva nel punto 1; si proietta questo punto sull'asse delle ordinate, ottenendo così la posizione,  $x_1$ , occupata dal punto materiale all'istante di tempo  $t_1$ . In maniera analoga si può ricavare la posizione,  $x_2$ , occupata dal punto materiale ad un istante successivo  $t_2$ .

Grafico Orario



Si definisce *spostamento* del punto materiale nell'intervallo di tempo  $t = t_2 - t_1$  sulla traiettoria rettilinea, che abbiamo chiamato asse  $x$ , la quantità:

$$x = x_2 - x_1$$

Si osservi che lo *spostamento* non ha niente a che vedere con il “*cammino percorso*” dal punto materiale nell'intervallo di tempo  $t$ . Facendo riferimento alla figura si vede che il cammino percorso è dato dalla lunghezza del segmento che va da  $x_1$  a  $x_{\text{massimo}}$  più la lunghezza del segmento per andare da  $x_{\text{massimo}}$  a  $x_1$ .

$$\text{percorso effettuato} = x_{\text{max}} - x_1 + x_{\text{max}} - x_2$$

Se il punto materiale alla fine dell'intervallo  $t$  è tornato nella posizione di partenza, allora lo *spostamento* è nullo, mentre non lo è il cammino percorso.

Si osservi infine che lo *spostamento*  $x$  altro non è che la componente  $x$  del vettore spostamento. Per altro essendo il moto lungo l'asse  $x$ , lo spostamento ha solo la componente  $x$ .

Si definisce **velocità media** del punto materiale nell'intervallo di tempo  $t$  il rapporto tra lo *spostamento*  $x$  subito dal punto materiale e il corrispondente intervallo di tempo  $t$ .



$$v_m = \frac{x}{t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

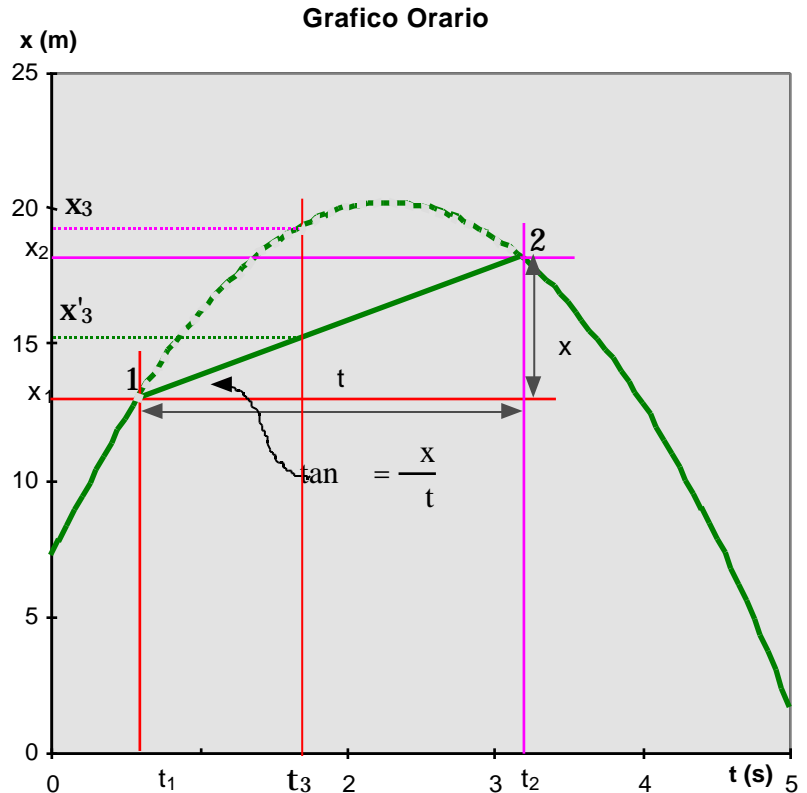
La velocità media nell'intervallo di tempo  $t = t_2 - t_1$  altro non è che il coefficiente angolare della retta che passa per i punti 1 e 2 del grafico orario.

Poiché il moto del punto materiale avviene lungo l'asse  $x$ , indicheremo la velocità media con  $v_{xm}$  (Il pedice  $x$  indica anche che  $v_{xm}$  è la componente  $x$  del **vettore velocità**. Nel paragrafo XX in cui verrà data la definizione del **vettore velocità**, mostreremo che la precedente definizione di velocità media fornisce appunto la componente  $x$  del vettore velocità media). Pertanto:

$$v_{xm} = \frac{x}{t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Se  $v_{xm}$  è maggiore di zero ( $v_{xm} > 0$ ) allora  $x_2$  è maggiore di  $x_1$ , ed il moto avviene nella direzione positiva dell'asse delle  $x$ , se  $v_{xm}$  è minore di zero ( $v_{xm} < 0$ ) allora  $x_2$  è minore di  $x_1$ , ed il moto avviene nella direzione negativa dell'asse delle  $x$ .

Si definisce invece **velocità scalare media** nell'intervallo  $t$ , il rapporto tra il percorso effettuato e l'intervallo di tempo impiegato.



$$v_{sm} = \frac{\text{percorso effettuato}}{t}$$

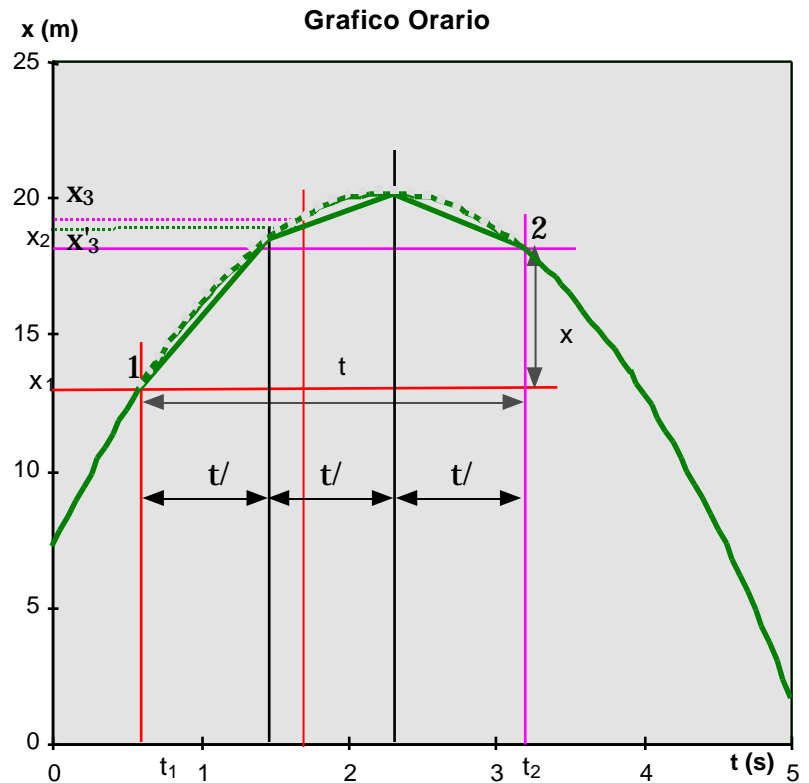
La velocità scalare media in generale è diversa dalla velocità media: innanzitutto essa è sempre positiva, mentre la velocità media può essere positiva o negativa a seconda se il moto avviene nel verso positivo dell'asse  $x$  o in quello opposto. In secondo luogo abbiamo fatto vedere che il "percorso effettuato" può essere diverso dal modulo dello spostamento.

Supponiamo ora che il punto materiale si muova, nell'intervallo di tempo tra  $t_1$  e  $t_2$ , con velocità costante pari alla velocità media appena calcolata. Allora il suo grafico orario in tale intervallo di tempo sarà rappresentato dal segmento rettilineo tra i punti 1 e 2 del grafico. La corrispondente legge oraria per  $t$  compreso tra  $t_1$  e  $t_2$ , sarà data da:

$$x(t) = x_1 + v_{xm}(t - t_1) = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}(t - t_1)$$

Come si vede dal grafico orario e della legge oraria, si riesce a predire con accuratezza la posizione del punto materiale agli istanti  $t_1$  e  $t_2$ , gli estremi dell'intervallo di tempo, ma la previsione fallisce miseramente per gli istanti di tempo intermedi. La velocità media non fornisce una buona descrizione del moto.

Delle previsioni più accurate si riescono a fare se si suddivide l'intervallo di tempo tra  $t_1$  e  $t_2$  in intervalli più piccoli e in ciascuno di essi si calcola la velocità media, poi si sostituisce il moto originario con tratti di



moto a velocità costante pari alla velocità media calcolata in quell'intervallo di tempo. Il grafico orario tra  $t_1$  e  $t_2$  diventa, in questo caso, la linea spezzata mostrata in figura.

Dal grafico precedente si intuisce che la descrizione del moto sarà tanto più accurata quanto più grande è il numero degli intervalli in cui si suddivide l'intervallo tra  $t_1$  e  $t_2$ , cioè quanto più si riduce l'intervallo di tempo in cui si calcola la velocità media. Per ottenere la descrizione più accurata possibile del moto occorrerebbe ridurre a zero l'ampiezza dell'intervallo di tempo in cui calcolare la velocità media, in maniera da determinare il valore della velocità ad un ben preciso istante di tempo: **velocità istantanea**.

Naturalmente, se si fa riferimento alla definizione di velocità media, si vede che non ha senso parlare di velocità media calcolata su un intervallo di tempo di ampiezza nulla. Noi riusciamo ad attribuire al punto materiale il valore della velocità posseduta ad ogni istante di tempo, o, in maniera equivalente assegnare ad ogni posizione occupata dal punto materiale il valore della sua velocità in quella posizione, utilizzando un procedimento di passaggio al limite.

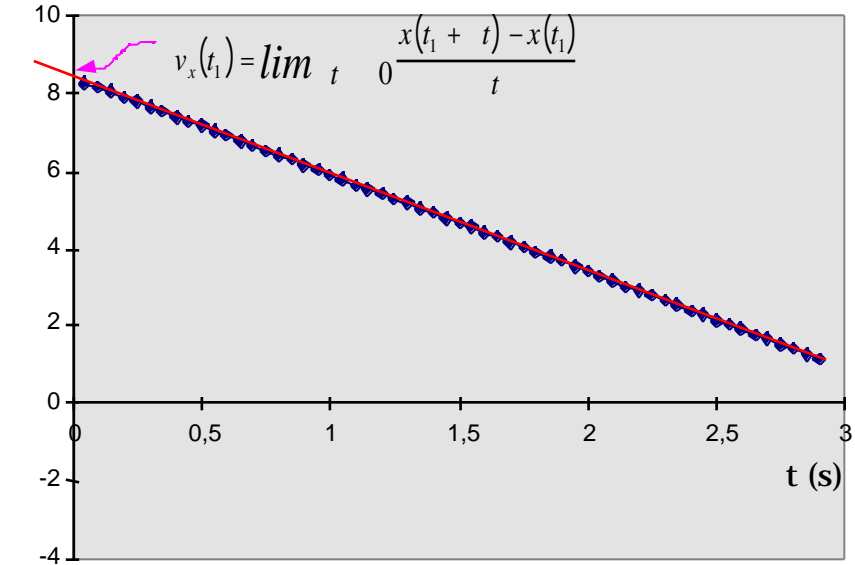
Si parla quindi non più di velocità media, ma di *velocità istantanea*, cioè la velocità posseduta dal punto materiale ad ogni istante di tempo, oppure in ciascuna posizione lungo la traiettoria rettilinea.

Supponiamo quindi di voler calcolare la velocità istantanea all'istante di tempo  $t_1$ , o, equivalentemente nella posizione  $x(t_1)$ . Si procede nel seguente modo: Si considera un intervallo di tempo  $t$  ( $>0$ , maggiore di zero), sia  $x(t_1 + t)$  la posizione occupata dal punto materiale all'istante di tempo  $(t_1 + t)$ .

La velocità media nell'intervallo  $t$  sarà data da:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ (m/s)}$$

$$\frac{x}{t} \text{ in funzione di } t$$



$$v_{xm} = \frac{x}{t} = \frac{x(t_1 + t) - x(t_1)}{t}$$

Si definisce **velocità istantanea** all'istante di tempo  $t_1$  il limite del *rapporto incrementale*:

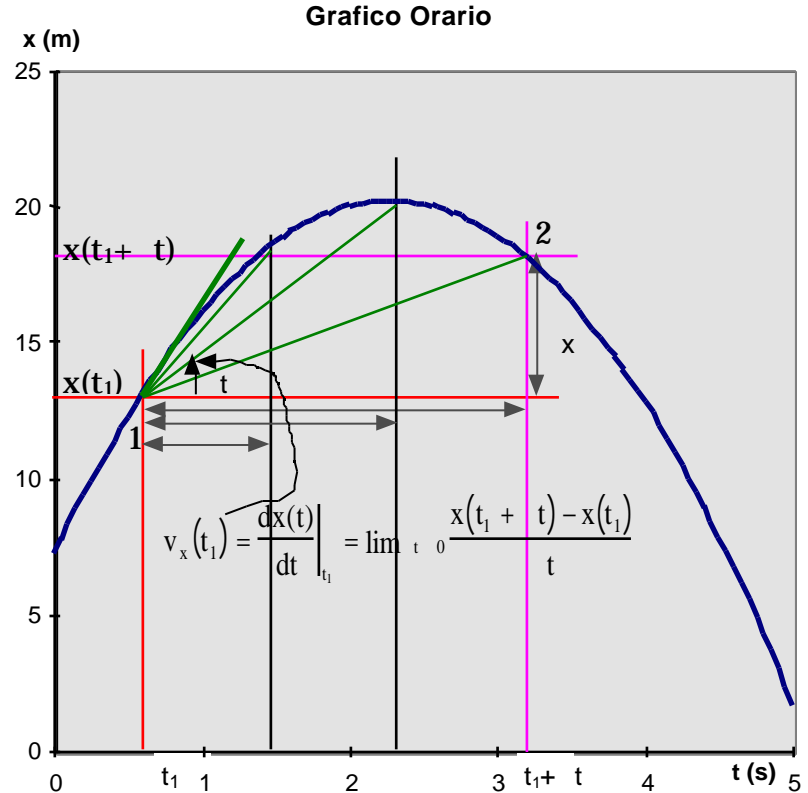
$$v_x(t_1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x(t_1 + t) - x(t_1)}{t}$$

Il rapporto  $\frac{x(t_1 + t) - x(t_1)}{t}$  si chiama infatti rapporto incrementale.

Dall'*analisi matematica* sappiamo che il limite del *rapporto incrementale* è uguale alla derivata, rispetto al tempo, della funzione  $x(t)$  calcolata all'istante di tempo  $t_1$ .

$$v_x(t_1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x(t_1 + t) - x(t_1)}{t} = \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t_1}$$

Dal grafico orario si può vedere che al tendere di  $t$  a 0, il punto 2 tende al punto 1. Per cui la velocità istantanea, all'istante di tempo  $t_1$ , corrisponde al coefficiente angolare della retta tangente al grafico nel punto 1.



Nell'esempio che stiamo facendo, conoscendo l'espressione analitica della funzione rappresentata nel grafico, possiamo calcolare esplicitamente la velocità istantanea all'istante di tempo  $t_1$ .

$$\begin{aligned}
 v_x(t_1) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x(t_1 + t) - x(t_1)}{t} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[x_0 + v_0(t_1 + t) + \frac{1}{2}a_0(t_1 + t)^2] - [x_0 + v_0(t_1) + \frac{1}{2}a_0(t_1)^2]}{t} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[x_0 + v_0 t_1 + v_0 t + \frac{1}{2}a_0(t_1)^2 + a_0 t_1 t + \frac{1}{2}a_0 t^2] - [x_0 + v_0(t_1) + \frac{1}{2}a_0(t_1)^2]}{t} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[x_0 + v_0 t_1 + v_0 t + \frac{1}{2}a_0(t_1)^2 + a_0 t_1 t + \frac{1}{2}a_0 t^2 - x_0 - v_0(t_1) - \frac{1}{2}a_0(t_1)^2]}{t} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[v_0 t + a_0 t_1 t + \frac{1}{2}a_0 t^2]}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} [v_0 + a_0 t_1 + \frac{1}{2}a_0 t] = v_0 + a_0 t_1
 \end{aligned}$$

Possiamo concludere che la velocità all'istante di tempo  $t_1$  è

$$v_x(t_1) = v_0 + a_0 t_1$$

che è anche il coefficiente angolare della tangente al grafico nel punto 1.

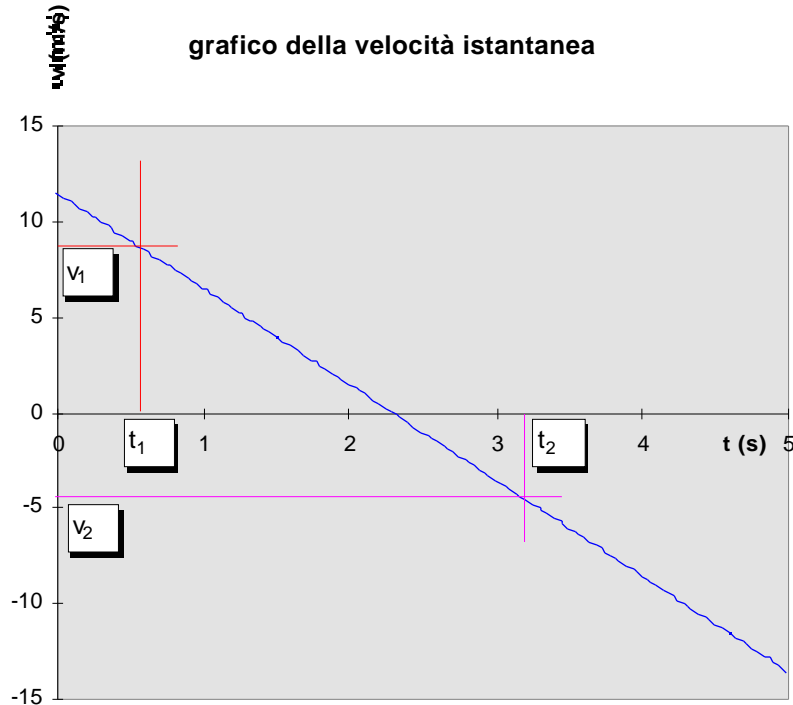
L'istante di tempo  $t_1$  è stato scelto in maniera arbitraria, il risultato del limite del rapporto incrementale sarà sempre lo stesso qualunque sia l'istante  $t_1$  fissato. Così possiamo affermare che il valore della velocità istantanea a qualunque istante di tempo  $t$  è dato da:

$$v_x(t) = v_0 + a_0 t = 11.4 - 5.0t$$

da cui si vede anche che  $v_0$  è la velocità del punto materiale all'istante  $t=0$ .

### **Moti rettilinei: definizione dell'accelerazione.**

Anche la velocità istantanea può essere rappresentata in un grafico. Riportiamo sull'asse delle ascisse il tempo, e sull'asse delle ordinate la velocità. Siccome la velocità non è una lunghezza, occorrerà definire anche per la velocità un coefficiente di proporzionalità: per esempio 1 tacca corrisponde a 2 m/s.



Il grafico della velocità determina la corrispondenza tra l'istante di tempo e la velocità del punto materiale in quell'istante. Nel nostro esempio il grafico della funzione è una retta, avente coefficiente angolare  $a_0$ . Come appare dal grafico, la velocità non è costante, ma varia con il tempo. Possiamo perciò calcolarci l'accelerazione, cioè la rapidità con cui varia la velocità. Operando come abbiamo fatto per la velocità, consideriamo l'intervallo di tempo  $t = t_2 - t_1$ . L'*accelerazione media* nell'intervallo  $t$  sarà data da:

$$a_m = \frac{v}{t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Poiché si tratta di un moto unidimensionale lungo l'asse  $x$ , possiamo aggiungere il pedice  $x$  all'accelerazione così calcolata. Questo significa interpretare l'accelerazione come componente  $x$  del vettore accelerazione. Come nel caso della velocità rimandiamo questa verifica al momento in cui introdurremo l'accelerazione come vettore.

$$a_{xm} = \frac{v}{t} = \frac{v_{x2} - v_{x1}}{t_2 - t_1}$$

$$a_{xm} = \frac{v_o + a_o t_2 - (v_o + a_o t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{v_o + a_o t_2 - v_o - a_o t_1}{t_2 - t_1} = \frac{a_o (t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = a_o$$

Come per la velocità anche nel caso dell'accelerazione possiamo passare all'accelerazione istantanea per una migliore descrizione del moto.

L'accelerazione istantanea all'istante di tempo  $t_1$  si ottiene calcolando il limite del seguente rapporto incrementale:

$$a_x(t_1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_x(t_1 + t) - v_x(t_1)}{t}$$

Utilizzando la definizione di derivata, possiamo dire che l'accelerazione all'istante di tempo  $t_1$  è uguale alla derivata della funzione  $v_x(t)$  calcolata al tempo  $t_1$ .

$$a_x(t_1) = \left. \frac{dv_x(t)}{dt} \right|_{t=t_1}$$

$$a_x(t_1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_o + a_o(t_1 + t) - v_o - a_o(t_1)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a_o t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} a_o = a_o$$

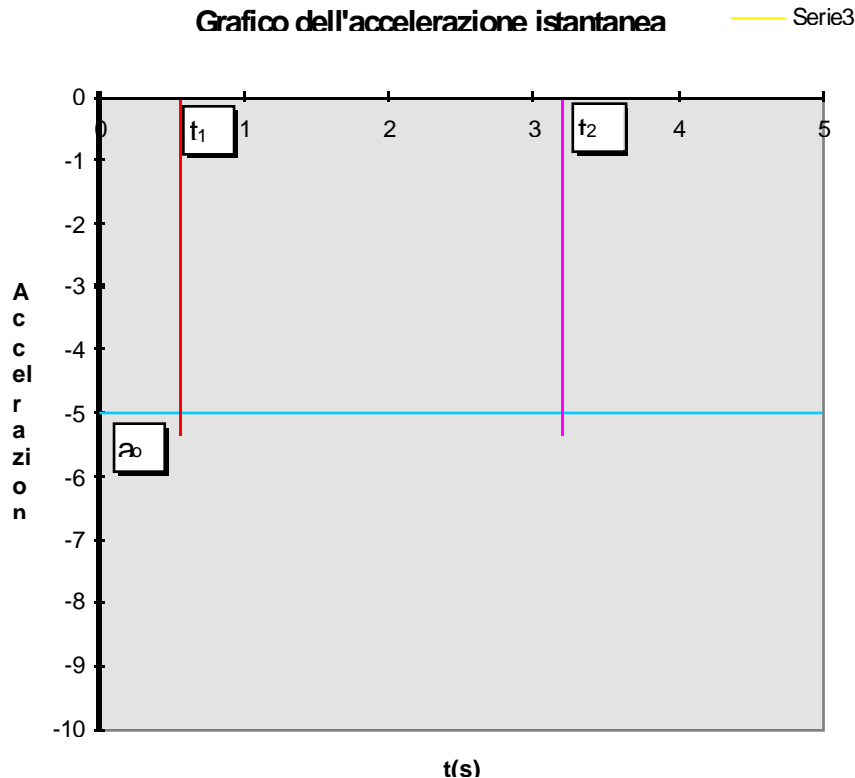
L'accelerazione istantanea all'istante di tempo  $t_1$  è uguale all'accelerazione media nell'intervallo di tempo  $t = t_2 - t_1$ , questo perché l'accelerazione è costante durante il moto. Infatti, poiché l'istante di tempo  $t_1$  è stato scelto arbitrariamente, l'accelerazione ad un generico istante di tempo si potrà scrivere come:

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}$$

Nel nostro caso:

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = a_o.$$

Ovviamente anche l'accelerazione può essere rappresentata in un grafico. Essendo costante, l'accelerazione è rappresentata da una retta parallela all'asse delle ascisse, che interseca l'asse delle ordinate alla coordinata  $a_o$ .





### **Moti rettilinei: il problema del moto.**

Nel dare la definizione della velocità istantanea e dell'accelerazione abbiamo supposto nota la legge oraria (posizione in funzione del tempo) o la dipendenza della velocità dal tempo e quindi abbiamo ricavato rispettivamente la velocità e l'accelerazione.

**Supponiamo ora di conoscere l'accelerazione subita dal punto materiale P durante il suo moto, di conoscere cioè l'accelerazione ad ogni istante di tempo, o in altri termini l'accelerazione come funzione del tempo, siamo in grado di risalire alla sua legge oraria?**

Possiamo riscrivere la definizione dell'accelerazione avendo cura di mettere a sinistra le quantità incognite e a destra le quantità note, otteniamo:

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x$$

e poi passando allo spostamento:

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

Combinando le due, otteniamo la relazione tra l'accelerazione e lo spostamento.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_x$$

**Allora risolvere il problema del moto significa risolvere l'equazione precedente.** Poiché vi compaiono le derivate, l'equazione si dice *differenziale*. In particolare è differenziale del second'ordine perché vi compare la derivata seconda.

**Cosa vuol dire risolvere una equazione differenziale?**

Risolvere una equazione differenziale del tipo:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = a_x(t)$$

significa ricercare tra tutte le possibili funzioni del tempo

$$x(t)$$

quelle che derivate due volte rispetto al tempo diano proprio la funzione accelerazione:

$$a_x(t)$$

**In analisi si dimostra che esistono infinito alla 2 soluzioni dell'equazione differenziale del secondo ordine. Infatti se  $x_1(t)$  è una soluzione dell'equazione differenziale, anche la funzione:**

$$x(t) = k_1 + k_2 t + x_1(t)$$

**con  $k_1$  e  $k_2$  costanti, è soluzione della stessa equazione differenziale.**

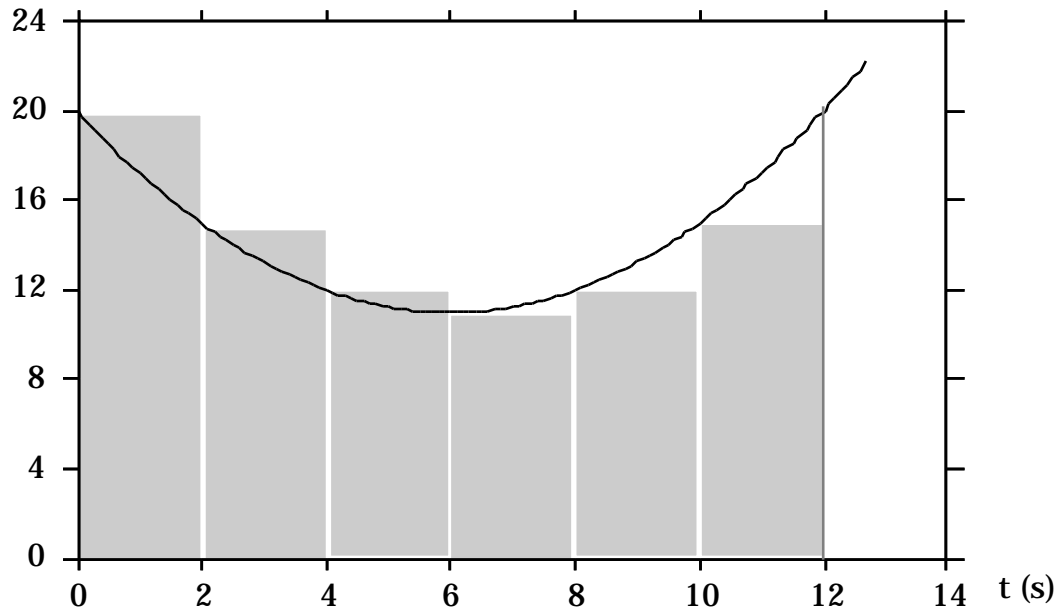
$$\frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} = a_x(t) \quad \begin{array}{l} \text{perchè} \\ \text{soluzione} \end{array}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = k_2 + \frac{dx_1(t)}{dt} \quad \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} = a_x(t)$$

### **Risoluzione formale delle equazioni differenziali.**

Cominciamo col supporre di conoscere l'andamento della velocità istantanea  $v_x$  in funzione del tempo, supponiamo per esempio che l'andamento sia quello mostrato nel grafico.

$v$  (m/s)



Per determinare la legge oraria del moto dobbiamo risolvere l'equazione differenziale:

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_x(t)$$

Proviamo a calcolare lo spostamento subito dal punto materiale nell'intervallo di tempo  $[0,t]$  a partire dall'istante iniziale  $t=0$ .

Dividiamo l'intervallo  $[0,t]$  in  $n$  intervalli ciascuno di ampiezza  $\Delta t$ . Abbiamo così definito  $n+1$  istanti di tempo:

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \\ t_1 &= t_0 + \Delta t \\ t_2 &= t_0 + 2 \Delta t \\ &\dots \\ t_i &= t_0 + i \Delta t \\ &\dots \\ t_n &= t_0 + n \Delta t = t \end{aligned}$$

Lo spostamento subito dal punto materiale nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ , tra  $t_{i-1}$  e  $t_i$ , sarà dato da:

$$\Delta x_i = v_{xm,i} \Delta t$$

dove abbiamo indicato con  $v_{xm,i}$  la velocità media del punto materiale nell' $i$ -esimo intervallo di tempo, cioè tra  $t_{i-1}$  e  $t_i$ . Ovviamente lo spostamento complessivo nell'intervallo di tempo tra 0 e  $t$ , si ottiene sommando su tutti gli intervalli di tempo. Se  $x_0$  è la posizione della particella all'istante di tempo  $t=0$ , possiamo scrivere:

$$x(t) - x_0 = \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \sum_{i=1}^n v_{xm,i} \Delta t$$

**Noi però non conosciamo la velocità media  $v_{xm,i}$  in ciascuno degli  $n$  intervalli di tempo [1],**

---

[1] In generale la velocità media nell'intervallo considerato non è uguale alla media dei valori della velocità agli estremi dell'intervallo

$$v_{xm,i} \neq (v(t_{i-1}) + v(t_i))/2$$

né è uguale al valore assunto dalla velocità nel punto di mezzo dell'intervallo  $t_{i-1/2}$

$$v_{xm,i} \neq v(t_{i-1/2})$$

sappiamo solo che essa è compresa tra il valore minimo e quello massimo assunti dalla funzione  $v_x(t)$  nell'intervallo tra  $t_{i-1}$  e  $t_i$ .

Possiamo fornire una stima della velocità media  $v_{xm,i}$  ponendola uguale al valore assunto dalla funzione  $v_x(t)$  nell'estremo iniziale dell'intervallo  $t_{i-1}$  e  $t_i$ , cioè  $v_{xm,i} \sim v_x(t_{i-1})$ <sup>[2]</sup>. Di conseguenza la stima dello spostamento subito dal punto materiale nell'intervallo di tempo tra  $t_{i-1}$  e  $t_i$  sarà data da:

$$x_i = v_x(t_{i-1}) t$$


---

Solo se la velocità varia linearmente nell'intervallo  $_t$ , vale il segno di uguaglianza in entrambe le relazioni.

In generale la velocità media nell'intervallo considerato non è uguale alla media dei valori della velocità agli estremi dell'intervallo

$$v_{xm,i} \neq (v(t_{i-1}) + v(t_i))/2$$

né è uguale al valore assunto dalla velocità nel punto di mezzo dell'intervallo  $_t$

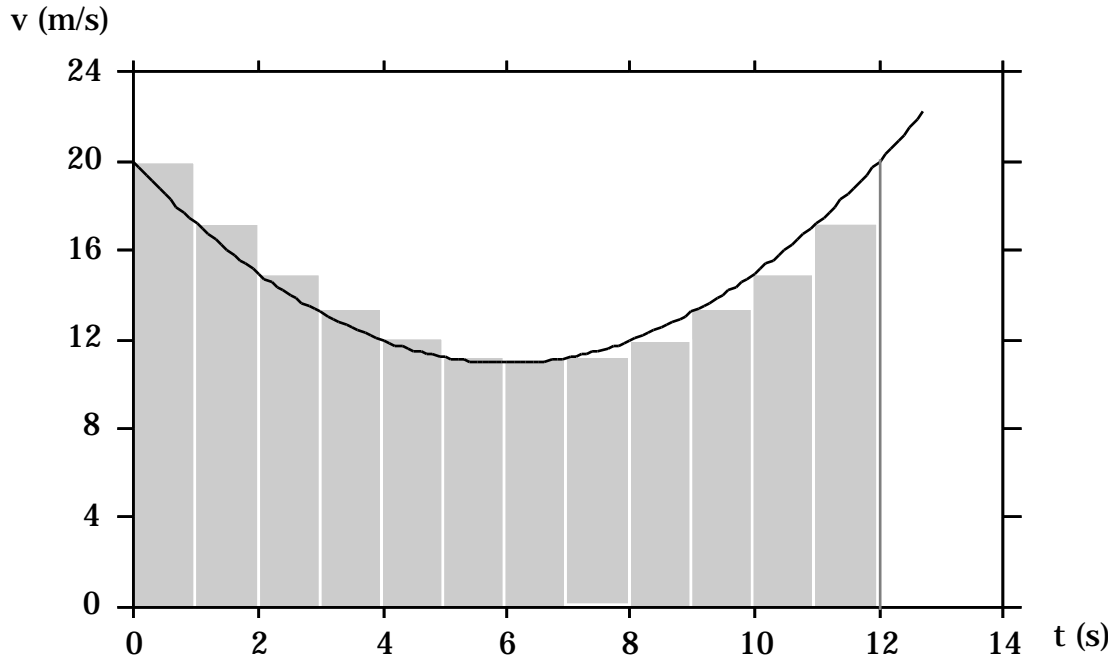
$$v_{xm,i} \neq v(t_{i-1} + _t/2)$$

Solo se la velocità varia linearmente nell'intervallo  $_t$ , vale il segno di uguaglianza in entrambe le relazioni.

[2] Naturalmente la scelta di approssimare il valore medio della velocità nell'intervallo  $i$ -esimo con il valore assunto dalla velocità istantanea all'istante iniziale dell'intervallo stesso è assolutamente arbitraria. Se per esempio si scegliesse di approssimarla con il valore assunto dalla velocità istantanea nell'istante finale dell'intervallo  $i$ -esimo, tale scelta sarebbe altrettanto valida per giungere alla definizione di integrale con la stessa identica procedura. Una scelta particolarmente usata per le applicazioni numeriche è la seguente:

$$v_{xm,i} = (v(t_{i-1}) + v(t_i))/2$$

cosa che equivale ad approssimare l'area sotto la curva nell'intervallo  $i$ -esimo con l'area del trapezio di basi  $v(t_{i-1})$  e  $v(t_i)$  e altezza  $_t$ , anziché con l'area del rettangolo di base  $v(t_{i-1})$  e altezza  $_t$ .



che nel grafico è rappresentato dall'area del rettangolo di base

$t$  e altezza  $v_x(t_{i-1})$ . Una stima dello spostamento complessivo subito dal punto materiale nell'intervallo di tempo tra  $t=0$  e  $t$ , si ottiene sommando le stime parziali:

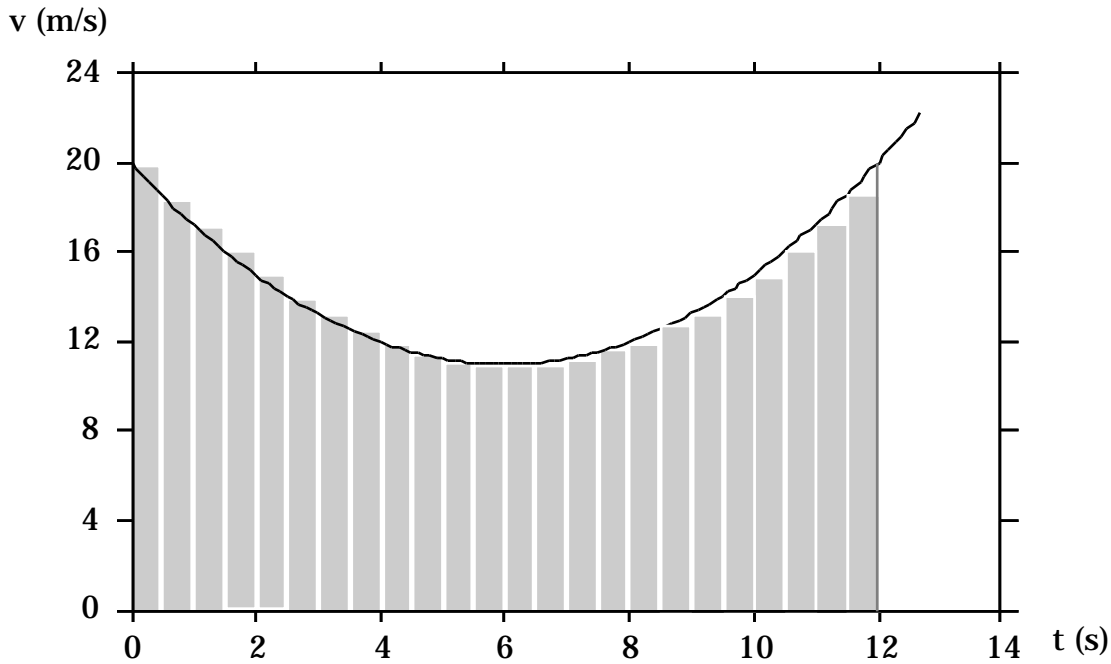
$$x(t) - x_0 = \sum_{i=1}^n x_i \quad \sum_{i=1}^n v_x(t_{i-1}) t$$

Questa stima dello spostamento, nel grafico, corrisponde all'area ricoperta dagli  $n$  rettangoli di ampiezza  $t$  e altezza  $v_x(t_{i-1})$ .

La stima dello spostamento subito dal punto materiale è tanto migliore, quanto migliore è l'approssimazione  $v_{xm,i} \sim v_x(t_{i-1})$  in ogni intervallo

di tempo  $t$ . È abbastanza intuitivo che quanto più piccolo è l'intervallo di tempo  $t$ , cioè quanto più grande è il numero  $n$  di intervalli in cui viene diviso l'intervallo di tempo tra 0 e  $t$ , tanto più piccola è la differenza tra il valore minimo ed il valore massimo assunti dalla funzione  $v_x(t)$  nell'intervallo tra  $t_{i-1}$  e  $t_i$ , e, quindi, tanto migliore è

l'approssimazione  $v_{xm,i} \sim v_x(t_{i-1})$ . Si può anzi affermare che queste due quantità coincidono nel limite per  $t$  che tende a 0, o, equivalentemente, quando il numero degli intervalli,  $n$ , tende all'infinito.



Allora possiamo affermare che lo spostamento subito dal punto materiale nell'intervallo di tempo tra 0 e t è dato da:

$$x(t) - x_0 = \lim_n \sum_{i=1}^n v_x(t_{i-1}) \Delta t$$

Tale limite è, per definizione, l'integrale tra 0 e t della funzione  $v_x(t)$ , e si scrive:

$$x(t) - x_0 = \int_0^t v_x(t) dt$$

Si noti che in tale integrale abbiamo indicato la variabile di integrazione in corsivo per distinguerla dal simbolo  $t$  con cui abbiamo indicato l'estremo superiore dell'intervallo di tempo  $[0, t]$  in cui stiamo calcolando lo spostamento del punto materiale. Poiché l'istante  $t$  è generico (è stato fissato arbitrariamente), l'equazione precedente vale qualunque sia l'istante di tempo  $t$ . Pertanto l'equazione oraria del moto del punto materiale si può scrivere in maniera formale come:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(t) dt$$

L'espressione:

$$x(t) = k + \int_0^t v_x(t) dt$$

dove  $k$  è una costante arbitraria, rappresenta la soluzione generale dell'equazione differenziale da cui siamo partiti. Esistono cioè "infinito alla uno" soluzioni dell'equazione differenziale di primo grado, tante quante sono le possibili scelte della costante arbitraria  $k$ . Infatti, siccome la derivata di una costante è sempre uguale a zero, cambiando la costante additiva nell'espressione di  $x(t)$  non si cambia il valore della derivata di  $x(t)$ . Per passare dalle "infinito alla uno" soluzioni dell'equazione differenziale, alla equazione oraria del moto bisogna fissare la costante additiva  $k$  sulla base delle condizioni iniziali. Si richiede che  $x(0)$  sia uguale a  $x_0$  e questo fissa il valore della costante additiva  $k$ . Nel nostro caso  $k$  è proprio uguale a  $x_0$ . Nel caso di una equazione differenziale del secondo ordine le costanti da fissare sulla base delle condizioni iniziali sono due, come vedremo nei prossimi esempi. (Si tenga comunque sempre presente che in analisi si dimostra che esiste una ed una sola soluzione dell'equazione differenziale che soddisfa anche il problema delle *condizioni iniziali*.)

Torniamo ancora alla definizione dell'integrale:

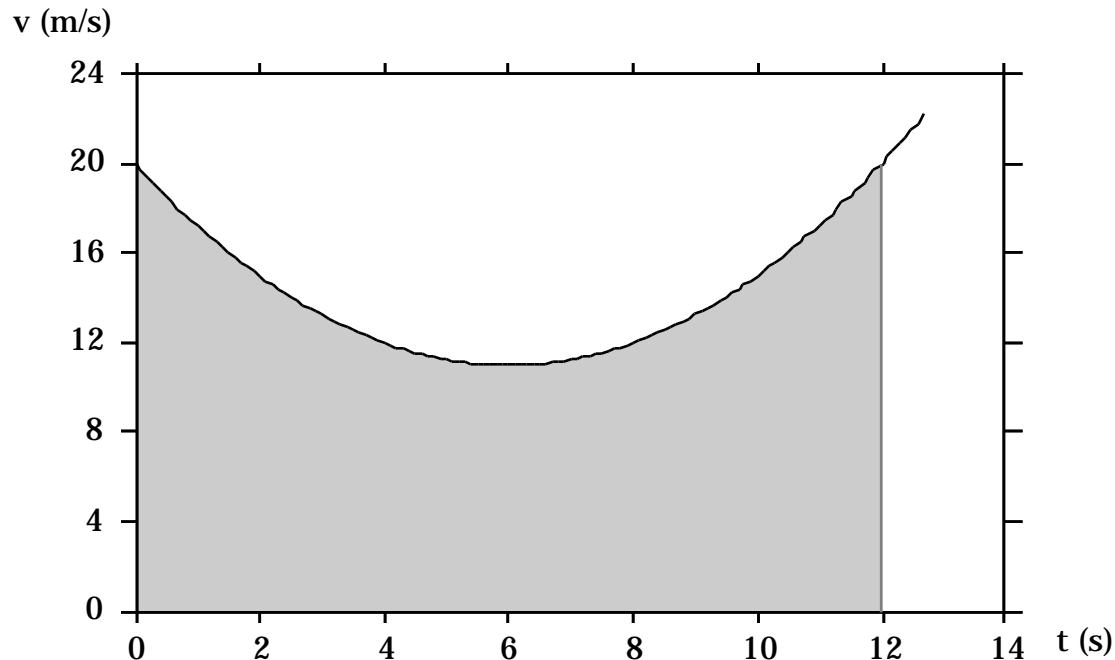
$$\int_0^t v_x(t) dt = \lim_n \sum_{i=1}^n v_x(t_{i-1}) \Delta t$$



Osservando il grafico della funzione  $v_x(t)$ , vediamo che man mano che diminuiamo l'ampiezza degli intervalli, l'area ricoperta dai rettangoli si avvicina sempre più all'area compresa tra l'asse dei tempi e la curva  $v_x(t)$  e delimitata dagli estremi dell'intervallo di tempo, 0 e t. Possiamo quindi interpretare l'integrale

$$\int_0^t v_x(t) dt$$

può essere appunto interpretato come l'area delimitata dall'asse delle ascisse e dalla curva che rappresenta la funzione integranda e compresa tra gli estremi dell'intervallo di integrazione. Useremo questa interpretazione per risolvere alcune semplici equazioni differenziali, fin tanto che il corso di analisi non vi fornirà i metodi generali per la soluzione delle equazioni differenziali.



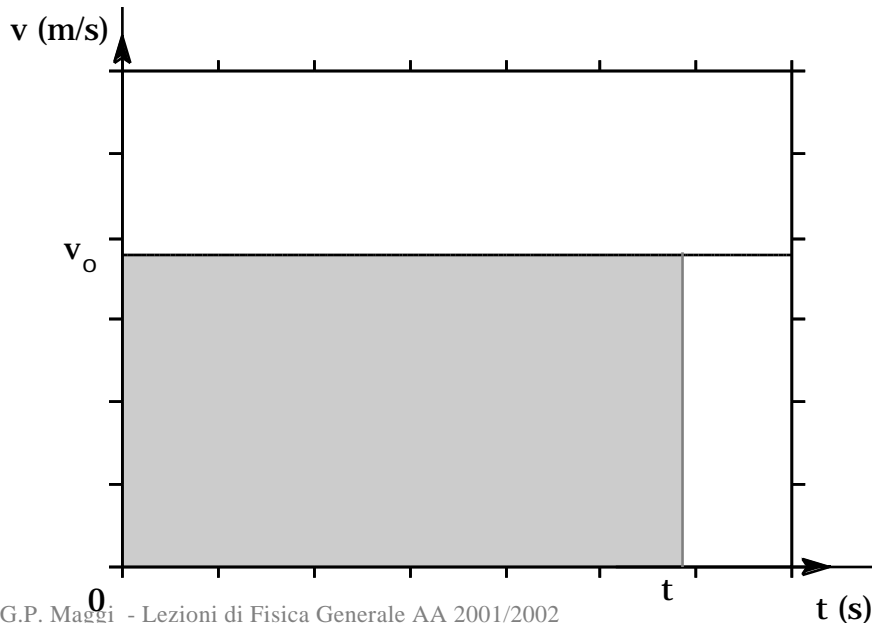
Bisogna fare attenzione, nel valutare geometricamente l'integrale, che le aree vanno sommate col proprio segno. Intervalli di tempo in cui la funzione è positiva danno luogo ad aree positive, intervalli di tempo in cui la funzione è negativa danno luogo ad aree negative.

### **Moto rettilineo uniforme.**

E' un moto rettilineo che avviene con velocità costante, uguale alla velocità iniziale:

$$v_x(t) = \text{cost} = v_{0x}$$

dove  $v_{0x}$  rappresenta appunto la velocità del punto materiale al tempo  $t=0$  ( $v_{0x} = v_x(0)$ ).



Nel paragrafo precedente abbiamo visto che l'equazione oraria del moto è data da:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(t) dt$$

dove  $x_0$  è la posizione del punto materiale all'istante di tempo  $t=0$  e l'integrale si calcola determinando l'area delimitata dall'intervallo di integrazione  $[0,t]$ , dall'asse delle ascisse e dalla curva che rappresenta la velocità. Nel caso che stiamo esaminando, cioè con  $v_x$  costante, l'area cercata è proprio l'area del rettangolo di lati  $t$  e  $v_{0x}$ , cioè  $v_{0x}t$ .

Pertanto l'equazione oraria del moto è:

$$x(t) = x_0 + v_{0x} t$$

**Moto rettilineo uniformemente accelerato.**

È un moto rettilineo caratterizzato da una accelerazione costante, uguale a quella iniziale:

$$a_x(t) = k = a_{0x}$$

Nel paragrafo precedente abbiamo risolto la seguente equazione differenziale

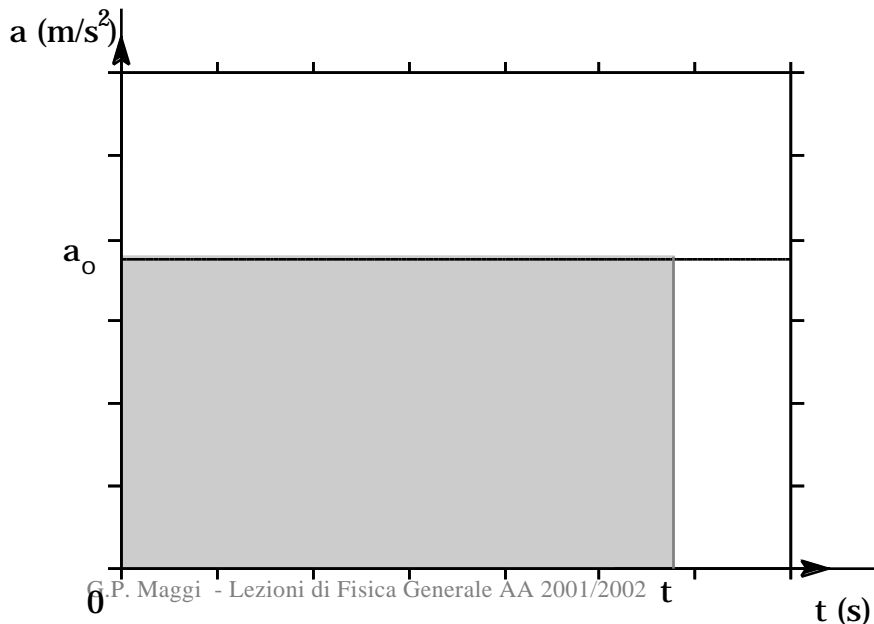
$$\frac{dx(t)}{dt} = v_{0x}$$

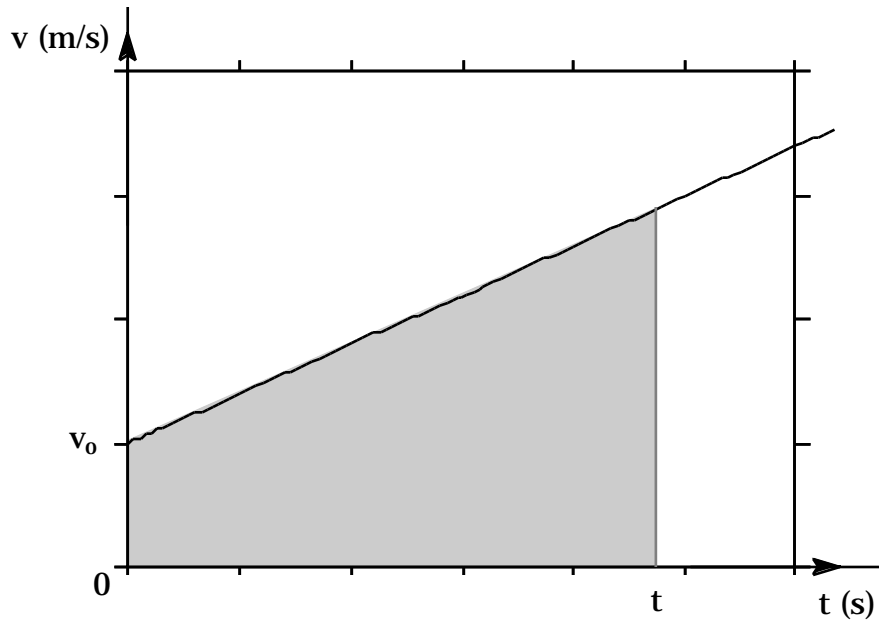
con  $v_{0x}$  costante. Ora invece vogliamo trovare l'espressione della velocità partendo dalla conoscenza dell'accelerazione costante,  $a_x(t) = a_{0x}$ . Dobbiamo perciò risolvere la seguente equazione differenziale:

$$\frac{dv_x(t)}{dt} = a_{0x}$$

Confrontando le due equazioni differenziali, si vede che esse sono formalmente identiche: nella seconda  $v_x$  gioca il ruolo di  $x$  e  $a_{0x}$  quello di  $v_{0x}$ . Ovviamente anche la soluzione avrà una struttura simile.

$$v_x(t) = v_{0x} + a_{0x} t$$





Formalmente dunque, la soluzione all'equazione differenziale

$$\frac{dv_x(t)}{dt} = a_x(t)$$

si scrive come:

$$v_x(t) = v_{0x} + \int_0^t a_x(t) dt$$

dove  $v_{0x}$  rappresenta la velocità del punto materiale all'istante di tempo  $t=0$  e l'integrale può essere calcolato valutando l'area compresa tra l'asse delle ascisse e la curva che rappresenta l'accelerazione e delimitata dagli estremi dell'intervallo di integrazione.

Possiamo ora fare un passo ulteriore e determinare la legge oraria del moto. Riportiamo in un grafico la velocità in funzione del tempo. Essa sarà rappresentata da una retta che interseca l'asse delle ordinate nel punto  $v_{0x}$  e avente una pendenza pari ad  $a_{0x}$ .

Come abbiamo visto precedentemente, la soluzione dell'equazione differenziale  $\frac{dx(t)}{dt} = v_x(t)$  si può scrivere come:

$$x(t) = x_o + \int_0^t v_x(t) dt$$

L'integrale, al solito può essere valutato calcolando l'area sotto la curva della velocità che in questo caso è l'area di un trapezio di basi  $v_x(0)=v_{ox}$  e  $v_x(t)$  ed altezza pari a  $t$ :

$$\int_0^t v_x(t) dt = \frac{1}{2} (v_{ox} + v_x(t)) t = \frac{1}{2} (v_{ox} + (v_{ox} + a_{ox} t)) t = v_{ox} t + \frac{1}{2} a_{ox} t^2$$

La legge oraria del moto è dunque data da:

$$x(t) = x_o + v_{ox} t + \frac{1}{2} a_{ox} t^2$$

Facciamo una osservazione: nell'esempio precedente per determinare l'espressione della legge oraria è stato necessario risolvere due equazioni differenziali:

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_x(t)$$

$$\frac{dv_x(t)}{dt} = a_{ox}$$

e questo ha richiesto la conoscenza di due costanti, la velocità iniziale e la posizione iniziale. Infatti il problema che abbiamo affrontato è stato quello di determinare la funzione  $x(t)$  soluzione dell'equazione del secondo ordine

$$\frac{dv_x(t)}{dt} = a_{ox} \qquad \frac{d^2x(t)}{dt^2} = a_{ox}$$

Per passare dalle infinite alla due soluzioni dell'equazione differenziale, all'unica che descrive il moto del punto materiale è stato necessario fissare le condizioni iniziali del problema, cioè i valori assunti dalla velocità e dalla posizione ad un istante di tempo  $t$ , che noi abbiamo assunto coincidente con l'istante iniziale  $t_0 = 0$ .

Questo è vero non solo per il moto uniformemente accelerato. Ogni qualvolta l'accelerazione è una funzione nota del tempo o della posizione, integrando le due equazioni differenziali del primo ordine:

$$\frac{dv_x(t)}{dt} = a_x(t) \qquad \frac{dx(t)}{dt} = v_x(t)$$

corrispondenti alla seguente equazione differenziale del secondo ordine:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = a_x(t)$$

è possibile determinare la legge oraria del moto se vengono anche specificate le condizioni iniziali del moto, cioè la posizione e la velocità assunte dal punto materiale all'istante iniziale  $t_0 = 0$ .

### **Moto rettilineo uniforme**

$$a_x(t) = 0$$

$$v_x(t) = v_{x0} = \text{cost}$$

### **Moto uniformemente accelerato**

$$a_x(t) = a_{x0} = \text{cost}$$

$$v_x(t) = v_{ox} + a_{ox} t$$

$$x(t) = x_o + v_{ox} t$$

$$x(t) = x_o + v_{ox} t + \frac{1}{2} a_{ox} t^2$$

### **Velocità in funzione della posizione**

Eliminando il tempo tra l'espressione della velocità e quella della posizione in funzione del tempo, si può ottenere l'espressione della velocità in funzione della posizione.

$$v_x(t) = v_{x0} + a_{x0} t \quad \text{elevando al quadrato} \quad v_x^2 = v_{x0}^2 + 2v_{x0} a_{x0} t + a_{x0}^2 t^2$$

Da cui:

$$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_{x0} v_{x0} t + \frac{1}{2} a_{x0}^2 t^2$$

e tenendo conto che:

$$x(t) = x_o + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_{x0} t^2 \quad x(t) - x_o = v_{x0} t + \frac{1}{2} a_{x0} t^2$$

si ottiene

$$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_{x0} (x - x_o)$$

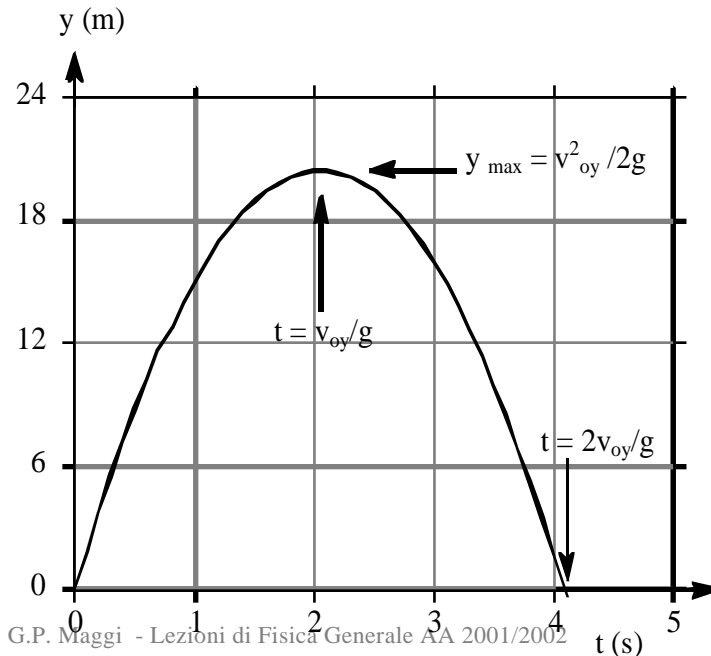
che ci fornisce l'espressione della velocità in funzione della posizione del punto materiale.

### **Moto dei corpi in caduta libera.**

Un esempio di moto con accelerazione costante è il moto di caduta libera dei corpi pesanti (gravi). Infatti se si trascura la resistenza dell'aria, ed il moto avviene su di un percorso limitato nelle vicinanze della superficie terrestre, si osserva che tutti i corpi, qualunque sia la loro forma, dimensione, massa, composizione chimica, si muovono sottoposti ad una accelerazione, detta accelerazione di gravità, il cui modulo vale circa  $9.81 \text{ m/s}^2$ , la direzione è quella della verticale e punta verso l'interno della terra. La direzione verticale in un punto della superficie terrestre può essere determinata per mezzo di un filo a piombo. Vedremo più avanti che in generale la direzione della verticale non coincide con la direzione del raggio vettore uscente dal centro della Terra, ma

differisce di poco da essa. Indichiamo l'accelerazione di gravità con  $\vec{g}$ . Il vettore  $\vec{g}$  ha dunque modulo  $g=9.80 \text{ m/s}^2$ , direzione quella della verticale, verso che punta verso l'interno della terra.

Si deve a Galilei l'osservazione sperimentale che tutti i corpi in caduta subiscono la stessa accelerazione. Il moto di caduta libera è un moto piuttosto rapido: un corpo che parte da fermo dopo 1 secondo ha percorso circa 5 m, dopo 2 secondi circa 20 metri, dopo 3 secondi circa 45 metri, etc. Galilei utilizzò per i suoi esperimenti dei piani inclinati. In questo modo riusciva a lavorare con accelerazioni più piccole di  $g$ . Egli, infatti, si rese conto che nel moto su di un piano inclinato, un corpo subisce un'accelerazione pari alla componente di  $\vec{g}$  lungo il piano inclinato. Lavorava così con moti più lenti, che, quindi, a parità di distanza percorsa, duravano di più. In questo modo egli riuscì a ridurre l'errore relativo nella misura degli intervalli di tempo, che effettuava con un orologio ad acqua, osservando la variazione del livello dell'acqua in un recipiente forato. Non potendo a quell'epoca produrre il vuoto, e quindi eliminare gli effetti dovuti alla resistenza dell'aria, utilizzò oggetti aventi la stessa forma, ma massa e composizione differenti, ed osservò appunto che tutti i corpi cadevano sottoposti alla medesima accelerazione.



Cominciamo col determinare il moto di un grave, nel caso in cui parte con velocità iniziale nulla oppure con una velocità iniziale  $v_0$  lungo la verticale, cioè parallela, o antiparallela, a  $\vec{g}$ . In questo caso il moto è rettilineo, ed avviene lungo la verticale. Introduciamo perciò un asse orientato verticale diretto verso l'alto, l'asse  $y$ . La componente dell'accelerazione lungo questo asse è quindi costante e vale  $a_y = -g$ . Si tratta quindi di un moto rettilineo uniformemente accelerato. L'equazione oraria di tale moto è data da:

$$y(t) = y_0 + v_{oy}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = y_0 + v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$$



$$v_y = v_{oy} + a_y t = v_{oy} - gt$$

$$a_y = -g$$

$y_0$  e  $v_{oy}$  sono la posizione del punto materiale e la sua velocità all'istante  $t=0$ .

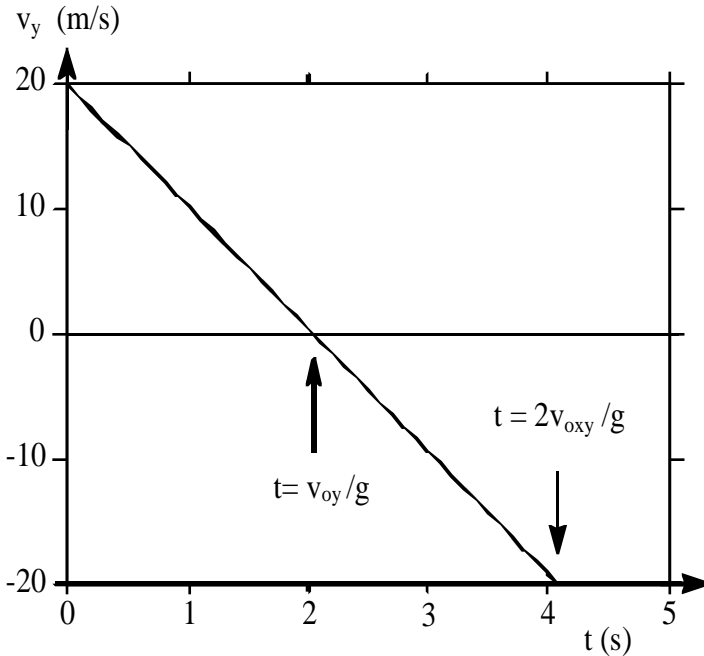
Problema: determinare le caratteristiche del moto di una palla lanciata verso l'alto con una velocità di 20 m/s, trascurando gli effetti della resistenza dell'aria.

Fissiamo l'origine dell'asse verticale  $y$ , diretto verso l'alto, nel punto da cui parte il moto, che supponiamo sulla superficie terrestre, e cominciamo a misurare il tempo dall'istante in cui inizia il moto. In queste ipotesi  $y_0 = y(0) = 0$  m, mentre  $v_{oy} = 20$  m/s. Le leggi del moto diventano:

$$y(t) = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$$

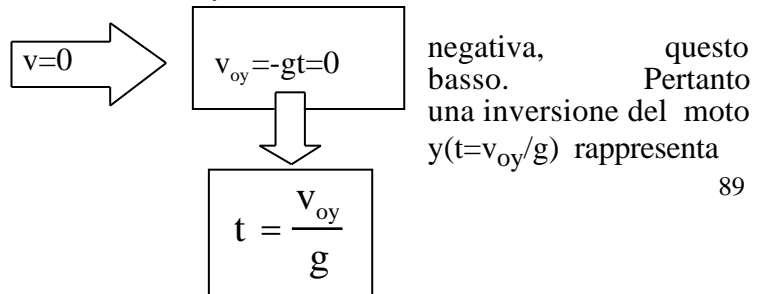
$$v_y = v_{oy} - gt$$

Osservando l'equazione della velocità si vede che inizialmente il corpo si muoverà verso l'alto: inizialmente infatti la componente  $y$  della velocità è positiva. Col passare del tempo, poiché l'accelerazione è diretta in verso opposto al moto, la velocità del corpo diminuisce fino ad annullarsi.



Come mostrato nel grafico della velocità, questo avviene al tempo  $t = v_{oy}/g$ .

In seguito la componente  $y$  della velocità diventa negativa, questo significa che il corpo comincia a muoversi verso il basso. Pertanto all'istante  $t = v_{oy}/g$  in cui la velocità si annulla, si ha una inversione del moto (vedi il grafico di  $y$  in funzione del tempo). Quindi  $y(t=v_{oy}/g)$  rappresenta



la massima quota raggiunta dal corpo.

$$y_{\max} = y \quad t = \frac{v_{oy}}{g} = v_{oy} \frac{v_{oy}}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_{oy}^2}{g^2} = \frac{1}{2} \frac{v_{oy}^2}{g}$$

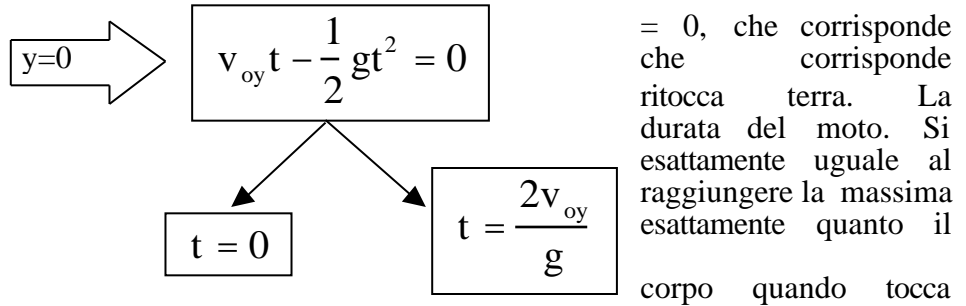
A partire dal tempo  $t=v_{oy}/g$ , la velocità del corpo aumenta in modulo, mentre la quota diminuisce. Dopo un certo tempo dall'istante iniziale, il corpo ritorna nel punto di partenza. Questo intervallo di tempo, che è poi la durata del moto, può essere determinato imponendo, nell'equazione del moto, che  $y$  sia uguale a zero e cercando gli istanti tempo in cui questa condizione è verificata.

L'equazione ammette due soluzioni:  $t$  alle condizioni iniziali, e  $t = 2v_{oy}/g$  all'istante di tempo in cui il corpo differenzia tra questi due tempi dà la osservi che la durata del moto è doppio del tempo necessario per moto di salita.

Possiamo calcolare la velocità del terra, sostituendo il tempo  $t = 2v_{oy}/g$  nell'espressione della velocità. Si trova:

$$v_{y\text{-finale}} = v_y \quad t = \frac{2v_{oy}}{g} = v_{oy} - g \frac{2v_{oy}}{g} = -v_{oy}$$

Il modulo della velocità con cui il corpo ritorna al suolo è lo stesso di quella con cui era stato lanciato. Possiamo anche esprimere il modulo della velocità, invece che in funzione del tempo, come una funzione della quota  $y$ .



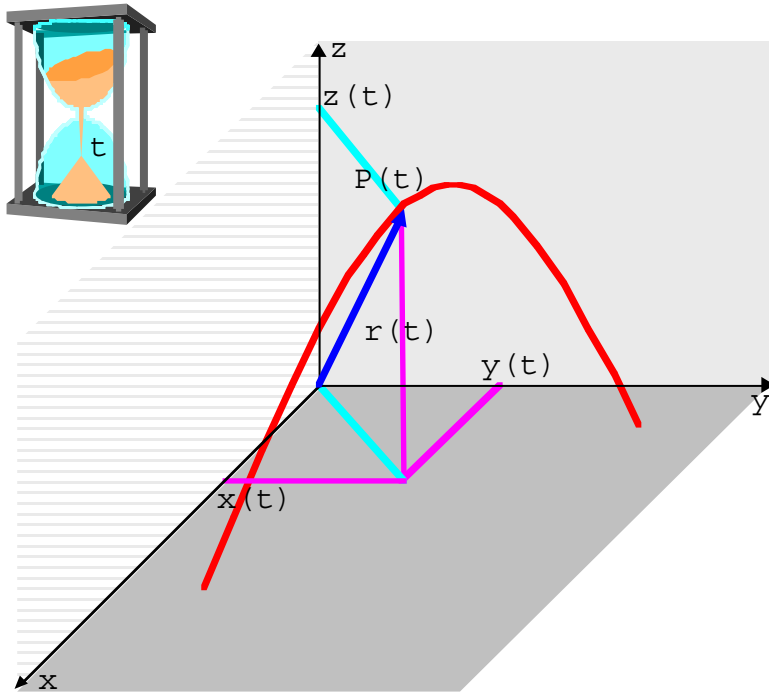
$= 0$ , che corrisponde che corrisponde ritocca terra. La durata del moto. Si esattamente uguale al raggiungere la massima esattamente quanto il corpo quando tocca

$$\begin{aligned}
v^2 = v_y^2 &= (v_{oy} - gt)^2 = v_{oy}^2 - 2v_{oy}gt + g^2t^2 = \\
&= v_{oy}^2 - 2g v_{oy}t + \frac{1}{2}gt^2 = \\
&= v_{oy}^2 - 2gy
\end{aligned}$$

Da questa espressione appare che, a parità di quota, il modulo della velocità è lo stesso sia durante la fase ascendente del moto che in quella discendente.

## Moto in tre dimensioni. Legge oraria.

Per studiare il moto di un punto materiale, muniamoci di un sistema di riferimento, una terna cartesiana, e di un orologio. La curva descritta dal punto materiale durante il moto si chiama **traiettoria**. Il generico punto sulla traiettoria è individuato dal vettore posizione  $\vec{r}$ .



Come è mostrato in figura, le componenti cartesiane del vettore posizione  $\vec{r}$ , sono proprio le coordinate cartesiane del punto P.

Se si mette in relazione la posizione del punto sulla traiettoria,  $\vec{r}$ , con l'istante di tempo,  $t$ , in cui tale posizione viene assunta, si ottiene la legge oraria del moto.

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Descrivere quindi il moto del punto materiale significa specificare come varia il vettore  $\vec{r}$  in funzione del tempo, cioè specificare la funzione  $\vec{r}(t)$ .

Questa funzione è una funzione vettoriale, che equivale a tre funzioni scalari:

$$\begin{aligned}x &= x(t) \\y &= y(t) \\z &= z(t)\end{aligned}$$

che sono anche dette **equazioni parametriche**

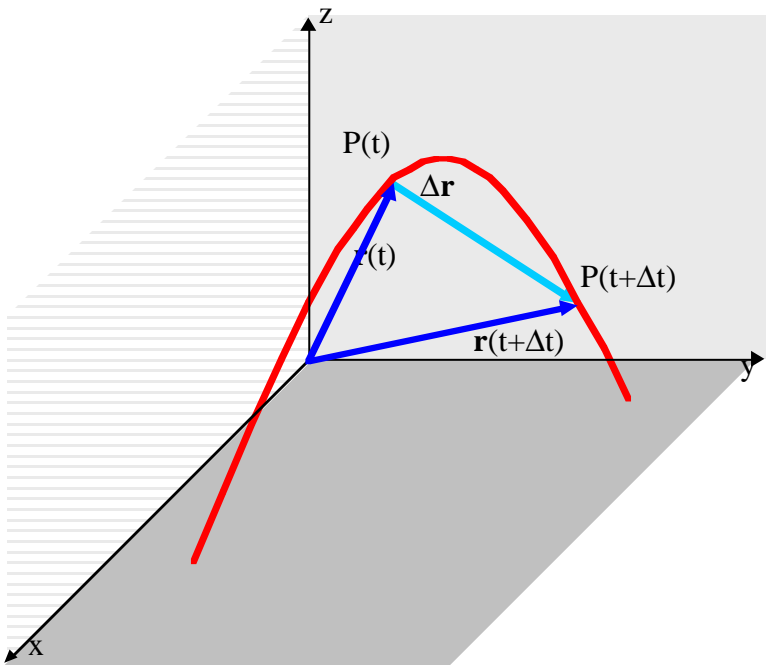
della traiettoria (il parametro è, ovviamente, il tempo  $t$ ).

Si osservi che mentre il punto materiale P si muove sulla sua traiettoria, le sue proiezioni sugli assi,  $P_x$ ,  $P_y$  e  $P_z$  descrivono delle traiettorie rettilinee. Il moto di un punto materiale nello spazio (3 dimensioni), può essere pensato

come la sovrapposizione di tre moti rettilinei (unidimensionali), che avvengono sui tre assi del sistema di riferimento.

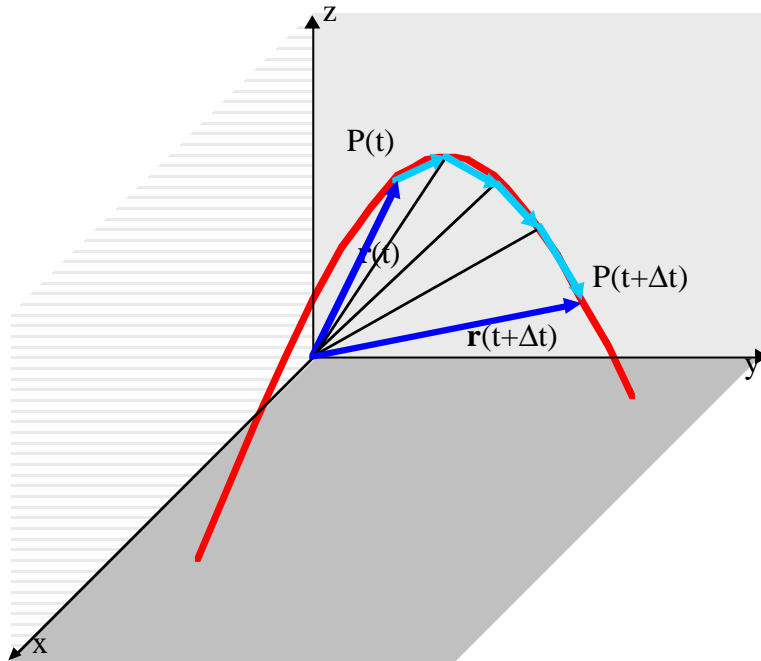
**Moto in tre dimensioni: definizione del vettore velocità.**

Supponiamo che durante il suo moto, il punto materiale P passi per la posizione  $P(t)$ , individuata dal vettore posizione  $\vec{r}(t)$ , all'istante di tempo  $t_1=t$ , e per la posizione  $P(t+\Delta t)$ , individuata dal vettore posizione  $\vec{r}(t+\Delta t)$ , al tempo  $t_2=t+\Delta t$ . Lo spostamento subito dal punto materiale P nell'intervallo di tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$  è  $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ . Si definisce **velocità media** del punto materiale P nell'intervallo di tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$  il rapporto tra lo spostamento subito nel tempo  $\Delta t$  e l'intervallo di tempo medesimo:



$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$\vec{v}_m$  è un vettore perché prodotto di un vettore  $\Delta \vec{r}$  per uno scalare  $1/\Delta t$ . Le sue dimensioni sono quelle di una lunghezza diviso un tempo,  $[LT^{-1}]$ , e le unità di misura nel S.I. sono metri al secondo, m/s.



Se nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ , il punto materiale si fosse mosso con una velocità costante pari a  $\bar{\mathbf{v}}_m$ , allora si sarebbe mosso da  $P_1$  a  $P_2$  lungo il vettore  $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}(t + \Delta t) - \bar{\mathbf{r}}(t)$ . La conoscenza della velocità media nell'intervallo  $\Delta t$  non dà una buona descrizione del moto: la traiettoria rettilinea tra  $P_1$  a  $P_2$  differisce dalla traiettoria reale in tutti i punti eccetto che negli estremi.

Si può pensare di suddividere l'intervallo di tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$  in intervalli più piccoli e in ciascuno di questi calcolare la velocità media  $\bar{\mathbf{v}}_m$ . Si osserva che più piccoli sono gli intervalli, migliore è la descrizione del moto: infatti la linea spezzata tra  $P_1$  a  $P_2$  approssima sempre meglio la traiettoria reale quanto più piccoli sono gli intervalli in cui viene diviso l'intervallo  $\Delta t = t_2 - t_1$ .

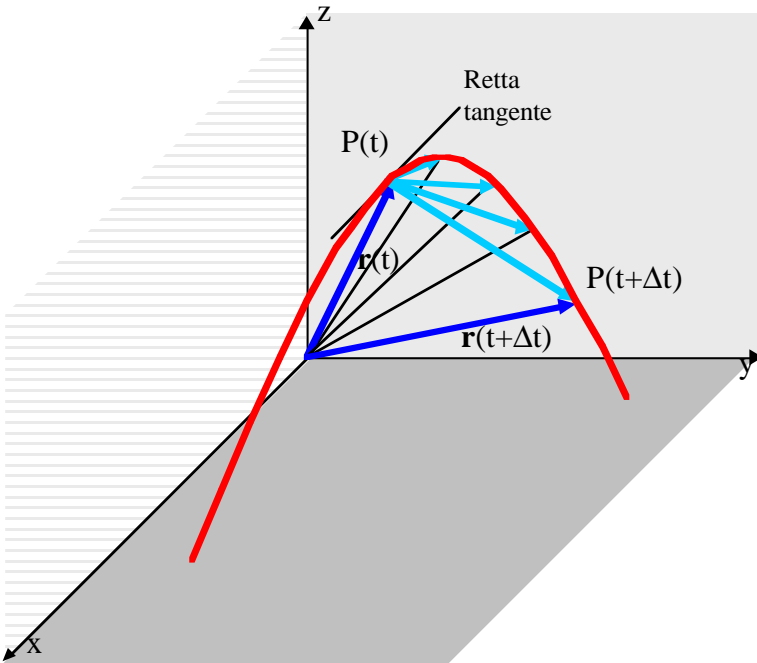
Si può assegnare un valore del vettore velocità in ogni punto della traiettoria?

C'è un problema logico: abbiamo definito la velocità come il rapporto tra uno

spostamento,  $\Delta \mathbf{r}$ , e l'intervallo di tempo  $\Delta t$  in cui lo spostamento è avvenuto. Ovviamente in un punto, che corrisponde a un ben preciso istante di tempo, sia lo spostamento che l'intervallo di tempo non possono essere definiti. Per definire la velocità in ciascun punto della traiettoria, dobbiamo far ricorso al concetto di limite. Si procede nel seguente modo: sia  $P$  la posizione occupata dal punto materiale all'istante di tempo  $t$ , individuata dal vettore posizione  $\bar{\mathbf{r}}(t)$ . Dopo un intervallo di tempo  $\Delta t$ , il punto materiale si trova in una nuova posizione individuata dal vettore  $\bar{\mathbf{r}}(t + \Delta t)$ .

La velocità media nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  è data da:

$$\bar{\mathbf{v}}_m = \frac{\bar{\mathbf{r}}(t + \Delta t) - \bar{\mathbf{r}}(t)}{\Delta t}$$



Questo rapporto, e quindi la velocità media, è definito per tutti i valori di  $\Delta t$  diversi da zero. Si definisce **velocità istantanea** del punto materiale nel punto P il limite di tale rapporto per  $\Delta t$  che tende a 0.

$$\bar{\mathbf{v}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{\mathbf{r}}(t + \Delta t) - \bar{\mathbf{r}}(t)}{\Delta t} = \left. \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} \right|_t$$

La velocità istantanea è la **derivata** di  $\bar{\mathbf{r}}$  rispetto al tempo calcolata all'istante di tempo t.

La velocità istantanea  $\bar{\mathbf{v}}$  come limite di un vettore, è un vettore.

Si noti che al tendere di  $\Delta t$  a 0,  $\bar{\mathbf{v}}_m$ , o  $\bar{\mathbf{r}}$ , tendono a disporsi secondo la tangente alla traiettoria nel punto considerato. Pertanto possiamo concludere che la velocità istantanea  $\bar{\mathbf{v}}$  nel generico punto P della traiettoria è diretta secondo la tangente alla traiettoria in quel punto,

mentre il suo verso è quello del moto<sup>(\*)</sup>.

(\*) In maniera leggermente più formale, se indichiamo con  $s$  il percorso effettuato lungo la traiettoria, il rapporto incrementale si può

Calcolando il limite del rapporto incrementale ad ogni istante di tempo, o in ogni punto lungo la traiettoria,

---

anche scrivere come:

$$\vec{v}_m = \frac{\mathbf{r}}{t} = \frac{s}{t} \frac{\mathbf{r}}{s}$$

Osserviamo che per  $t$  che tende a 0, anche  $s$  tende a 0. Sappiamo che il limite per  $t$  che tende a 0 di  $s/t$  è proprio il modulo della velocità:

$$v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{s}{t}$$

Osserviamo che, per  $t$  che tende a 0 s,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{r}|}{|s|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{lunghezza\_della\_corda}}{\text{Lunghezza\_dell'arco}} = 1$$

Ricordando l'osservazione già fatta: per  $t$  che tende a 0,  $\vec{r}$  tende a disporsi secondo la tangente alla traiettoria, potremo porre:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}}{|s|} = \vec{u}_t$$

dove  $\vec{u}_t$  è il versore tangente alla traiettoria diretto nel verso del moto. La velocità istantanea nel punto P può quindi essere espressa come:

$$\vec{v} = v\vec{u}_t$$



$$\frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

possiamo determinare il valore della velocità istantanea ad ogni punto della traiettoria, il che equivale a determinare la velocità istantanea  $\vec{v}$  in funzione del tempo,  $\vec{v} = \vec{v}(t)$ . Questo si rappresenta scrivendo

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

e dicendo che la velocità  $\vec{v}$  è la derivata del vettore posizione fatta rispetto al tempo.

### ***Rappresentazione cartesiana della velocità.***

Accanto a questa equazione vettoriale, si possono scrivere le tre equazioni scalari, relative alle componenti di  $\vec{v}$  :

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k})}{dt}$$

Applicando la proprietà distributiva della derivata rispetto alla somma:

$$= \frac{d(x(t)\vec{i})}{dt} + \frac{d(y(t)\vec{j})}{dt} + \frac{d(z(t)\vec{k})}{dt} =$$

Applicando poi la regola della derivata di un prodotto ed osservando che i versori  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  sono costanti nel sistema di riferimento in cui ci siamo messi, otteniamo:

$$\begin{aligned}
&= \frac{dx(t)}{dt} \bar{\mathbf{i}} + x(t) \frac{d\bar{\mathbf{i}}}{dt} + \frac{dy(t)}{dt} \bar{\mathbf{j}} + y(t) \frac{d\bar{\mathbf{j}}}{dt} + \frac{dz(t)}{dt} \bar{\mathbf{k}} + z(t) \frac{d\bar{\mathbf{k}}}{dt} = \\
&= \frac{dx(t)}{dt} \bar{\mathbf{i}} + \frac{dy(t)}{dt} \bar{\mathbf{j}} + \frac{dz(t)}{dt} \bar{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

Da questo otteniamo:

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt}$$

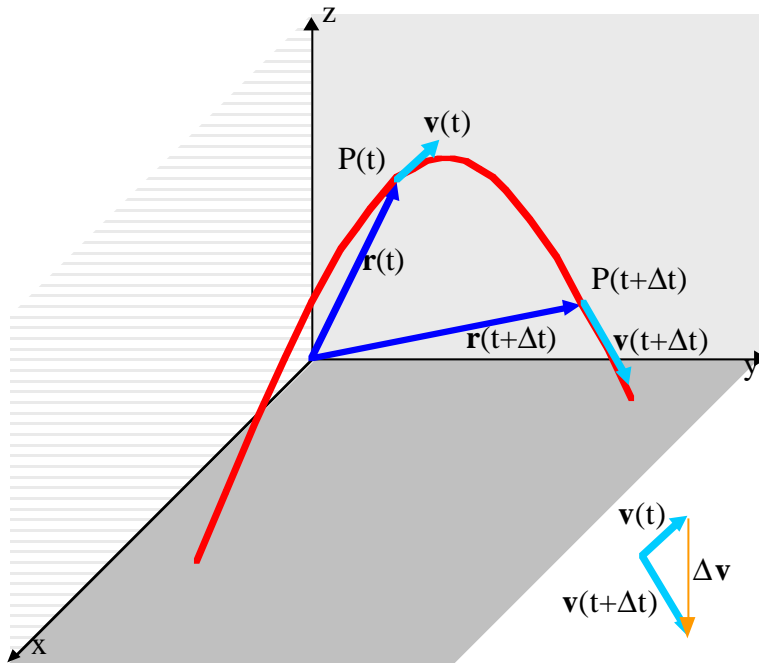
$$v_y = \frac{dy(t)}{dt}$$

$$v_z = \frac{dz(t)}{dt}$$

Si vede che la componente x della velocità dipende soltanto dalla componente x dello spostamento, e lo stesso accade per le componenti y e z. Nel calcolo della velocità le componenti non si mischiano.

### **Moto in tre dimensioni; definizione del vettore accelerazione.**

Procediamo in maniera analoga a quanto è stato fatto per la velocità. Osserviamo dalla figura che la velocità del punto materiale P varia mentre P si muove sulla sua traiettoria. La velocità è in ogni punto tangente alla traiettoria e, per lo meno per quanto riguarda la direzione, il vettore velocità  $\vec{v}$  cambia mentre il punto materiale si sposta sulla traiettoria disegnata in figura.



definire l'accelerazione istantanea, cioè l'accelerazione che il punto materiale P subisce punto per punto nel percorrere la traiettoria.

Il vettore accelerazione da una misura della rapidità con cui il vettore velocità cambia nel tempo. Sia  $\vec{v}(t)$  la velocità del punto materiale al tempo  $t_1=t$ , quando cioè si trova nella posizione  $P(t)$ , e  $\vec{v}(t + \Delta t)$  la velocità al tempo  $t_2=t + \Delta t$  quando si trova nella posizione  $P(t + \Delta t)$ .

Si definisce accelerazione media del punto materiale P nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  la quantità:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$\vec{a}_m$  è un vettore perché prodotto di uno scalare,  $1/\Delta t$ , per un vettore,  $\Delta \vec{v}$ .

Ovviamente se si vuole una descrizione più accurata di come varia la velocità nell'intervallo  $t_2 - t_1$ , si può suddividere l'intervallo  $\Delta t$  in intervalli sempre più piccoli ed in ciascuno di questi calcolare l'accelerazione media. Ma, così come abbiamo fatto per la velocità, possiamo anche

Si definisce accelerazione istantanea  $\bar{\mathbf{a}}$  al tempo  $t_1$ , il limite per  $\Delta t$  che tende a 0 del rapporto incrementale, cioè:

$$\bar{\mathbf{a}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_{t=t_1}$$

Come si intuisce dalla figura l'accelerazione  $\bar{\mathbf{a}}$ , come  $\bar{\mathbf{v}}$ , è diretta verso la concavità della traiettoria. Ripetendo l'operazione di limite per tutti i punti della traiettoria o, equivalentemente, per ogni istante di tempo  $t$ , si ottiene la funzione accelerazione istantanea.

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Tenendo conto dell'espressione della velocità in funzione del vettore posizione, si può anche scrivere:

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

Questa equazione vettoriale, è equivalente a tre equazioni scalari. Ricordando che sia la posizione, che la velocità e l'accelerazione possono essere scritte in termini delle loro componenti:

$$\mathbf{r} = x\bar{\mathbf{i}} + y\bar{\mathbf{j}} + z\bar{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{v} = v_x\bar{\mathbf{i}} + v_y\bar{\mathbf{j}} + v_z\bar{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{a} = a_x\bar{\mathbf{i}} + a_y\bar{\mathbf{j}} + a_z\bar{\mathbf{k}}$$

applicando le regole di derivazione della somma di funzioni prima e del prodotto di funzioni successivamente, e tenendo presente che i versori sono costanti nel sistema di riferimento usato per descrivere il moto, si ottiene:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} \\ v_z &= \frac{dz}{dt} \end{aligned}$$

Da cui segue:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad \begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}$$

La componente x dell'accelerazione è uguale alla derivata prima fatta rispetto al tempo della componente x della velocità, ed è anche uguale alla derivata seconda fatta rispetto al tempo della coordinata x.

Anche in questo caso possiamo osservare che le componenti non si sono mescolate, i moti delle proiezioni del punto P sui tre assi cartesiani sono indipendenti tra loro.

Possiamo perciò affermare che un moto qualunque nello spazio è equivalente alla sovrapposizione di tre moti rettilinei indipendenti sugli assi coordinati. Da questo viene fuori l'importanza dello studio dei moti rettilinei.

### ***Moto in tre dimensioni: il problema del moto.***

Supponiamo ora di conoscere l'accelerazione subita dal punto materiale P durante il suo moto, siamo in grado di risalire da questo alla equazione oraria del moto?

Se riscriviamo la definizione dell'accelerazione avendo cura di mettere a sinistra le quantità incognite e a destra le quantità note, otteniamo:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x$$

$$\frac{dv_y}{dt} = a_y$$

$$\frac{dv_z}{dt} = a_z$$

e poi passando allo spostamento:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z$$

Combinando le due, otteniamo la relazione tra l'accelerazione e lo spostamento.

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{a}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_x$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a_y$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = a_z$$

Allora risolvere il problema del moto significa risolvere le precedenti equazioni: l'equazione vettoriale o, equivalentemente, le tre equazioni scalari. Poiché in esse compaiono le derivate, queste equazioni si dicono *differenziali*. In particolare sono differenziali del second'ordine perché vi compaiono le derivate seconde.

Cosa significa risolvere queste equazioni?  
Significa trovare le funzioni

$x(t)$

$y(t)$

$z(t)$

che derivate due volte rispetto al tempo diano le funzioni:

$a_x(t)$

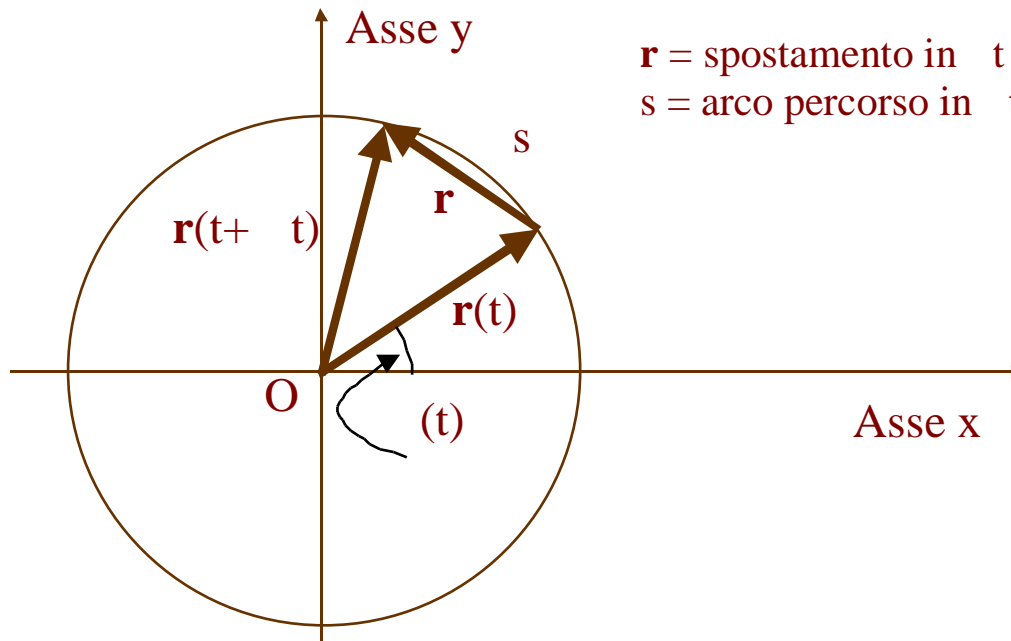
$a_y(t)$

$a_z(t)$

### **Il moto circolare uniforme.**

In natura ci sono diversi esempi di moto circolare o quasi circolare: il moto dei satelliti intorno alla terra, il moto della terra intorno al sole, il moto di particelle cariche in un campo magnetico uniforme. Ovviamente ci sono tantissimi esempi di moti che avvengono su traiettorie curve: lo studio del moto circolare uniforme ci aiuta a comprendere quel che succede in questo tipo di moti.

Il moto circolare sebbene sia un moto piano, in cui cioè per individuare la posizione del punto materiale sono richieste due distinte coordinate, può essere descritto utilizzando una sola variabile, per esempio l'angolo formato dal vettore posizione con l'asse delle  $x$  (vedi figura).



Utilizzando la definizione, la velocità scalare  $v_s$  all'istante di tempo  $t$ , che come abbiamo già osservato coincide con il modulo  $v$  della velocità all'istante di tempo  $t$ , sarà data da:



$$v_s = v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{s}{t}$$

Nel moto circolare uniforme il modulo della velocità, così come la velocità scalare è costante.

La velocità vettoriale invece dovendo essere in ogni istante tangente alla traiettoria, cambia con il passare del tempo. Nella figura sono disegnati i due vettori della velocità rispettivamente agli istanti di tempo  $t$  e  $t + \Delta t$ . Poiché il modulo della velocità è per ipotesi costante, i due vettori hanno la stessa lunghezza.

Se dunque la velocità (vettoriale) cambia, possiamo calcolarci la variazione di velocità nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ . Quindi la variazione di velocità  $\Delta \mathbf{v}$  sarà data da

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$$

e sarà rappresentato dal vettore  $\Delta \mathbf{v}$  della figura.

L'accelerazione media nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  sarà data da:

$$\bar{\mathbf{a}}_m = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

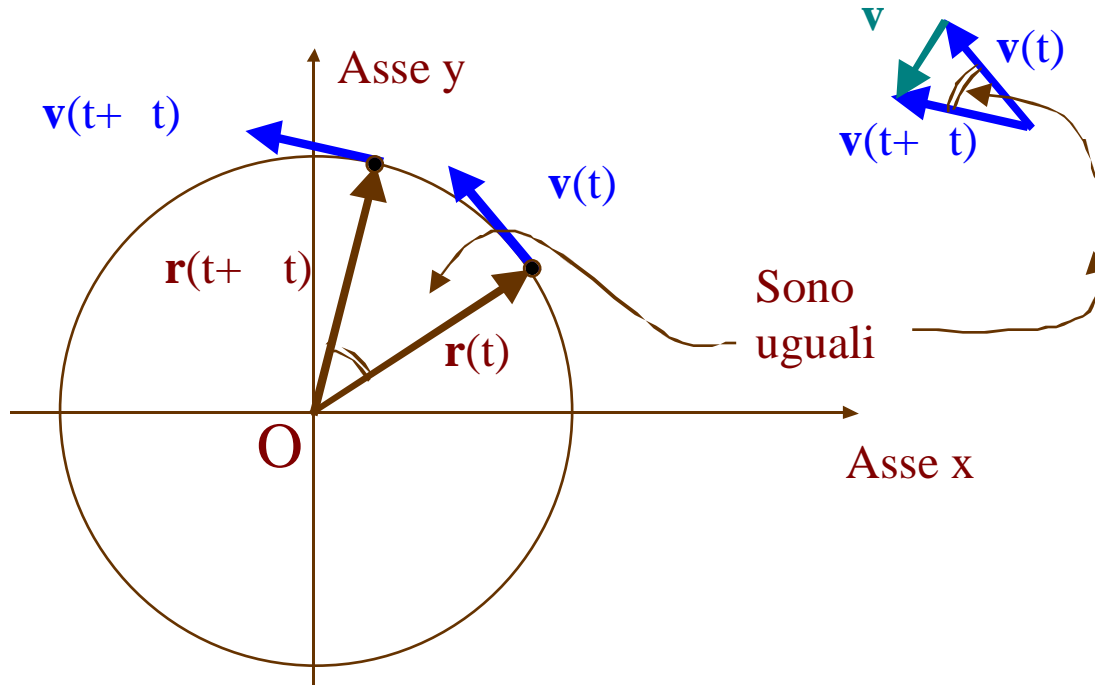
L'accelerazione media ha lo stesso verso di  $\Delta \mathbf{v}$  e cioè è diretto verso l'interno della traiettoria circolare.

Per calcolare l'accelerazione istantanea all'istante di tempo  $t$ , occorre fare il limite per  $\Delta t$  che tende a zero.

$$\bar{\mathbf{a}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

Valutiamo tale limite separatamente per quanto riguarda la direzione ed il verso e per quanto riguarda il modulo. La direzione ed il verso di  $\bar{\mathbf{a}}$  saranno rispettivamente il limite della direzione e del verso di  $\Delta \mathbf{v}$  quando  $\Delta t$  tende a zero. Osserviamo che per  $\Delta t$  che tende a zero anche l'angolo  $\theta$  tende a zero. Poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre  $180^\circ$ , poiché il triangolo di lati  $v(t)$ ,  $v(t + \Delta t)$  e  $\Delta \mathbf{v}$  è isoscele con angolo al vertice  $\theta$ ,

ne risulta che gli angoli alla base tendono a  $90^\circ$  quando  $t$  tende a zero.



L'accelerazione all'istante di tempo  $t$  forma un angolo di  $90^\circ$  con la velocità all'istante di tempo  $t$ . Dato che la velocità è tangente alla traiettoria circolare, l'accelerazione è diretta radialmente verso il centro della traiettoria circolare. Per questo motivo si chiama **accelerazione centripeta**.

Calcoliamo ora il modulo dell'accelerazione centripeta.

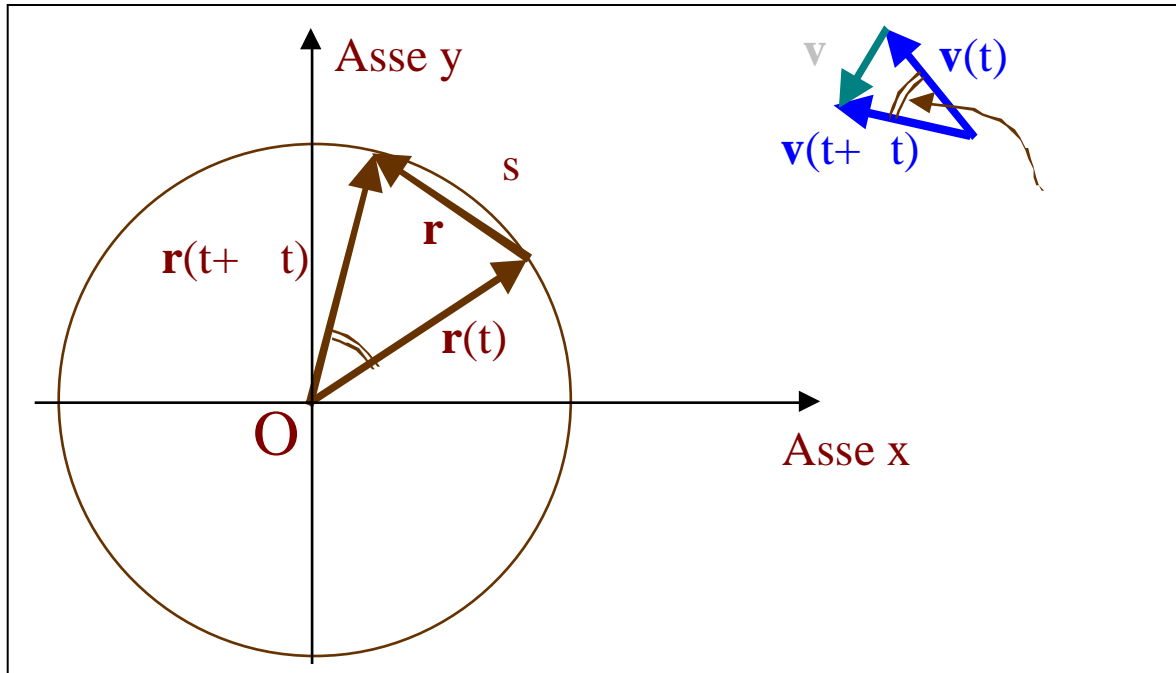
Facendo riferimento alla figura si nota che i due triangoli, il primo di lati  $\vec{r}(t)$ ,  $\vec{r}(t + \Delta t)$  e  $\vec{r}$ , ed il secondo di lati  $\vec{v}(t)$ ,  $\vec{v}(t + \Delta t)$  e  $\vec{v}$ , sono entrambi isosceli con lo stesso angolo al vertice: essi sono quindi simili.

Si può scrivere allora che:

$$\frac{|\dot{\mathbf{r}}|}{r} = \frac{|\mathbf{v}|}{v}$$

Pertanto

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\dot{\mathbf{v}}|}{t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{r}|v}{r} \frac{1}{t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v}{r} \frac{|\dot{\mathbf{r}}|}{t}$$



Ma quando  $\Delta t$  tende a zero,  $|\dot{\mathbf{r}}|$  tende a  $s$  il percorso effettuato. Allora:

$$\begin{aligned} a &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v}{r} \frac{|\dot{\mathbf{r}}|}{t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v}{r} \frac{s}{t} = \\ &= \frac{v}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s}{t} = \frac{v^2}{r} \end{aligned}$$

Possiamo concludere che il moto circolare uniforme è un moto accelerato,

l'accelerazione è diretta radialmente verso centro della circonferenza, e la sua intensità è proprio uguale a  $\frac{v^2}{r}$ , il

modulo della velocità al quadrato diviso il raggio della traiettoria circolare.

Osservazione.

Nel caso del moto circolare uniforme, quando cioè il modulo della velocità è costante, l'accelerazione è perpendicolare alla velocità, si parla di accelerazione centripeta o normale  $a_n$ .

Nel caso invece di un moto rettilineo, quando cioè la direzione della velocità è costante, la variazione del suo modulo è attribuibile ad una accelerazione avente la stessa direzione della velocità: il modulo della velocità aumenta se l'accelerazione è concorde con la velocità, diminuisce se discorde.

Sembra, in base a questa osservazione, che in generale l'accelerazione possa avere due componenti: la prima, parallela alla velocità, che provoca la variazione del modulo; l'altra, perpendicolare alla velocità, che provoca un cambiamento della sua direzione.

Quindi, in base a questa osservazione, ci aspettiamo che in un moto circolare non uniforme l'accelerazione abbia una componente tangente parallela alla velocità uguale alla derivata del modulo della velocità:

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

ed una perpendicolare alla velocità, l'accelerazione centripeta o normale, la cui intensità è uguale al quadrato del modulo della velocità nell'istante considerato diviso per il raggio della traiettoria circolare.

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

Si può verificare che in effetti è proprio così, anzi per qualunque traiettoria sia nel piano che nello spazio, l'accelerazione può essere sempre scomposta in due componenti<sup>1</sup>: l'accelerazione tangenziale, pari alla derivata del

---

<sup>1</sup> Sappiamo che la velocità è sempre tangente alla traiettoria:

$$\vec{v} = v\vec{u}_t$$

dove  $\vec{u}_t$  è il vettore tangente. L'accelerazione si ottiene derivando la velocità:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{u}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + v\frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

modulo della velocità, e la componente normale, perpendicolare alla velocità, diretta verso il centro di curvatura della traiettoria, di intensità pari al modulo della velocità al quadrato diviso il raggio di curvatura della traiettoria.

Per centro di curvatura e raggio di curvatura della traiettoria si intendono il centro ed il raggio della circonferenza che meglio approssima nel punto considerato la traiettoria data.

Se la traiettoria è rettilinea, il raggio di curvatura è infinito e pertanto l'accelerazione centripeta è uguale a zero, se invece la traiettoria è circolare il centro di curvatura ed il raggio di curvatura sono rispettivamente il centro ed il raggio della traiettoria circolare. Nei casi intermedi il centro di curvatura si troverà dalla parte della concavità della curva, quindi anche l'accelerazione centripeta sarà diretta verso la concavità della traiettoria.

In conclusione, ogni qualvolta **noi osserviamo un moto su una traiettoria non rettilinea**, possiamo immediatamente concludere che **il moto è accelerato** in quanto **esiste almeno la componente normale dell'accelerazione (perpendicolare alla traiettoria) diretta verso la concavità della traiettoria stessa, la cui intensità è pari al modulo della velocità al quadrato diviso il raggio di curvatura**. A questa si potrà aggiungere anche una componente tangenziale se il modulo della velocità non è costante.

## ***Moto armonico***

---

Il primo termine ci dà l'accelerazione tangente  $a_t = \frac{dv}{dt}$ .

Il secondo termine deve dar luogo all'accelerazione centripeta  $a_n = \frac{v^2}{r}$ . Impariamo quindi che:

$$\frac{d\mathbf{u}_t}{dt} = \frac{v}{r} \mathbf{u}_n = |\mathbf{u}_n$$

e cioè: la derivata del versore  $\mathbf{u}_t$  è perpendicolare ad  $\mathbf{u}_t$ , diretta verso la concavità della traiettoria secondo  $\mathbf{u}_n$ , proporzionale al modulo della velocità con cui cambia l'orientazione del versore tangente.

L'accelerazione nel moto circolare uniforme è diretta in verso opposto al vettore posizione  $\mathbf{r}$ . Se indichiamo con  $\mathbf{u}_r$  il versore del vettore posizione  $\mathbf{r}$ , allora l'accelerazione centripeta si può scrivere come

$$\mathbf{a} = -\frac{v^2}{r} \mathbf{u}_r$$

Tenendo conto che il vettore posizione  $\mathbf{r}$  può essere scritto come  $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$ , l'accelerazione diventa:  $\mathbf{a} = -\frac{v^2}{r^2} \mathbf{r}$

L'accelerazione nel moto circolare uniforme è quindi proporzionale, attraverso il coefficiente costante  $\frac{v^2}{r^2}$ , all'opposto della posizione,  $-\mathbf{r}$ .

L'equazione differenziale caratteristica del moto del punto P sulla traiettoria circolare con velocità di modulo costante, sarà data da:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{v^2}{r^2} \mathbf{r}$$

Cerchiamo di capire cos'è la costante  $\frac{v^2}{r^2}$ . Sappiamo che il modulo della velocità è costante trattandosi di un moto circolare uniforme, la lunghezza di arco percorsa nell'intervallo di tempo  $t$  sarà  $s = v t$ . Questo arco sottenderà un angolo  $\theta$  pari a  $\theta = \frac{v t}{r}$ .

Dividendo per  $t$  possiamo calcolare la velocità angolare  $\omega$ , cioè la rapidità con cui varia l'angolo formato dal vettore posizione con l'asse x:

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{v t / r}{t} = \frac{v}{r}$$

Si noti che la rapidità con cui cambia l'angolo formato dal vettore posizione con l'asse x è costante, vengono percorsi angoli uguali in intervalli di tempo uguali: questa è una conseguenza del fatto che il modulo della

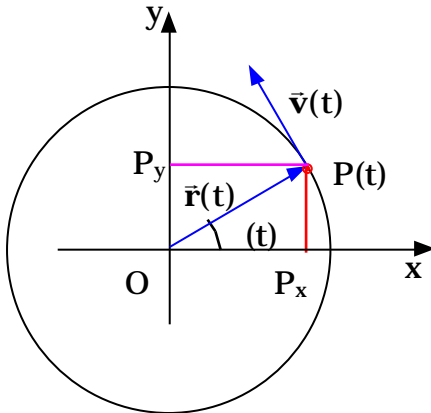
velocità è costante.

L'equazione precedente è una equazione vettoriale che, trattandosi di un moto piano, è equivalente a due equazioni scalari:

vettoriale	$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$	$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\omega^2 \vec{r}$
asse x	$a_x = -\omega^2 x$	$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$
asse y	$a_y = -\omega^2 y$	$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega^2 y$

Tali equazioni rappresentano le due equazioni differenziali cui obbediscono i moti rettilinei, rispettivamente sugli assi x e y, dei punti proiezione,  $P_x$  e  $P_y$ , del punto P mentre esso si muove di moto circolare uniforme sulla traiettoria circolare.

Le accelerazioni dei punti proiezione  $P_x$  e  $P_y$  sono opposte alle rispettive posizioni.



$\phi(t) = \omega t + \phi_0$   
 moto circolare  
 uniforme  
 $\omega = \text{costante}$

Le leggi orarie che descrivono il moto dei punti proiezione  $P_x$  e  $P_y$  costituiscono dunque due soluzioni delle equazioni differenziali del moto armonico. Noi possiamo determinare tali leggi orarie proiettando sugli assi cartesiani il punto P mentre si muove con velocità costante in modulo sulla traiettoria circolare.

$$x = R \cos(\omega t + \phi_0)$$

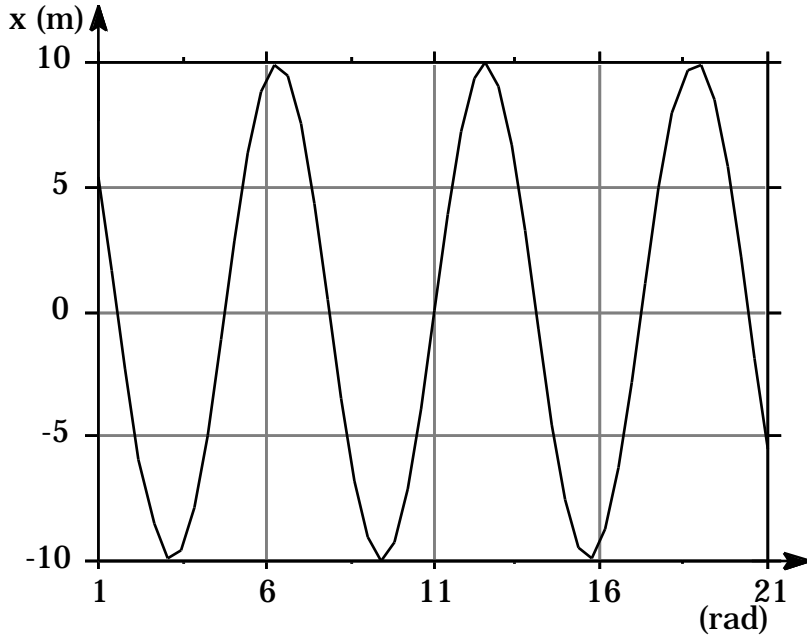
$$y = R \sin(\omega t + \phi_0)$$

in cui  $\phi_0$  rappresenta l'angolo formato dal vettore posizione con l'asse x all'istante di tempo  $t=0$  s.

Queste equazioni mostrano che il moto sull'asse delle x, così come quello sull'asse delle y, è un moto

periodico: infatti il punto proiezione  $P_x$  ripassa per la stessa posizione dopo un intervallo di tempo  $t$  tale che  $(t + t) - (t) = 2 \cdot t$ .  $t$  è dunque uguale al tempo impiegato dal punto  $P$  a percorrere un giro sulla circonferenza, e quindi coincide col periodo  $T$  del moto circolare uniforme.

Dalla definizione di velocità angolare ricaviamo la relazione tra il periodo  $T$  e  $\omega$ . Infatti poiché la velocità angolare è costante



$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

per qualunque valore dell'intervallo di tempo  $t$ .

In particolare se scegliamo l'intervallo di tempo  $t$  pari al periodo  $T$ , l'angolo percorso in questo intervallo di tempo è pari all'angolo giro (il punto  $P$  sulla traiettoria circolare ritorna nella stessa posizione dopo aver fatto un giro). Pertanto:

$$\omega = \frac{2\pi}{t} = \frac{2\pi}{T} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

L'andamento dello spostamento del punto proiezione  $P_x$  sull'asse delle  $x$ , in funzione dell'angolo formato dal vettore posizione con l'asse delle  $x$ , è riportato nel grafico mostrato al lato ( si è supposto che l'angolo formato dal vettore posizione con l'asse delle  $x$  all'istante  $t=0$

sia uguale ad 1 radiante). Poiché l'angolo è una funzione lineare del tempo, l'andamento della posizione del punto  $P_x$  in funzione del tempo sarà del tutto simile a quello mostrato nel grafico al lato.

Richiamiamo ancora una volta l'attenzione sul fatto che le espressioni della velocità e dell'accelerazione per il moto circolare, che abbiamo testé derivato, sono strettamente dipendenti dal fatto di aver scelto l'origine del sistema di riferimento nel centro della traiettoria: infatti per una scelta diversa,  $r$  non sarebbe stato costante, la velocità avrebbe avuto entrambe le componenti  $v_r$  e  $v_t$ , etc.



### Considerazioni conclusive.

L'aver identificato che i punti proiezione  $P_x$  e  $P_y$  del punto P che si muove di moto circolare uniforme obbediscono all'equazione differenziale del moto armonico (accelerazione proporzionale all'opposto della posizione) ci fornisce un metodo per la determinazione delle soluzioni dell'equazione differenziale del moto armonico.

Se quindi noi ci imbattiamo in un moto in cui l'accelerazione è proporzionale all'opposto della posizione:

$$a_x = - \omega_p^2 x \quad \frac{d^2x}{dt^2} = - \omega_p^2 x$$

la legge oraria corrispondente sarà del tipo:

$$x(t) = A \cos(\omega_p t + \phi_0)$$

dove

$A$  = ampiezza del moto armonico (costante positiva)

$\omega_p$  = pulsazione angolare del moto armonico (costante positiva, ha le dimensioni di una velocità angolare)

$\phi_0$  = fase del moto armonico (è un angolo, l'argomento della funzione coseno)

$\phi_0$  = fase iniziale (valore della fase all'istante di tempo  $t=0$ ).

La costante  $\omega_p$  compare nell'equazione differenziale. Le altre due costanti  $A$  e  $\phi_0$  vanno determinate sulla base delle condizioni iniziali.

La legge oraria  $x(t) = A \cos(\omega_p t + \phi_0)$  rappresenta un moto che avviene sull'asse delle  $x$  tra il punto di coordinata  $-A$  e il punto di coordinata  $+A$ .

Il punto materiale si troverà nella posizione  $x=-A$  quando la fase  $(\omega_p t + \phi_0)$  è uguale a  $\pi$ : infatti  $\cos(\pi)=-1$ .

Si troverà nella posizione  $x=A$  quando la fase  $(\omega_p t + \phi_0)$  è uguale a  $0$ , infatti  $\cos(0)=1$ .

Si troverà nella posizione  $x=0$  quando la fase  $(\omega_p t + \phi_0)$  è uguale a  $\pi/2$  oppure  $3\pi/2$ . Infatti per questi angoli il

coseno è nullo. La fase assumerà il valore  $\pi/2$  quando il punto materiale passa per l'origine andando nella direzione negativa dell'asse x, assumerà il valore  $3\pi/2$  quando passa per l'origine muovendosi nella direzione positiva dell'asse x.

Calcolo dell'ampiezza e della fase iniziale dalle condizioni iniziali.

Supponiamo che all'istante iniziale il moto armonico parta dalla posizione iniziale  $x_0$  con velocità  $v_{x0}$ . Vogliamo determinare le costanti A e  $\phi_0$ .

Dalla legge oraria possiamo determinare la velocità in funzione del tempo. Per definizione sappiamo che:

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\left(A\cos\left(\omega_p t + \phi_0\right)\right)}{dt}$$

Poniamo  $x(t) = A\cos(\omega_p t + \phi_0)$ . Sostituendo si ottiene:

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\left(A\cos\left(\omega_p t + \phi_0\right)\right)}{dt} = \frac{d\left(A\cos\left(\omega_p t + \phi_0\right)\right)}{d\left(\omega_p t + \phi_0\right)} \frac{d\left(\omega_p t + \phi_0\right)}{dt} = \frac{d\left(A\cos\left(\omega_p t + \phi_0\right)\right)}{d\left(\omega_p t + \phi_0\right)} \omega_p =$$

$$= A \frac{d\cos}{d\left(\omega_p t + \phi_0\right)} \omega_p = A(-\sin) \omega_p = -A \omega_p \sin\left(\omega_p t + \phi_0\right)$$

Noi vogliamo che all'istante di tempo  $t=0$  secondi siano verificate le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} x_0 &= A\cos \phi_0 & x_0 &= A\cos \phi_0 \\ v_{x0} &= -A \omega_p \sin \phi_0 & \frac{v_{x0}}{\omega_p} &= -A\sin \phi_0 \end{aligned}$$

Quadrando e sommando membro a membro si ottiene:

$$x_o^2 + \frac{v_{xo}^2}{p^2} = A^2 \cos^2 \phi_o + A^2 \sin^2 \phi_o = A^2 (\cos^2 \phi_o + \sin^2 \phi_o) = A^2$$

$$A = \sqrt{x_o^2 + \frac{v_{xo}^2}{p^2}}$$

E infine dividendo la seconda per la prima si ottiene:

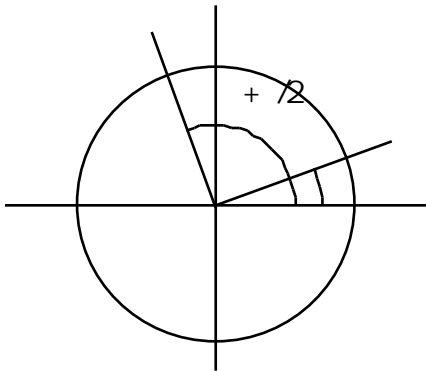
$$-\tan \phi_o = \frac{v_{xo}/p}{x_o} \quad \phi_o = \text{arccotan} \left( -\frac{v_{xo}}{x_o p} \right)$$

Si osservi infine che l'aver scelto come soluzione dell'equazione differenziale del moto armonico la legge oraria basata sul coseno, non ha niente di magico: anche quella con il seno va altrettanto bene. Cioè le due soluzioni

$$x(t) = A \cos \left( p t + \phi_o \right)$$

$$x(t) = A \sin \left( p t + \phi_o \right)$$

sono equivalenti. Le due soluzioni sono infatti identiche quando si sceglie opportunamente l'angolo iniziale  $\phi_o$ . Dalla trigonometria sappiamo infatti che:



$$\cos \left( \phi_o + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \phi_o$$

$$x = A \cos \left( p t + \phi_o \right) = A \sin \left( p t + \phi_o + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\phi_o' = \phi_o + \frac{\pi}{2}$$

## Moti relativi.

Per concludere lo studio della cinematica, affrontiamo in questo paragrafo il problema della determinazione delle leggi di trasformazione tra sistemi di riferimento diversi delle grandezze cinematiche: posizione, velocità ed accelerazione.

Cerchiamo cioè di rispondere alla seguente domanda: supponiamo di saper descrivere il moto di un punto materiale in un particolare sistema di riferimento, conosciamo cioè, come funzioni del tempo, la posizione, la velocità e l'accelerazione del punto materiale rispetto ad un particolare osservatore, in un particolare sistema di riferimento, possiamo determinare con questi dati i valori della posizione, velocità ed accelerazione del punto materiale misurate da un differente osservatore, in un altro sistema di riferimento? Supponiamo per esempio di aver determinato la posizione di Marte, la sua velocità e la sua accelerazione, rispetto alla Terra, è possibile con queste informazioni determinare la posizione, la velocità e l'accelerazione di Marte rispetto al Sole?

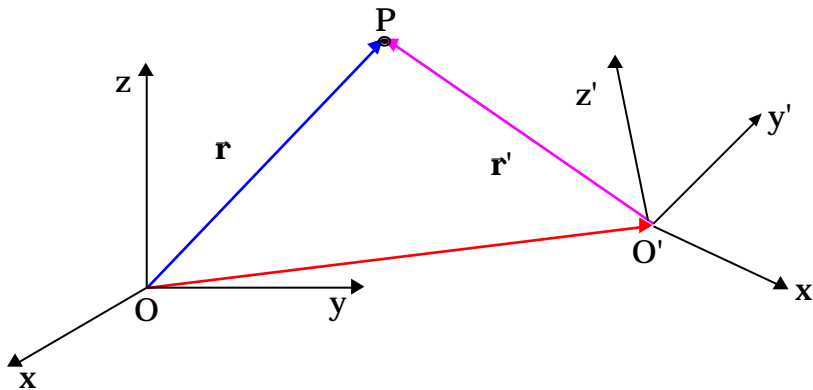
Per determinare le leggi di trasformazione consideriamo due sistemi di riferimento cartesiani, il primo con l'origine in  $O$  e assi  $x, y, z$ , il secondo con origine in  $O'$  e  $x', y', z'$  (leggi  $O$ -primo,  $x$ -primo,  $y$ -primo,  $z$ -primo).

Indicheremo la prima terna di assi come la terna  $Oxyz$  (senza apostrofo), la seconda la chiameremo  $O'x'y'z'$  (con gli apostrofi).

Spesso alla prima terna ci si riferisce come alla terna "assoluta", alla seconda terna come terna "relativa". Deve essere però chiaro che la terna assoluta non ha alcuna proprietà in più rispetto a quella relativa, ed i ruoli delle due terne possono essere scambiati.

Indichiamo con  $\mathbf{r}$  la posizione del punto materiale  $P$  nel sistema di riferimento  $Oxyz$  e con  $\mathbf{r}'$  la posizione sempre del punto  $P$  nel sistema di riferimento  $O'x'y'z'$ .

Come appare dalla figura, la relazione tra  $\mathbf{r}$  ed  $\mathbf{r}'$  è data da

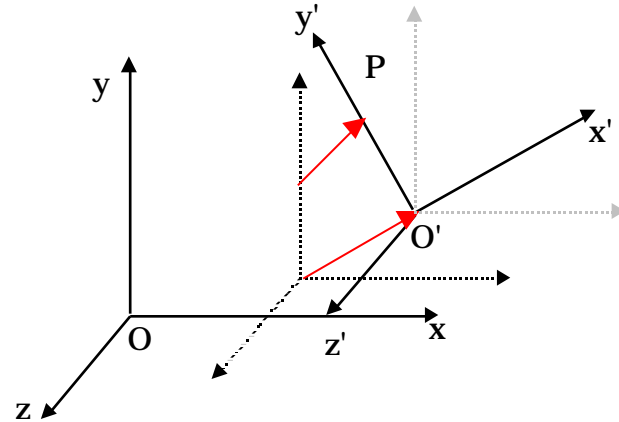
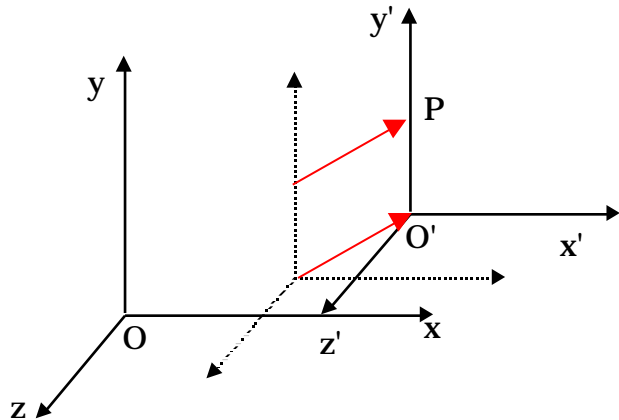
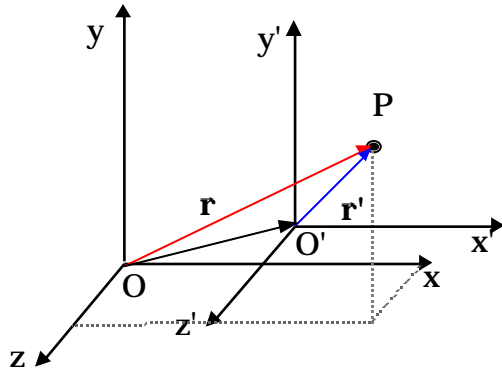


$$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}' + \mathbf{OO}'$$

dove il vettore  $OO'$  è il vettore posizione dell'origine  $O'$  della terna  $O'x'y'z'$  nel sistema di riferimento  $Oxyz$ .

Il caso rappresentato in figura è quello più generale possibile, in cui con il passare del tempo cambia sia la posizione dell'origine  $O'$  del secondo sistema rispetto al primo, ma anche le orientazioni degli assi del secondo sistema rispetto al primo.

Noi non affronteremo il caso più generale, ma ci limiteremo a considerare il caso di due sistemi di riferimento in cui varia solo la posizione dell'origine del secondo sistema rispetto al primo, mentre l'orientazione degli assi rimane costante. Tanto per fissare le idee supporremo che gli assi  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  siano costantemente paralleli ai corrispondenti assi  $x$ ,  $y$ ,  $z$  del primo sistema. In questa ipotesi, rappresentata in figura, i versori  $\vec{i}'$ ,  $\vec{j}'$ ,  $\vec{k}'$  della seconda terna coincidono con i corrispettivi versori  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  della prima terna.



Si osservi preliminarmente che se l'origine  $O'$  della seconda terna subisce un certo spostamento in un fissato intervallo di tempo, allora tutti i punti dello spazio, supponendo che vengano trascinati dal moto della terna, subiscono lo stesso spostamento (questo non è più vero se noi permettiamo dei cambiamenti nella orientazione

degli assi, ossia se siamo in presenza di rotazioni). Un moto che avviene in questo modo, senza rotazioni, si chiama di “pura “ traslazione<sup>2</sup>.

Facendo riferimento alla figura della pagina precedente la posizione del punto materiale

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{r}} &= \bar{\mathbf{r}}' + \mathbf{OO}' \\ x &= x' + x_0' \\ y &= y' + y_0' \\ z &= z' + z_0'\end{aligned}$$

dove  $x_0'$ ,  $y_0'$ , e  $z_0'$  sono le coordinate dell'origine  $O'$  del secondo sistema di riferimento come misurate dal primo sistema.

Si osservi che:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{r}} &= x\bar{\mathbf{i}} + y\bar{\mathbf{j}} + z\bar{\mathbf{k}} & x &= x' + x_0' \\ \bar{\mathbf{r}}' &= x'\bar{\mathbf{i}}' + y'\bar{\mathbf{j}}' + z'\bar{\mathbf{k}}' = x\bar{\mathbf{i}} + y\bar{\mathbf{j}} + z\bar{\mathbf{k}} & y &= y' + y_0' \\ \mathbf{OO}' &= x_0'\bar{\mathbf{i}} + y_0'\bar{\mathbf{j}} + z_0'\bar{\mathbf{k}} & z &= z' + z_0'\end{aligned}$$

Cerchiamo ora di determinare la relazione tra le velocità misurate nei due sistemi di riferimento. Per definizione noi sappiamo che

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d(x\bar{\mathbf{i}} + y\bar{\mathbf{j}} + z\bar{\mathbf{k}})}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\bar{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\bar{\mathbf{k}}$$

in cui l'ultimo passaggio si giustifica per il fatti che i versori  $\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}$  sono costanti nel sistema di riferimento in cui stiamo calcolando la velocità, cioè nel sistema di riferimento in cui stiamo eseguendo la derivata.

Analogamente per il secondo sistema si avrà:

---

<sup>2</sup> In generale un qualunque spostamento della terna  $O'x'y'z'$  può essere immaginato come la sovrapposizione di una “pura “ traslazione più una rotazione.

$$\vec{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')}{dt} = \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$$

Anche in questo caso l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che nel secondo sistema di riferimento i versori  $\vec{i}'$ ,  $\vec{j}'$ ,  $\vec{k}'$  sono costanti.

La velocità di O' rispetto a O sarà invece data da:

$$\vec{v}_{O'} = \frac{dOO'}{dt} = \frac{d(x_{O'}\vec{i}' + y_{O'}\vec{j}' + z_{O'}\vec{k}')}{dt} = \frac{dx_{O'}}{dt}\vec{i}' + \frac{dy_{O'}}{dt}\vec{j}' + \frac{dz_{O'}}{dt}\vec{k}'$$

Calcoliamo ora la velocità del punto P nel sistema di riferimento Oxyz utilizzando la relazione tra i vettori posizione nei due sistemi di riferimento:

$$\vec{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}' + OO'}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{dOO'}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \vec{v}_{O'}$$

La velocità  $\vec{v}$  è data dalla velocità dell'origine del secondo sistema di riferimento  $\vec{v}_{O'}$  più la derivata di  $\mathbf{r}'$  fatta rispetto al tempo. Questa derivata, in generale, può essere diversa dalla velocità  $\vec{v}'$ , in quanto essa deve essere valutata nel sistema di riferimento Oxyz e, in questo sistema, i versori  $\vec{i}'$ ,  $\vec{j}'$ ,  $\vec{k}'$  possono non essere costanti. Se così fosse, nel calcolare la derivata, oltre a  $\vec{v}'$ , comparirebbero dei termini derivanti dalla derivata non nulla dei versori  $\vec{i}'$ ,  $\vec{j}'$ ,  $\vec{k}'$ .

Nel nostro caso, però, stiamo supponendo che i versori  $\vec{i}'$ ,  $\vec{j}'$ ,  $\vec{k}'$  siano sempre costantemente paralleli ai versori  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ , pertanto, in questa ipotesi (e solo in questa ipotesi), quando valutiamo la derivata di  $\mathbf{r}'$  essa risulterà essere proprio uguale a  $\vec{v}'$ .

In conclusione:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{v}} &= \bar{\mathbf{v}}' + \bar{\mathbf{v}}_{O'} \\ v_x &= v'_x + v_{xO'} \\ v_y &= v'_y + v_{yO'} \\ v_z &= v'_z + v_{zO'}\end{aligned}$$

In maniera del tutto analoga possiamo procedere nel calcolo dell'accelerazione:

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(\mathbf{v}' + \mathbf{v}_{O'})}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{O'}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \bar{\mathbf{a}}_{O'}$$

e con un analogo ragionamento otteniamo che  $\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \bar{\mathbf{a}}'$  è proprio uguale all'accelerazione del punto P misurata nel sistema di riferimento  $O'x'y'z'$ .

Quindi, quando i due sistemi si muovono in modo tale che gli assi della terna  $O'x'y'z'$  mantengono una orientazione fissa rispetto a quelli della terna  $Oxyz$ , per esempio sono sempre paralleli ai corrispondenti assi della terna  $Oxyz$ , l'accelerazione misurata nel sistema  $Oxyz$  è la somma dell'accelerazione dell'origine  $O'$  del secondo sistema più l'accelerazione misurata nel secondo sistema:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{a}} &= \bar{\mathbf{a}}' + \bar{\mathbf{a}}_{O'} \\ a_x &= a'_x + a_{xO'} \\ a_y &= a'_y + a_{yO'} \\ a_z &= a'_z + a_{zO'}\end{aligned}$$

Come caso particolare si deduce quindi che se l'accelerazione dell'origine  $O'$  della seconda terna è uguale a zero, cioè quando il moto della terna con gli apostrofi rispetto all'altra terna è traslatorio uniforme, l'accelerazione del punto materiale misurata dai due sistemi di riferimento ha lo stesso valore.

$$\bar{\mathbf{a}}_{O'} = 0 \quad \bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}'$$

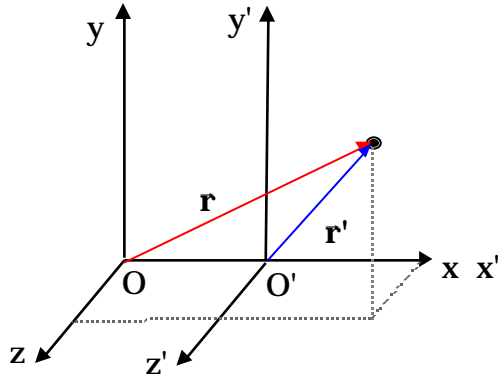
Viceversa se l'accelerazione dell'origine  $O'$  della terna  $O'x'y'z'$  è diversa da zero, ovvero se le orientazioni dei suoi assi cambiano rispetto a quelle della prima terna, l'accelerazione del punto materiale misurata dai due sistemi



di riferimento è differente.

Può succedere quindi che un punto materiale abbia accelerazione nulla in un sistema di riferimento ed accelerazione non nulla in un diverso sistema di riferimento a causa delle proprietà del secondo sistema di riferimento.

Se l'origine  $O'$  del secondo sistema si muove mantenendosi sempre sull'asse delle  $x$ , vedi figura, le leggi di trasformazione diventano:



$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{OO}'$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{O'}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{O'}$$

$$x = x' + x_{O'}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$v_x = v'_{x'} + v_{xO'}$$

$$v_y = v'_{y'}$$

$$v_z = v'_{z'}$$

$$a_x = a'_{x'} + a_{xO'}$$

$$a_y = a'_{y'}$$

$$a_z = a'_{z'}$$

L'ultima di queste, se la velocità dell'origine  $O'$  è costante, diventa:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}'$$

$$a_x = a'_{x'}$$

$$a_y = a'_{y'}$$

$$a_z = a'_{z'}$$

Le relazioni  $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{OO}'$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{O'}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}'$$

sono anche indicate con il nome di "trasformazioni di Galilei".

### Moto di traslazione uniforme lungo l'asse x.

Supponiamo che all'istante di tempo  $t=0$  la terna fissa, senza apostrofi, e quella mobile coincidano. Supponiamo poi che l'origine  $O'$  della terna mobile si muova con velocità costante lungo l'asse x. Poiché il moto della seconda terna è di pura traslazione gli assi  $x$  ed  $x'$ ,  $y$  ed  $y'$ ,  $z$  e  $z'$  risulteranno sempre paralleli tra loro, quindi ad ogni istante di tempo saranno verificate le seguenti relazioni:

$$\vec{i} = \vec{i}' \quad \vec{j} = \vec{j}' \quad \vec{k} = \vec{k}'$$

Facendo riferimento alla figura i vettori posizione nei due sistemi di riferimento sono dati da:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}_z$$

$$OO' = x_0\vec{i}$$

Poiché deve essere:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} =$$

$$= \vec{r}' + OO' = x'\vec{i}_x + y'\vec{j} + z'\vec{k} + x_0\vec{i}$$

Otteniamo le seguenti relazioni tra le componenti:

$$x = x' + x_0,$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

Osserviamo infine che  $x_0$  può essere espresso in termini della velocità di traslazione,  $v_{x_0}$ . Tendo conto delle condizioni iniziali, le due terne coincidono all'istante  $t=0$ , la relazione cercata è:

$$x_O = v_{xO} t$$

Questa ci permette di riscrivere le relazioni tra le componenti nel seguente modo:

$$x = x' + v_{xO} t$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

Per quanto riguarda le velocità sappiamo che:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_O$$

$$v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} = v'_x \mathbf{i} + v'_y \mathbf{j} + v'_z \mathbf{k} + v_{xO} \mathbf{i}$$

Da cui si ottiene per le componenti:

$$v_x = v'_x + v_{xO}$$

$$v_y = v'_y$$

$$v_z = v'_z$$

Infine per l'accelerazione  $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$ , e quindi:

$$a_x = a'_x$$

$$a_y = a'_y$$

$$a_z = a'_z$$

Esaminiamo ora alcuni moti e vediamo come appaiano dai due sistemi di riferimento in moto relativo traslatorio uniforme.

Caso I: Il punto materiale si muove con velocità costante  $v_{px}$  ( $v_{py} = v_{pz} = 0$ ) lungo l'asse x, la sua legge oraria è data da  $x_p = x_{p0} + v_{px} t$  ( $y_p = z_p = 0$ ).

Utilizzando le leggi di trasformazione:

$$x = x' + v_{xO'} t$$

$$v_x = v'_x + v_{xO'}$$

$$y = y'$$

$$v_y = v'_y$$

$$z = z'$$

$$v_z = v'_z$$

Otteniamo che:

$$x'_P = x_{P0} + v_{xP} t - v_{xO'} t = x_{P0} + (v_{xP} - v_{xO'}) t$$

$$v'_{xP} = v_{xP} - v_{xO'}$$

$$y'_P = y_P = 0$$

$$v'_{yP} = 0$$

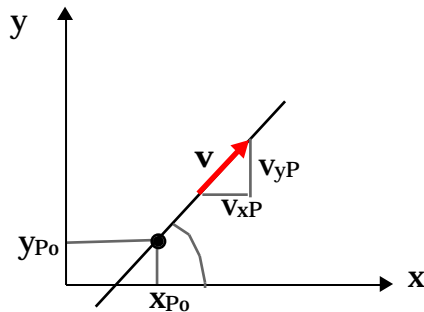
$$z'_P = z_P = 0$$

$$v'_{zP} = 0$$

Da cui possiamo dedurre le seguenti informazioni: il moto nella terna con gli apostrofi è ancora un moto rettilineo uniforme che avviene lungo l'asse  $x'$ ; la velocità del punto materiale nel secondo sistema di riferimento è  $v_{xP} - v_{xO'}$ . Se per esempio abbiamo una automobile che percorre una strada rettilinea con velocità  $v_{xP}$ , essa ci apparirà ferma se osservata da un'altra automobile che procede nello stesso senso di marcia con la stessa velocità. Sembrerà che possieda una velocità doppia se osservata da una automobile che procede con la stessa velocità ma in verso opposto.

Caso II: supponiamo ora che il punto materiale si muova di moto rettilineo uniforme nel piano  $xy$ ; siano  $v_{xP}$  e  $v_{yP}$  le due componenti della velocità ( $v_{zP} = 0$ ), mentre la legge oraria è:

$$x_P = x_{P0} + v_{xP} t \quad y_P = y_{P0} + v_{yP} t \quad z_P = 0$$



La pendenza della traiettoria, che corrisponde alla tangente dell'angolo formato dalla velocità con l'asse delle  $x$ , è data da:

$$\tan = \frac{v_{yP}}{v_{xP}}$$

Si vede che la pendenza non dipende dal tempo, come appunto deve essere nel caso di una retta.

Utilizzando le leggi di trasformazione:

$$x = x' + v_{xO'} t$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$v_x = v'_x + v_{xO'}$$

$$v_y = v'_y$$

$$v_z = v'_z$$

si ottiene:

$$x'_P = x_{Po} + v_{xP} t - v_{xO'} t = x_{Po} + (v_{xP} - v_{xO'}) t$$

$$y'_P = y_{Po} + v_{yP} t$$

$$z'_P = 0$$

$$v'_{xP} = v_{xP} - v_{xO'}$$

$$v'_{yP} = v_{yP}$$

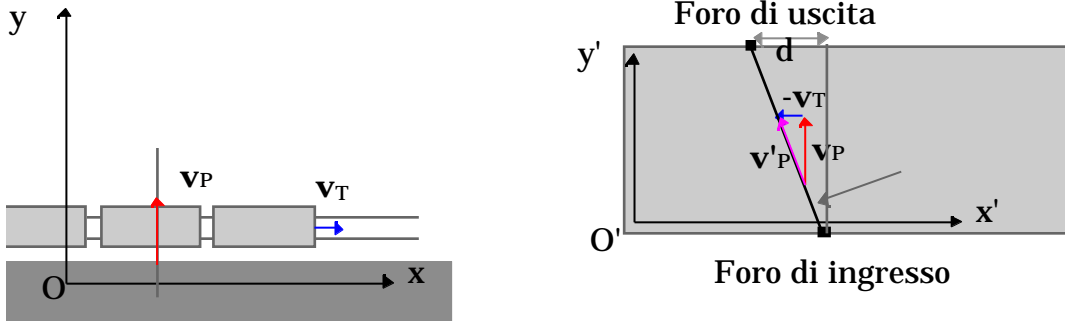
$$v'_{zP} = 0$$

La pendenza della traiettoria sarà data da:

$$\tan \alpha' = \frac{v'_{yP}}{v'_{xP}} = \frac{v_{yP}}{v_{xP} - v_{xO'}}$$

Come si vede la pendenza non dipende dal tempo, e questo ci dice che la traiettoria è ancora rettilinea anche nel sistema di riferimento con gli apostrofi. Le pendenze della traiettoria nei due sistemi di riferimento, cioè la tangente dell'angolo formato rispettivamente con l'asse  $x$  ed  $x'$ , sono diverse.

Una persona ferma sul marciapiede della stazione spara un proiettile perpendicolarmente ai binari mentre sta transitando un treno alla velocità di 40km/h. La velocità di uscita del proiettile dalla canna della pistola è di 100 m/s. Il proiettile entra ed esce dal treno lasciando due fori nei finestrini posti sui lati opposti del treno senza diminuire apprezzabilmente la sua velocità. Qual è la distanza del foro di uscita del proiettile dal punto direttamente opposto al foro di ingresso se il treno è largo 2 m?



In questo caso faremo coincidere la terna senza apostrofi con quella legata al marciapiede della stazione con l'asse  $x$  parallelo ai binari. In questo sistema di riferimento il treno ha velocità  $\mathbf{v}_T$  diretta lungo l'asse  $x$ , ed il proiettile viene sparato nella direzione dell'asse  $y$  con velocità  $\mathbf{v}_P$ . La terna con gli apostrofi è invece legata al vagone ferroviario e quindi la velocità dell'origine  $O'$  rispetto alla terna fissa coincide con la velocità del treno  $\mathbf{v}_T$ . In base alla legge di trasformazione delle velocità

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{O'}$$

si ottiene:

$$\mathbf{v}'_P = \mathbf{v}_P - \mathbf{v}_T$$

la velocità del proiettile nel sistema legato al treno è la somma vettoriale della velocità del proiettile rispetto al marciapiede della stazione ed il vettore "meno velocità del treno". Tale somma vettoriale è rappresentata nella seconda figura. Se ne deduce che

$$\tan g = \frac{v_T}{v_P} = \frac{40 \frac{1000}{3600}}{100} = \frac{1}{9}$$

La distanza d richiesta è:

$$d = \text{larghezza}_{\text{treno}} \times \tan g = 2 \frac{1}{9} = 0.22\text{m}$$

Caso III: il punto materiale si muove, nel sistema con gli apostrofi, di moto rettilineo uniformemente accelerato, per esempio lungo l'asse  $y'$ .

La legge oraria nel sistema con gli apostrofi, supponendo che il moto del punto materiale inizi all'istante 0 con velocità nulla, è data da:

$$y'_P = y'_{P_0} + \frac{1}{2} a'_{yP} t^2 \qquad v'_{yP} = a'_{yP} t \qquad a'_{yP} = \text{cost}$$

Nel sistema senza apostrofi, utilizzando le leggi di trasformazione, si ha:

$$\begin{aligned} x_P &= v_{xO'} t & v_{xP} &= v_{xO'} \\ y_P &= y'_{P_0} + \frac{1}{2} a_{yP} t^2 & v_{yP} &= a_{yP} t \\ z_P &= 0 & v_{zP} &= 0 \end{aligned}$$

La pendenza della traiettoria nel sistema senza apostrofi è data da:

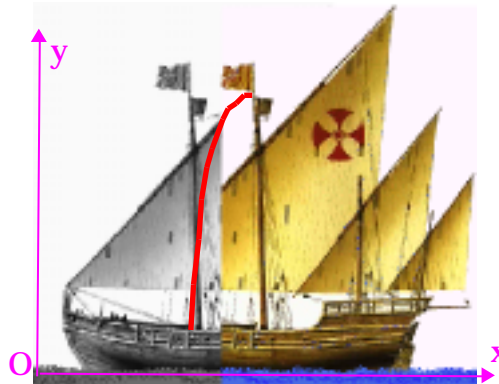
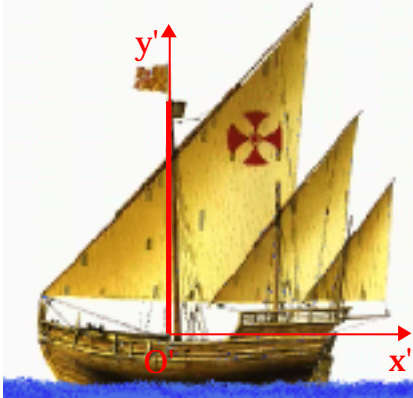
$$\tan g = \frac{v_{yP}}{v_{xP}} = \frac{a_{yP} t}{v_{xO'}}$$

La pendenza risulta essere dipendente dal tempo, e questo indica che la traiettoria nel sistema senza apostrofi non è rettilinea.

Naturalmente l'accelerazione misurata dai due sistemi di riferimento è la stessa.

Come esempio si può fare riferimento al moto di un grave che viene lasciato cadere dalla sommità dell'albero di una nave. Per un osservatore posto sulla nave il moto appare rettilineo uniformemente accelerato lungo l'asse verticale  $o$ , in altri termini, lungo l'albero. Un osservatore posto sulla banchina del porto, rispetto al quale la nave si muove con velocità costante, osserverà un moto che è la composizione del moto di caduta nella direzione verticale con il moto uniforme della nave nella direzione orizzontale: il moto del grave che cade dall'albero della nave apparirà dunque come il moto del proiettile (vedi il prossimo capitolo) e la sua traiettoria sarà parabolica.

Si osservi che entrambi gli osservatori vedono giungere il corpo nello stesso punto sulla tolda della nave, cioè ai piedi dell'albero: non è possibile distinguere quale dei due osservatori sia in moto e quale in quiete.





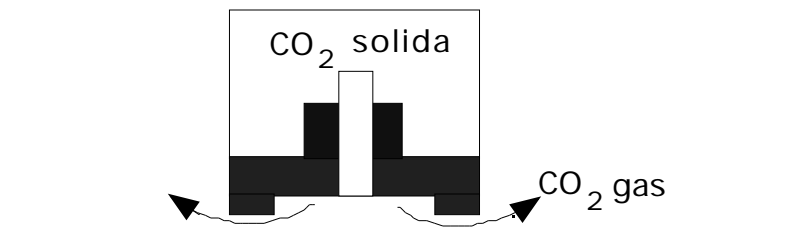
# DINAMICA

## **Prima legge di Newton o principio di inerzia.**

Per studiare correttamente un fenomeno fisico, bisognerebbe essere in grado di riconoscere e di mettere in evidenza gli elementi fondamentali, cioè quelli che intervengono in maniera determinante nello svolgimento del processo, per distinguerli da quegli elementi che invece ne mascherano la vera natura perturbando il processo stesso. Tutto questo, ovviamente, non è sempre possibile. Un esempio è rappresentato dalle difficoltà incontrate nella ricerca delle cause che determinano il moto. L'osservazione dei moti terrestri, per esempio la fatica che occorre per spostare il proprio corpo o altri oggetti, aveva portato alla conclusione che per mantenere un oggetto in moto con velocità costante fosse necessaria un'azione esterna. Infatti si osservava che un corpo in moto, abbandonato a sé stesso, non soggetto a nessuna apparente azione esterna, prima o poi veniva ridotto alla quiete. Fu Galilei il primo a capire come stavano veramente le cose.

Supponiamo di disporre di un piano orizzontale, per esempio il piano della cattedra, e di un corpo con una faccia piana che poggia sul piano stesso. Se diamo una spinta al corpo, possiamo osservare che il corpo si mette in movimento, si muove, *nella direzione della spinta*, di moto rettilineo per un certo tratto e dopo un po' si ferma. Se adesso ripetiamo l'esperimento avendo cura di levigare per bene sia il piano che la superficie di contatto del corpo col piano, di introdurre dei lubrificanti tra il corpo e il piano, osserviamo che, mano a mano che aumenta la levigatezza, la lubrificazione, il moto dura più a lungo. Questi accorgimenti, dunque, ci permettono di ridurre quegli effetti indesiderati che tendono a mascherare la vera natura del fenomeno.

E' possibile attualmente costruire dispositivi in cui le perturbazioni esterne sono ridotte al minimo.



Si può prendere un disco sormontato da un serbatoio contenente anidride carbonica allo stato solido (ghiaccio secco). Un sottile canale collega il serbatoio con la faccia inferiore del disco. Alla temperatura ambiente,

l'anidride carbonica sublima ed il gas per sfuggire nell'atmosfera deve sollevare il disco. Il disco risulta così sospeso al di sopra di un cuscinetto d'aria. Siccome la causa maggiore delle perturbazioni del moto derivano dal contatto del corpo con il piano, il cuscinetto d'aria tra il disco ed il piano rimuove tali perturbazioni quasi completamente. Ed in effetti usando tale dispositivo si vede che il moto del corpo, dopo la spinta iniziale, rallenta molto lentamente. Si può pensare allora che questo rallentamento residuo sia dovuto all'impossibilità di eliminare tutte le possibili perturbazioni, per esempio non è stata eliminata la resistenza dell'aria. Da osservazioni di questo tipo, ma anche dalle osservazioni astronomiche sul moto di oggetti lontani da tutti gli altri oggetti, si può concludere che:

***Un corpo isolato (non sottoposto ad azioni esterne) persiste nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.***

Questo enunciato costituisce il primo principio della dinamica. Esso fu stabilito da Galilei ed assunto da Newton come il primo dei tre principi fondamentali, le leggi di Newton, da cui poi si deriva tutta la meccanica classica.

Nella realtà non esiste un corpo isolato e come tale non sottoposto ad azioni esterne, potrebbe esserlo solo se fosse l'unico corpo nell'universo, ma sappiamo che non è così. Se si pensa poi al corpo che si muove sul piano orizzontale, e che abbiamo usato per formulare il primo principio della dinamica, è difficile credere che non sia sottoposto ad alcuna azione esterna quando è sicuramente soggetto alla forza di attrazione della terra. (Daremo comunque più avanti una giustificazione del motivo per cui il primo principio della dinamica vale anche in questo caso). Deve essere chiaro che il primo principio, così come gli altri due che ora introdurremo, corrispondono ad una idealizzazione del fenomeno, ad una astrazione, anche se suggerita dall'esperimento. Essi vanno assunti come postulati e come tali non sono dimostrabili. In fisica, molto spesso, è sufficiente intuire ciò che sta alla base di un fenomeno. Questa intuizione viene poi usata per predire l'evoluzione di altri fenomeni che possono essere controllati sperimentalmente. L'intuizione iniziale, anche se non era ben giustificata o dal punto di vista formale o da quello sperimentale, trova la conferma della sua validità a posteriori, cioè al momento del confronto delle predizioni da essa derivate con i risultati degli esperimenti.

Sulla base del primo principio, contrariamente a quanto affermato dalla teoria aristotelica, l'azione esterna non è necessaria per mantenere un corpo in moto con velocità costante, ma solo per produrre una variazione della sua velocità.

## **Conseguenze del I principio della dinamica**

### **Massa inerziale**

La tendenza dei corpi a persistere nel loro stato di moto rettilineo uniforme o di quiete viene descritta assegnando ai corpi una proprietà chiamata *inerzia*. Il primo principio viene perciò anche detto principio di inerzia.

La *massa inerziale* misura l'inerzia posseduta dai corpi, cioè la loro capacità di opporsi a variazioni del loro stato di

moto rettilineo uniforme o di quiete. È molto facile cambiare lo stato di moto (leggi la velocità) di un corpo con piccola inerzia (leggi piccola massa inerziale) mentre è difficile far cambiare la velocità ad un corpo con grandi inerzia.

È sufficiente un colpo ben assestato di racchetta ad un palla di tennis per modificare radicalmente il suo moto (prima dell'urto con la racchetta si stava muovendo in un verso, dopo l'urto si muove in verso opposto). Lo stesso colpo di racchetta produce effetti meno visibili se assestato ad un pallone da calcio, e del tutto trascurabili se assestato ad una palla di cannone.

### **Sistemi di riferimento inerziali.**

Il primo principio della dinamica determina i sistemi di riferimento che possono essere usati per la descrizione dinamica del moto di un corpo. I sistemi di riferimento individuati dal primo principio della dinamica si chiamano *sistemi di riferimento inerziali*.

Si può far vedere che i sistemi di riferimento inerziali sono sistemi legati a punti materiali isolati, (con l'origine coincidente con un punto materiale isolato e gli assi orientati verso tre direzioni fisse) .

Supponiamo infatti che esista un sistema di riferimento in cui è valida con estrema precisione la prima legge della dinamica. Newton postulò l'esistenza di uno spazio assoluto, di un sistema di riferimento in cui le leggi della meccanica erano perfettamente valide e pensò che questo sistema fosse legato alle stelle fisse.

In questo sistema di riferimento tutti i punti materiali isolati hanno velocità nulla o costante. Prendiamo uno di questi punti materiali e sia  $\vec{v}$  la velocità costante con cui si muove nel sistema di riferimento fissato. Il sistema di riferimento legato a questo punto materiale si muoverà quindi con una velocità relativa costante rispetto al primo sistema. Sappiamo anche che le accelerazioni misurate in questi due sistemi di riferimento sono le stesse, perché la velocità relativa è costante: poiché tutti i punti materiali isolati avevano accelerazione nulla nel primo dei due sistemi di riferimento, continueranno ad avere accelerazione nulla anche nel secondo sistema di riferimento: cioè nel nuovo sistema saranno fermi o si muoveranno di moto rettilineo uniforme. In conclusione anche il sistema legato ad un particolare punto materiale isolato è un sistema in cui vale il primo principio della dinamica e quindi un sistema di riferimento inerziale.

La relatività galileiana mostra che non esiste un sistema di riferimento assoluto come l'aveva ipotizzato Newton, in quanto tutti i sistemi di riferimento in moto traslatorio uniforme rispetto ad esso hanno le sue stesse proprietà e sono quindi indistinguibili da esso.

*Come si fa a trovare un sistema di riferimento inerziale?*

E' chiaro che quei sistemi di riferimento che avevamo introdotto in cinematica, il sistema del laboratorio, il

sistema con origine nel centro della terra ed assi invariabilmente orientati rispetto alle stelle fisse, il sistema con origine al centro del sole e assi invariabilmente orientati rispetto alle stelle fisse, non sono dei sistemi di riferimento inerziali: infatti non sono sistemi di riferimento legati a punti materiali isolati. Il laboratorio è vincolato a ruotare insieme con la terra attorno all'asse di rotazione terrestre, la terra interagisce con il sole e gli gira attorno, il sole a sua volta interagisce con il resto della galassia e si muove su di un'orbita all'interno della galassia etc. Ciononostante, per moti di durata ed estensione limitata, tale che la velocità del sistema di riferimento non sia variata di molto<sup>(\*)</sup> durante il moto in osservazione, tutti questi sistemi possono essere considerati una buona approssimazione di sistemi di riferimento inerziali.

*Ma quanto deve durare il moto perché il sistema di riferimento possa essere considerato inerziale?*

I sistemi di riferimento a cui abbiamo fatto riferimento hanno dei moti ciclici: il laboratorio ruota attorno all'asse terrestre ogni 24 ore (86400 s), la terra ruota attorno al sole ogni 365 giorni, etc.: occorre confrontare la durata del moto con il periodo, se la durata del moto è molto più piccola del periodo del ciclo allora il sistema di riferimento può essere considerato inerziale (perché si suppone che in tale intervallo di tempo la sua velocità non sia cambiata di molto). Cosicché per lo studio del moto di caduta di un grave, che dura pochi secondi, può essere usato il sistema del laboratorio (periodo del ciclo uguale a 86400 s), per il moto dei satelliti o della luna attorno alla terra può essere usato un sistema geocentrico, mentre il moto dei pianeti è ben descritto in un sistema eliocentrico.

Questi sistemi di riferimenti rappresentano una buona approssimazione del sistema di riferimento inerziale e valgono per moti di durata limitata. Per moti la cui durata è tale che la velocità del sistema di riferimento non può essere considerata costante, non possono più essere trascurati gli effetti derivanti dalla non inerzialità del sistema. Per questo motivo il sistema del laboratorio non è inerziale per lo studio del moto di masse di aria (venti) o correnti marine.

E' possibile trovare un sistema di riferimento che sia la migliore approssimazione di un sistema di riferimento inerziale?

Newton postulò l'esistenza di uno spazio assoluto, di un sistema di riferimento in cui le leggi della meccanica erano perfettamente valide e pensò che questo sistema fosse legato alle stelle fisse. La relatività galileiana prima, e la relatività ristretta poi, hanno mostrato che non esiste un sistema di riferimento assoluto, in quanto tutti i sistemi di riferimento in moto traslatorio uniforme rispetto ad esso hanno le sue stesse proprietà e sono quindi indistinguibili da esso.

---

<sup>(\*)</sup> Per verificare che la velocità del sistema di riferimento non è variata di molto bisogna specificare rispetto a che cosa la velocità del sistema di riferimento deve essere determinata. Possiamo utilizzare lo spazio assoluto introdotto da Newton: un sistema di riferimento legato alle stelle fisse.

## Forza

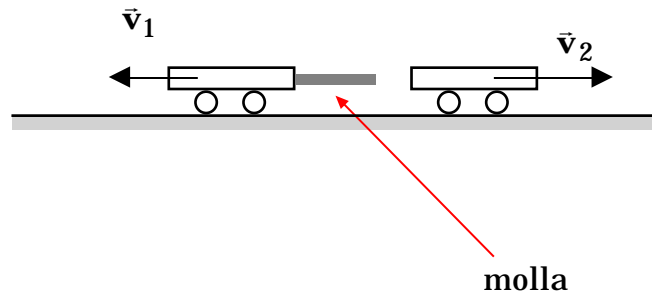
Nei sistemi di riferimento inerziale i cambiamenti di velocità, le accelerazioni subite da un punto materiale, dipendono dalle interazioni del punto materiale con l'ambiente circostante: infatti quando il punto materiale è *isolato*, e quindi le azioni esterne sono assenti, non si hanno variazioni di velocità.

Un punto materiale non può cambiare autonomamente, da solo, il suo stato di moto rettilineo uniforme o di quiete, non può cioè cambiare da solo la sua velocità.

Chiameremo *forza* tutte le azioni esercitate dall'ambiente circostante sul corpo di cui stiamo studiando il moto che producono variazioni nello stato di moto rettilineo uniforme o di quiete, o detta in altra maniera, tutte quelle azioni che producono un'accelerazione del corpo sotto osservazione.

### **Definizione operativa della massa inerziale.**

Il primo principio della dinamica stabilisce l'esistenza di una proprietà dei corpi, che abbiamo chiamato inerzia, che descrive la tendenza dei corpi a conservare il proprio stato di moto. Qualitativamente potremmo dire che è piuttosto difficile cambiare lo stato di moto in corpi con una grande inerzia, mentre questo è relativamente più semplice in corpi con una piccola inerzia. Questa, comunque, è una affermazione qualitativa. In fisica dobbiamo dare una definizione operativa della grandezza che esprime la proprietà dell'inerzia dei corpi, cioè definire delle procedure di misura e fissare un campione.



Supponiamo di considerare due corpi che interagiscono solamente tra di essi. Possiamo pensare a due pendoli che si urtano, oppure a due carrelli che inizialmente vengono tenuti fermi con una molla compressa tra di essi, poi vengono liberati e la molla fatta espandere. L'urto nel primo caso e la molla nel secondo caso rappresentano l'interazione.

Supponiamo per il seguito di avere due carrelli inizialmente fermi con una molla compressa tra essi. Se si fa espandere la molla i due carrelli, alla fine dell'interazione, quando cioè è cessato il contatto della molla con uno dei due carrelli, essi si muoveranno di moto uniforme. Si osserva che i due corpi si muovono sulla stessa retta ma uno in un verso l'altro in verso opposto. Non si verifica mai che i due carrelli si muovano dalla stessa parte. Possiamo pensare di introdurre sulla retta comune su cui si muovono i due carrelli un sistema di riferimento. Sia  $v_{1f}$  il modulo della velocità del primo corpo e  $v_{2f}$  il modulo della velocità del secondo corpo quando è finita l'interazione tra i due corpi. Siccome i due corpi inizialmente erano fermi, ( $v_{1i} = v_{2i} = 0$ ),  $v_1 = v_{1f} - v_{1i} = v_{1f}$  e  $v_2 = v_{2f} - v_{2i} = v_{2f}$  rappresentano le variazioni del modulo della velocità subite dai due carrelli. Cambiando la compressione della molla possiamo variare il valore delle velocità finali e quindi delle variazioni di velocità subite dai due corpi. Si osserva però che, se le velocità finali sono piccole confrontate con la velocità della luce, il rapporto

$$\frac{v_1}{v_2} = \text{costante}$$

è sempre lo stesso indipendentemente dalla compressione della molla e quindi dai valori delle velocità finali.

Se i due corpi subiscono una diversa variazione della velocità e quindi del loro stato di moto, questo può dipendere dalla diversa capacità dei due corpi a permanere nel proprio stato di moto, e quindi da un diverso valore di quella proprietà che abbiamo chiamato inerzia. Il corpo con inerzia maggiore subirà una più piccola variazione del proprio stato di moto. Avendo effettuato le varie prove sempre con gli stessi due corpi, caratterizzati sempre dagli stessi valori dell'inerzia, poiché *il rapporto tra le variazioni di velocità* risulta indipendente dal valore delle velocità finali, possiamo pensare che tale rapporto sia legato al rapporto inverso delle masse inerziali dei due corpi. Possiamo usare quindi questo esperimento per misurare l'inerzia dei corpi. Indichiamo con  $m_1$  e  $m_2$  le masse inerziali dei corpi 1 e 2, cioè i due numeri che misurano l'inerzia posseduta da ciascuno dei due corpi, possiamo porre

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

A questo punto possiamo prendere una delle due masse come campione, assumere per esempio che la massa  $m_1$  è uguale a 1 Kg e determinare il valore in Kg della massa  $m_2$ . In questa maniera, utilizzando esperimenti di urto, o esperimenti di espansione di una molla, in cui uno dei due corpi è il Kg campione, possiamo assegnare la massa a tutti gli altri corpi.

$$m_2 = m_1 \frac{v_1}{v_2} = (1\text{kg}) \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1}{v_2} \text{kg}$$

*Cosa ci rimane da controllare?*

Per prima cosa bisogna verificare come si sommano le masse. Supponiamo quindi che con l'esperimento, che abbiamo descritto, abbiamo misurato le masse dei corpi 2,3,4,etc.: siano esse  $m_2, m_3, m_4$ , etc. La domanda che ci poniamo è: qual è la massa inerziale del corpo ottenuto mettendo insieme i corpi 2, 3, 4, etc.? Ripetiamo l'esperimento mettendo da un lato il chilogrammo campione e dall'altro il corpo ottenuto dall'unione dei corpi 2,3,4, etc. L'esperienza mostra che la massa del corpo ottenuto come unione dei corpi 2,3,4, etc, è uguale alla somma delle masse. Le masse sono quindi degli scalari. L'osservazione precedente inoltre porta al principio di conservazione della massa, che possiamo enunciare dicendo che in natura *nulla si crea e nulla si distrugge*. In realtà questo principio non è valido in generale, lo è per una grande quantità di fenomeni, praticamente la totalità di quelli che incontriamo nella nostra vita quotidiana. Tuttavia ve ne sono alcuni in cui non si ha conservazione della massa. La teoria della relatività ristretta mostra infatti che esiste la possibilità di trasformare massa in energia e viceversa. Così se mettiamo insieme dei protoni e dei neutroni per formare un nucleo più complesso, la massa del nucleo complesso non è uguale alla somma delle masse dei protoni e dei neutroni messi insieme, ma è più piccola: durante il processo di aggregazione una parte della massa viene trasformata in energia. Quindi normalmente il principio di conservazione della massa può essere ritenuto valido, purché non venga applicato a processi di tipo nucleare.

Inoltre, sempre la teoria della relatività ristretta mostra che la massa dipende dalla velocità, anzi man mano che la velocità di un corpo, di una particella, si avvicina alla velocità della luce la sua massa tende all'infinito:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

in cui  $m_0$  è la massa della particella quando la sua velocità è uguale a zero (*massa a riposo*). Questo effetto diventa rilevante quando la velocità della particella si avvicina alla velocità della luce (300000 km/s): per velocità di alcuni metri al secondo, che sono le velocità tipiche della meccanica newtoniana, potremo considerare costante la massa dei corpi o delle particelle e pari alla massa a riposo.

### ***Le leggi di Newton.***

La meccanica classica si fonda sui seguenti tre postulati fondamentali (chiamati anche leggi di Newton, o leggi della dinamica<sup>3</sup>):

1. Il principio di inerzia:

***ogni corpo non sottoposto ad azioni esterne persiste nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.***

Nei sistemi di riferimento inerziali, quelli in cui valgono le leggi di Newton, i cambiamenti di moto sono dovuti alla interazione con altri corpi. Un corpo non può da solo alterare il suo stato di moto.

Chiameremo “forze” le azioni esercitate dagli altri corpi presenti attorno al corpo che stiamo osservando in grado di cambiare lo stato di moto ( di provocare accelerazioni) del corpo sotto osservazione.

2. La seconda legge della dinamica stabilisce una corrispondenza diretta tra le azioni esercitate sul corpo dagli altri corpi presenti nell’ambiente e l’alterazione dello stato di moto prodotto:

***in un sistema di riferimento inerziale, l'accelerazione subita da un corpo, è proporzionale alla risultante delle forze applicate ed inversamente proporzionale alla sua massa inerziale.***

---

<sup>3</sup> Si usa indicare impropriamente questi tre postulati come "leggi della dinamica" come se fossero derivati da qualcos'altro. In realtà noi abbiamo solo cercato di giustificarle, non certo dimostrarle. Esse pertanto vanno considerate dei veri e propri postulati iniziali da cui derivare tutte le leggi della meccanica, ivi inclusa la conservazione dell'energia, della quantità di moto e del momento della quantità di moto. Come vedremo in seguito queste leggi di conservazione verranno a loro volta chiamati impropriamente "principi". Questo però è giustificato dal fatto che la loro validità si estende al di fuori dell'ambito della meccanica newtoniana.



$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Si osservi che ciascuna azione dell'ambiente esterno provoca variazioni nello stato di moto come se fosse l'unica ad agire, vale cioè il principio di sovrapposizione. L'effetto prodotto è lo stesso sia se l'interazione avviene in assenza oppure in presenza di altre interazioni.

La seconda legge della dinamica contiene come caso particolare la prima legge. Infatti se abbiamo a che fare con un punto materiale isolato, non ci sono forze che agiscono su di esso, e quindi la risultante delle forze è nulla,  $\vec{F} = 0$ . Sulla base della seconda legge l'accelerazione subita è nulla,  $\vec{a} = 0$ , e quindi la velocità è costante,  $\vec{v} = \text{cost}$ : il punto materiale in assenza di azioni esterne si muove di moto rettilineo uniforme.

La condizione  $\vec{F} = 0$  tuttavia si può verificare non solo quando sul punto materiale non agiscono forze (cosa che si verifica quando esso è sufficientemente distante da tutti gli altri corpi), ma anche quando, pur essendo le singole forze agenti sul punto materiale diverse da zero, esse hanno risultante nulla. In queste condizioni il punto materiale si comporta come un punto materiale libero: o è fermo o si muove di moto rettilineo uniforme.

Le posizioni in cui la risultante delle forze applicate è nulla e in cui il punto materiale è fermo si dicono *posizioni di equilibrio*.

3. Se in un sistema di riferimento inerziale si osserva che lo stato di moto del corpo sotto osservazione cambia, per esempio esso subisce un'accelerazione riscontrabile da cambiamenti del modulo o della direzione della velocità, allora si può dedurre che deve esistere nell'ambiente circostante almeno un altro corpo che ha esercitato un'azione sul corpo sotto osservazione.

La terza legge di Newton ci dice che il corpo che ha subito l'azione, quello sotto osservazione, reagisce esercitando a sua volta sul quel particolare corpo un'azione uguale e contraria:

***In un sistema di riferimento inerziale se sul corpo A agisce una forza  $\vec{F}_{AB}$  dovuta alla interazione con il corpo B allora il corpo A esercita sul corpo B una forza  $\vec{F}_{BA}$  uguale e contraria.***

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Le forze sono forze di interazione.

### **Osservazioni sulla Terza legge di Newton.**

In un sistema di riferimento inerziale, in cui valgono le leggi di Newton, le forze che agiscono su un corpo sono originate dai corpi che si trovano nell'ambiente circostante. Cioè la forza che viene esercitata su un punto materiale è soltanto un aspetto della mutua interazione tra il corpo e l'ambiente circostante. In altre parole se su un punto materiale A agisce una forza  $\vec{F}$ , vuol dire che esiste nell'ambiente circostante un corpo B che la origina. Data una forza è sempre possibile determinare qual è il corpo che la subisce e qual è il corpo che la genera.

Il terzo principio della dinamica stabilisce che a sua volta il corpo A, che sta subendo la forza originata dal corpo B, esercita sul corpo B una forza uguale ed opposta. Le due forze  $\vec{F}_{AB}$  (esercitata da B su A) e  $\vec{F}_{BA}$  (esercitata da A su B) hanno lo stesso modulo (intensità), la stessa direzione ma verso opposto. Queste due forze si chiamano forze di azione e reazione. Non ha importanza quale delle due sia l'azione e quale la reazione, quello che si vuole sottolineare è che le forze sono di interazione e quindi esistono a coppie. Il terzo principio della dinamica non deve essere inteso come un principio di causa ed effetto: le due forze di azione e reazione infatti agiscono simultaneamente, ovvero le forze di azione e reazione sono uguali e contrarie allo stesso istante.

Il fatto che l'eguaglianza tra le forze di azione e reazione possa realizzarsi quando i corpi che interagiscono sono a contatto non è del tutto sorprendente, più difficile è capire come questa eguaglianza possa realizzarsi quando i corpi interagenti sono distanti, soprattutto alla luce dei recenti ritrovamenti della fisica. Oggi infatti sappiamo che non è possibile far viaggiare l'informazione più velocemente della luce.

Per esempio la forza di interazione Terra-Sole dipende dalla distanza della Terra dal Sole. Supponiamo che la Terra, nel suo moto, si sia avvicinata al Sole. Questo significa che il Sole dovrebbe esercitare sulla Terra una forza più grande. Ma il Sole non può rendersi conto immediatamente che la Terra gli si è avvicinata, sarà raggiunto dall'informazione solo dopo 8 minuti, il tempo impiegato dalla luce per percorrere la distanza della Terra dal Sole. Per tutto questo tempo il Sole continuerà a pensare che la Terra si trovi ancora nella posizione precedente, più lontana, e continuerà ad esercitare la forza corrispondente a questa posizione. Tuttavia, poiché la velocità nel moto di rivoluzione terrestre è molto piccola rispetto alla velocità della luce, lo spostamento della Terra in 8 minuti è, a tutti gli effetti, trascurabile rispetto alla distanza della Terra dal Sole, la forza cioè avrebbe dovuto modificarsi di una quantità trascurabile. In conclusione non si commettono gravi errori se si suppone che l'informazione sia arrivata al Sole istantaneamente, che abbia cioè viaggiato dalla Terra al Sole con una velocità infinita.

In meccanica classica, noi assumeremo valido il concetto "dell'azione a distanza" che richiede appunto che l'informazione viaggi con velocità infinita. Nella interazione Terra-Sole dunque, se ad un certo istante il Sole

esercita sulla Terra una forza  $\vec{F}_{TS}$ , il concetto di "azione a distanza" ci permette di dire che nello stesso istante la Terra esercita sul Sole una forza,  $\vec{F}_{ST}$ , uguale e contraria.

Comunque oggi l'interazione tra i due corpi distanti viene descritta non più in termini di "azione a distanza", che come abbiamo detto, richiederebbe una velocità infinita di propagazione dei segnali, ma in termini di campo. In questo tipo di descrizione si afferma che ogni punto dello spazio circostante il sole possiede una proprietà, detta "campo gravitazionale", che fissa l'accelerazione (o la forza per unità di massa) che subisce un corpo (per esempio la terra) messo in tale posizione. Se ad un certo istante il Sole si sposta dalla sua posizione, il campo gravitazionale nei vari punti dello spazio dovrà modificarsi per tenere conto di tale spostamento. La variazione del campo però non avviene istantaneamente in tutti i punti dello spazio, in quanto l'informazione dello spostamento avvenuto viaggia dal Sole con una velocità pari alla velocità della luce. Solo quando essa raggiunge il generico punto dello spazio, il campo gravitazionale in questo punto verrà modificato per tenere conto della nuova posizione occupata dal sole, la quale, nel frattempo, può essere ancora cambiata. La forza esercitata ad un certo istante su un corpo materiale, posto in un punto del campo gravitazionale, dipende esclusivamente dal valore del campo nel punto all'istante considerato e non dalla posizione occupata dal sole in quell'istante. Un discorso analogo può essere ripetuto invertendo il ruolo del Sole con quello della Terra.

In conclusione il terzo principio della dinamica presenta delle difficoltà nella applicazione, ma quando le velocità sono molto più piccole di quelle della luce può essere utilizzato senza problemi.

### **Le leggi delle forze.**

La seconda legge della dinamica ci fornisce il mezzo per mettere in relazione la risultante delle forze che agiscono su di un punto materiale, dovute agli altri corpi presenti nell'ambiente circostante, con l'accelerazione subita dal punto materiale.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Questa equazione rappresenta un sistema di equazioni differenziali, infatti può essere riscritta come:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m}$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F_x}{m}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{F_y}{m}$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{F_z}{m}$$

Se si riesce ad esprimere la risultante delle forze agenti sul corpo in funzione delle proprietà del corpo e di quelle dell'ambiente circostante, cioè se si riesce ad esprimere la forza come una funzione della posizione del punto, relativamente agli altri punti presenti nell'ambiente circostante, della sua velocità, delle sue proprietà (massa carica elettrica, etc.) e di quelle dell'ambiente circostante ed, eventualmente, del tempo  $t$ , in altre parole si determina la *legge della forza*, allora è possibile risolvere il sistema di equazioni differenziali, e determinare la legge oraria del moto.

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, m, q, \dots, t)}{m}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{F_x(x, y, z, v_x, v_y, v_z, m, q, \dots, t)}{m}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{F_y(x, y, z, v_x, v_y, v_z, m, q, \dots, t)}{m}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{F_z(x, y, z, v_x, v_y, v_z, m, q, \dots, t)}{m}$$

In conclusione, la seconda legge della dinamica non è sufficiente da sola a risolvere il problema del moto di un punto materiale, ma è necessario anche conoscere l'espressione della forza che agisce sul punto materiale come funzione della posizione del punto, della sua velocità, delle sue proprietà e di quelle dell'ambiente circostante ed, eventualmente, anche del tempo  $t$ . Per esempio se si vuole determinare il moto di un pianeta intorno al Sole, oltre alla seconda legge della dinamica, bisogna conoscere l'espressione della legge di gravitazione universale:

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r$$

La legge di gravitazione universale da una descrizione della forza che agisce sul pianeta in funzione della posizione e delle caratteristiche del punto materiale stesso e di quelle dell'ambiente circostante: massa del pianeta, massa del Sole, distanza pianeta-Sole, direzione radiale.

Nel seguito esamineremo alcuni tipi di forza e cercheremo di esprimerle in funzione delle proprietà del corpo sul quale agiscono e di quelle dello spazio circostante. Nella tabella seguente sono elencati alcuni tipi di forza insieme con le relative *leggi della forza*. E' bene ribadire in questa occasione che i diversi tipi di forza, elencati nella tabella, non sono altro che aspetti differenti di due delle interazioni fondamentali esistenti in natura, l'interazione gravitazionale e quella elettromagnetica. Esamineremo più in dettaglio i primi quattro tipi di forza, mentre rimanderemo alla fine del programma di meccanica la discussione della legge di gravitazione universale. La forza di Coulomb tra corpi carichi elettricamente e la forza di Lorentz, che agisce su una carica elettrica in moto in un campo magnetico, saranno studiate in dettaglio nel corso di elettromagnetismo. E' importante notare come tutte le forze elencate in questo specchietto siano state espresse in funzione delle proprietà del corpo, massa, posizione, etc, e delle proprietà dei corpi circostanti, massa dei corpi circostanti, carica elettrica, campo magnetico, costante

elastica, accelerazione di gravità etc.

Forza peso

$$\bar{\mathbf{P}} = m\bar{\mathbf{g}}$$

Forza elastica

$$F_x = -kx$$

Forza di attrito

$$F_{as} = \mu_s N, F_{ad} = \mu_d N$$

Resistenza passiva

$$\bar{\mathbf{F}} = -b\bar{\mathbf{v}}$$

Forza gravitazionale

$$\bar{\mathbf{F}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \bar{\mathbf{u}}_r$$

Forza Coulumbiana (elettrostatica)

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \bar{\mathbf{u}}_r$$

Forza di Lorentz

$$\bar{\mathbf{F}} = q\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}}$$

### ***Forza peso.***

Con peso di un corpo si intende la forza con cui la Terra attira il corpo quando questo è nelle immediate vicinanze della superficie terrestre. Nel caso della forza peso chi subisce la forza è il corpo di cui stiamo osservando il moto, l'origine della forza peso è la Terra.

Per la terza legge di Newton, il corpo eserciterà sulla Terra una forza uguale e contraria. Ragioni di simmetria ci spingono ad immaginare che questa forza sia applicata al centro della terra.

La seconda legge della dinamica ci dà gli strumenti per poter valutare la forza peso. Sappiamo infatti che la forza che agisce su di un corpo è legata all'accelerazione subita dal corpo dalla relazione:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

D'altra parte sappiamo anche, dopo le osservazioni di Galilei, che tutti i corpi nelle immediate vicinanze della superficie terrestre cadono con una accelerazione pari a  $\vec{g}$ , quindi il peso  $\vec{P}$  sarà dato da:

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

Il peso  $\vec{P}$ , come  $\vec{g}$ , è diretto secondo la verticale passante per la posizione in cui si trova il corpo verso l'interno della Terra. Mostriamo durante il corso che  $\vec{g}$  dipende sia dalla distanza dalla superficie terrestre che dalla latitudine, anche il peso  $\vec{P}$  di un corpo dipenderà da questi due parametri.

E' bene osservare che massa e peso di un corpo sono due cose diverse: la massa è uno scalare, mentre il peso è un vettore. Inoltre la massa è una proprietà intrinseca del corpo, è sempre la stessa qualunque sia la posizione occupata nell'universo. Viceversa il peso rappresenta l'interazione tra il corpo e la terra e quindi dipende dalle posizioni relative della Terra e del corpo. A grandi distanze dalla Terra, per esempio, il peso tende ad annullarsi mentre la massa di un corpo, cioè la sua capacità ad opporsi a variazioni dello stato di moto, rimane sempre la stessa. Se sulla Terra proviamo a mettere in moto un mattone di piombo per esempio tirandogli un calcio, sappiamo che ci faremo male, perché un mattone di piombo è molto più pesante di un pallone di cuoio. Ma non è il peso quello che ci deve trattenere dal tirare il calcio al mattone di piombo. Infatti nello spazio, lontano dalla terra, dove il mattone di piombo e il pallone pesano circa alla stessa maniera, cioè poco, se provassimo a tirare il calcio al mattone di piombo ci faremmo male lo stesso, poiché il mattone di piombo, anche nello spazio, ha conservato intatta la sua capacità ad opporsi a variazioni del suo stato di moto.

Una volta chiarito che il peso e la massa sono due cose differenti, si può osservare che, fissata la posizione sulla superficie terrestre, la massa e il modulo del peso sono proporzionali. Questo significa che si possono fare determinazioni di massa confrontando il peso di due corpi. La bilancia con cui si fanno confronti di massa, si basa proprio su questo principio.

### **Forza elastica.**

La maggior parte dei corpi solidi possiede delle proprietà elastiche. Se un corpo viene sottoposto all'azione di una forza esterna, cioè ad una sollecitazione, subisce una deformazione. Tale deformazione da origine ad una forza che contrasta la deformazione stessa e quindi si oppone alla forza esterna applicata. Più grande è la forza applicata, più grande è la deformazione prodotta, più grande è la forza di reazione<sup>4</sup>. Se rimossa la sollecitazione esterna, il corpo ritorna nella configurazione indeformata, il corpo è detto *elastico* e le forze generate dalla deformazione sono dette forze elastiche. Un corpo che non si comporta in questa maniera si dice *anelastico*. Ovviamente i corpi reali si comporteranno in maniera diversa a seconda della sollecitazione applicata<sup>5</sup>. Si osserva infatti che per piccole sollecitazioni, che provocano quindi piccole deformazioni, il comportamento dei corpi solidi è di tipo elastico: esiste, infatti, una proporzionalità tra la sollecitazione applicata e la deformazione prodotta e quando la sollecitazione viene rimossa il corpo ritorna nella situazione originaria. Se l'intensità della sollecitazione viene aumentata si osserva che non esiste più una diretta proporzionalità tra la deformazione prodotta e la sollecitazione applicata, anche se continua ad esistere una dipendenza funzionale tra sollecitazione e deformazione prodotta. Rimuovendo la sollecitazione il corpo non ritorna nella configurazione originaria. Se si aumenta ancora la sollecitazione, si perde anche la dipendenza funzionale tra sollecitazione e deformazione: infatti una stessa sollecitazione può provocare differenti deformazioni. In quest'ultimo caso la deformazione prodotta sembra dipendere dalla storia del campione in esame, cioè dalle sollecitazioni applicate in precedenza, più che dalla sollecitazione applicata in quel momento. Questa fase va sotto il nome di *snervamento*. Se si aumenta ancora la sollecitazione si provoca la rottura del campione. Nel grafico è mostrata la curva tipica della sollecitazione applicata in funzione dell'allungamento nel caso di un filo metallico.

---

<sup>4</sup> Il termine reazione in questo caso non ha niente a che vedere con la forza di azione e reazione prevista dalla terza legge.

<sup>5</sup> Tanto per fissare le idee supponiamo di riferire il discorso successivo ad un filo di acciaio appeso al soffitto a cui vengono applicate, verso il basso, delle forze via via crescenti. Nel caso del filo la deformazione è un allungamento.



L'esempio più immediato di una forza elastica è quella generata da una molla a spirale. Supponiamo che uno degli estremi della molla a spirale sia fissato ad un soffitto (o parete<sup>6</sup> orizzontale), mentre l'altro estremo sia libero. Si osserva che la molla si dispone con il proprio asse lungo la verticale. Facciamo coincidere *la posizione di riposo dell'estremo libero della molla con l'origine di un sistema di riferimento avente l'asse y verticale, parallelo quindi all'asse della molla.*

Se appendiamo all'estremo libero della molla un corpo di massa m, si osserva che l'asse della molla continua a disporsi lungo la verticale e che il corpo, dopo un breve periodo transitorio in cui si verificano delle oscillazioni, si ferma in una certa posizione, individuata dalla coordinata y sull'asse y. Si osserva inoltre che la molla si è allungata, l'allungamento è proprio dato dal valore assoluto della posizione y del punto materiale.

Applicando al punto materiale la seconda legge della dinamica, ed osservando che la sua accelerazione è nulla, perché fermo, si può determinare l'intensità della forza elastica

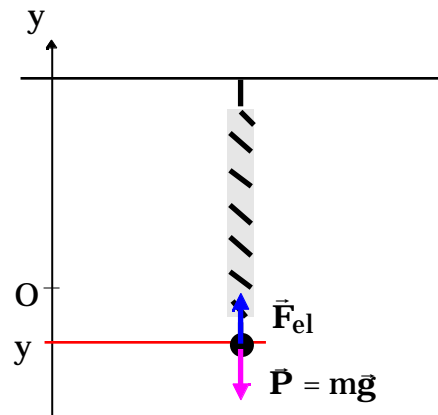
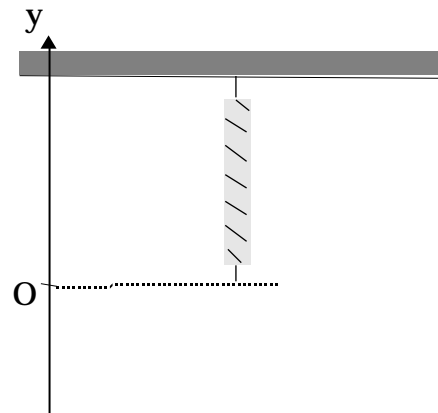
$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_{el} = m\vec{a} = 0$$

$$\vec{F}_{el} = -\vec{P} \quad \text{da cui} \quad F_{yel} \vec{u}_y = -(-mg\vec{u}_y)$$

$$F_{yel} = mg$$

la componente y della forza elastica, e nel caso considerato anche il modulo, è uguale alla intensità della forza peso.

Se si cambia la massa del corpo appeso, la posizione di equilibrio si otterrà in una diversa posizione del punto materiale e quindi per un diverso allungamento della molla. Variando la massa del punto materiale si può studiare la dipendenza della forza elastica dall'allungamento della molla: Si trova infatti che l'intensità della forza



<sup>6</sup> Per parete si intende un corpo di massa così grande (praticamente infinita) che qualunque sia l'intensità della forza applicata, l'accelerazione subita è nulla. Se quindi inizialmente la parete era ferma continua a restare ferma qualunque sia la forza applicata.

elastica è proporzionale all'allungamento della molla, cioè al valore assoluto della coordinata  $y$  del punto materiale:

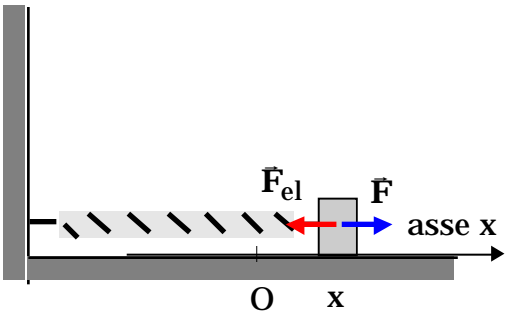
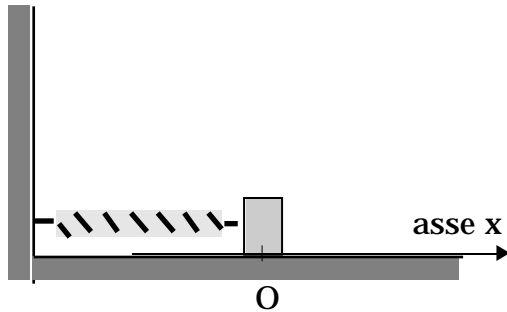
$$F_{el} = k|y|$$

dove  $k$  è una costante positiva denominata costante elastica della molla.

Se vogliamo determinare la componente  $y$  della forza elastica, si osservi intanto che nel caso rappresentato in figura la componente  $y$  della forza elastica è positiva e quindi coincidente con il modulo della forza elastica, pertanto:

$$F_{yel} = F_{el} = k|y| = -ky \quad \text{dato che} \quad |y| = -y$$

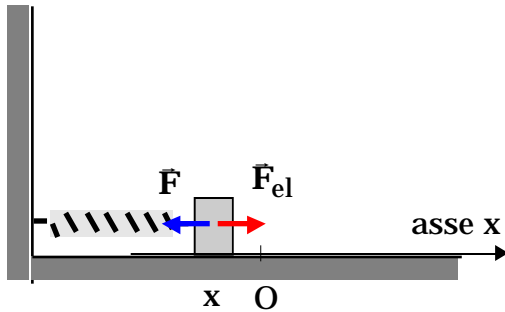
In conclusione:  $F_{yel} = -ky$ .



L'espressione precedente, che noi con il dispositivo sperimentale utilizzato potevamo provare soltanto per gli allungamenti della molla, vale anche quando la deformazione prodotta corrisponde ad un accorciamento della molla. Per vedere questo forse è più comodo utilizzare una molla con uno dei capi attaccato ad una parete verticale e l'altro capo attaccato ad un punto materiale libero di muoversi su di un piano orizzontale. In questo caso si introduce un sistema di riferimento con l'asse  $x$  coincidente con l'asse della molla e l'origine coincidente con la posizione del punto materiale quando la molla risulta non deformata.

Supponiamo ora di applicare al punto materiale attaccato all'estremo libero della molla una forza che lo sposta nel punto di coordinata  $x$ , maggiore di zero. La molla ha cioè subito un allungamento pari ad  $x$ . A seguito di questa deformazione si genera nella molla una forza che tende a ripristinare la lunghezza iniziale, a riportare cioè il punto materiale nella posizione da esso occupata quando la molla era indeformata: l'origine del sistema di riferimento fissato. Si dice infatti che si tratta di una **forza di richiamo**. La forza è diretta, in questo caso, in verso opposto all'asse  $x$ . Se l'allungamento della molla è piccolo, cioè se non abbiamo superato il limite elastico della molla, la forza è proporzionale alla deformazione, cioè all'allungamento della molla, e si può scrivere:

$$\vec{F}_{el} = -kx\vec{i}$$



dove  $k$  è la *costante elastica della molla*, mentre il segno meno tiene conto del fatto che la forza è diretta in verso opposto all'asse delle  $x$ . Se invece di allungarla, comprimiamo la molla, la coordinata  $x$  del punto materiale attaccato all'estremo libero della molla è negativa. La forza, in questo caso, è diretta secondo l'asse delle  $x$ , infatti tende a riportare l'estremo libero nell'origine. Quindi anche in questo caso si può scrivere:

$$\vec{F}_{el} = -kx\vec{i}$$

In generale si avrà  $F_x = -kx$ : la componente  $x$  della forza elastica è uguale all'opposto del prodotto della costante elastica della molla per la posizione del punto materiale misurata in un sistema di riferimento avente l'origine coincidente con la posizione del punto materiale quando la molla non è deformata.

La forza elastica è quindi sempre diretta verso l'origine del sistema di riferimento e tende a riportare il punto materiale proprio in questa posizione. La forza elastica rappresenta la reazione<sup>7</sup> con cui la molla si oppone alle deformazioni subite e, proprio per contrastarle, per ridurle, tende a riportare il punto materiale nella posizione in cui la deformazione della molla è nulla.

Una forza con queste proprietà viene indicata con la denominazione di “*forza di richiamo*”.

Possiamo concludere che l'espressione della forza elastica appena trovata,  $\vec{F}_{el} = -kx\vec{i}$ , o equivalentemente nella forma  $F_{elx} = -kx$ , vale per qualsiasi deformazione (compressione o allungamento). Questa legge della forza va sotto il nome di legge di Hooke, che per primo la determinò empiricamente.

---

<sup>7</sup> Anche in questo caso il termine “reazione” non ha niente a che vedere con le forze di azione e reazione previste dalla terza legge di Newton.

## Reazioni vincolari.

Si chiamano reazioni<sup>8</sup> vincolari, quelle forze che si originano dalle limitazioni al movimento dei punti materiali imposte dai corpi circostanti.

Al contrario delle altre forze incontrate finora, per la reazione vincolare non è possibile fornire una espressione della forza: occorre determinare il suo valore caso per caso applicando la seconda legge di Newton.

Esistono comunque delle proprietà che possono essere stabilite a priori.

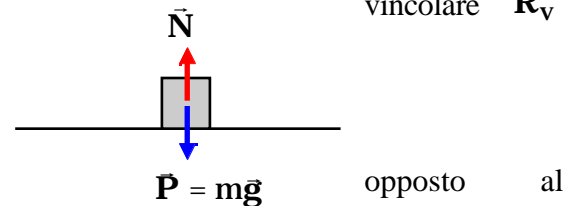
1. La reazione vincolare si può scomporre in una componente perpendicolare al vincolo, la componente normale  $\vec{N}$ , ed una componente parallela al vincolo, la forza di attrito.
4. La normale  $\vec{N}$  è sempre diretta nello spazio in cui è consentito il moto del corpo. La normale  $\vec{N}$  è quindi sempre repulsiva, mai attrattiva. (Se nella risoluzione di un problema si dovesse trovare che è richiesta una normale attrattiva, vuol dire semplicemente che è venuto meno il contatto tra il corpo ed il vincolo. La condizione di perdita di contatto tra il corpo ed il vincolo si realizza quando  $\vec{N}=0$  ).
5. Se c'è contatto tra il corpo ed il vincolo allora sicuramente c'è la componente normale della reazione vincolare. Viceversa la componente parallela al vincolo potrebbe anche essere assente.

## Componente normale.

Come esempio di componente normale della reazione vincolare consideriamo un corpo di massa  $m$  poggiato su un piano orizzontale, per esempio un tavolo. Se il tavolo è sufficientemente robusto, resiste senza rompersi all'azione esercitata su di esso del corpo appoggiato e, come conseguenza, il corpo resta fermo. Affinché il corpo sia fermo, sulla base della seconda legge di Newton, è necessario che la risultante delle forze che agiscono sul corpo sia nulla. Quindi è necessario che il tavolo eserciti sul corpo una reazione vincolare  $\vec{R}_v$  tale che

$$\vec{R}_v + m\vec{g} = 0 \quad \vec{R}_v = -m\vec{g}$$

La reazione vincolare in questo caso è diretta verticalmente in verso



<sup>8</sup> Vedi la nota precedente.

peso del corpo e la sua intensità è proprio uguale ad  $mg$ . Poiché in questo caso essa è perpendicolare alla superficie del corpo che l'ha generata, il piano orizzontale, essa coincide con la **componente normale della reazione**. In questo caso la componente parallela al vincolo della reazione vincolare è nulla.

Qual è l'origine di questa forza? Il corpo poggiato sul tavolo provoca una piccola deformazione del piano che genera una forza elastica che si oppone alla deformazione.

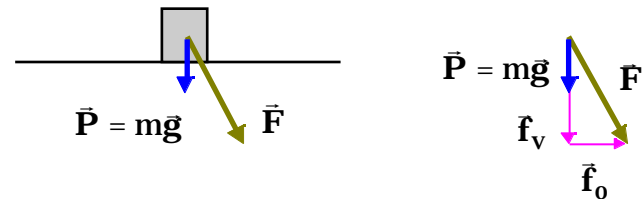
### Forze di attrito.

E' stata proprio la presenza della reazione vincolare, in particolare della sua componente normale  $\vec{N}$  che ci ha permesso, come abbiamo già osservato, di introdurre il concetto di punto materiale libero e quindi di giungere alla formulazione del primo principio della dinamica. D'altro lato, nell'introdurre il primo principio della dinamica, abbiamo osservato che se si mette in moto un corpo su un piano orizzontale non perfettamente liscio, si muoverà di moto più o meno ritardato, e prima o poi si fermerà. La diminuzione di velocità subita dal corpo, come abbiamo visto, è legata allo stato delle superfici di contatto tra corpo e piano: infatti, agendo opportunamente su queste superfici, si riesce a modificare l'accelerazione subita dal corpo nel suo moto sul piano orizzontale. Poiché ora sappiamo che responsabile dell'accelerazione è la forza, così come stabilisce la seconda legge della dinamica, ci rendiamo conto che il piano orizzontale nell'interagire col corpo in moto su di esso, esercita oltre alla componente normale  $\vec{N}$  della reazione vincolare, anche una forza parallela al piano che si chiama *forza di attrito*.

In generale possiamo affermare che *ogni volta che una superficie di un corpo scivola sulla superficie di un altro corpo, sul corpo agisce una forza di attrito che si oppone al moto, e non lo favorisce mai*.

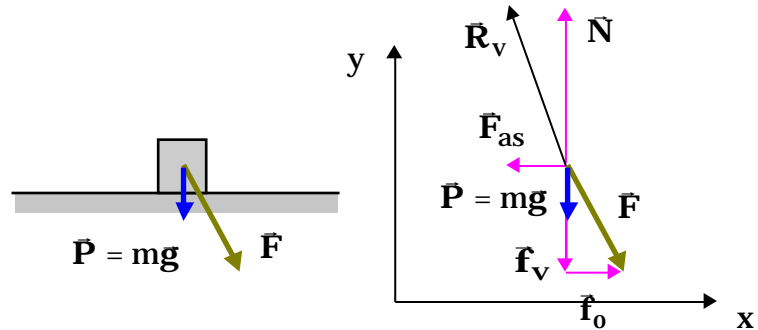
Ma le forze di attrito sono presenti anche in assenza di movimento. Consideriamo il seguente esempio. Supponiamo di avere un corpo di massa  $m$  poggiato su di un piano orizzontale. Abbiamo già visto che, in queste condizioni, il piano orizzontale esercita sul corpo una reazione vincolare che ha soltanto una componente perpendicolare al piano. Infatti è necessaria solo la componente normale al piano per rendere nulla la risultante delle forze applicate al corpo.

Supponiamo ora di applicare al corpo poggiato sul piano orizzontale una forza avente sia una componente verticale che una componente orizzontale. Si osserva che, per piccoli valori della componente orizzontale della forza applicata, il corpo rimane fermo sul piano. In base alla seconda legge della dinamica, questo implica che la risultante delle forze applicate al corpo è nulla. Cioè si può scrivere:



$$\mathbf{P} + \mathbf{f}_v + \mathbf{f}_o + \mathbf{R}_v = m\mathbf{a} = 0$$

Se introduciamo un sistema di riferimento con l'asse y verticale e l'asse x orientato secondo la componente orizzontale della forza esterna applicata al corpo, possiamo proiettare la precedente equazione vettoriale nelle tre equazioni scalari corrispondenti. Nel sistema di riferimento introdotto la forza esterna ha soltanto le componenti secondo l'asse delle y ( $-f_v$ ) e secondo l'asse delle x ( $f_o$ ), il peso solo la componente y ( $-mg$ ), mentre le componenti della reazione vincolare offerta dal piano orizzontale saranno  $R_x$ ,  $R_y$  e  $R_z$ . La componente  $R_y$  coincide con la componente normale della reazione vincolare e, per questo continueremo ad indicarla con N.



asse x	$R_x + f_o = 0$	$R_x = -f_o$
asse y	$N - mg - f_v = 0$	$N = mg + f_v$
asse z	$R_z = 0$	$R_z = 0$

Si vede che la componente orizzontale della reazione vincolare è uguale ed opposta alla componente orizzontale della forza applicata.

Se si aumenta l'intensità della componente orizzontale della forza applicata, si osserva che il corpo rimane fermo fino a che la componente orizzontale della forza non supera un certo valore limite, cioè fin tanto che:

$$f_o \leq f_o^{\max}$$

Questo significa che l'intensità della forza di attrito, cioè della componente orizzontale della reazione vincolare, può essere al massimo uguale a:

$$F_{as}^{\max} = f_o^{\max}$$

Tale valore limite dipende dalla componente verticale della forza applicata. Infatti più alta è l'intensità della componente verticale della forza applicata, più grande è il limite superiore della componente orizzontale, in corrispondenza del quale il corpo rimane ancora fermo.

Si trova, infatti, che la forza di attrito statico massima risulta essere proporzionale alla componente normale della reazione vincolare. Cioè:

$$F_{as}^{\max} = \mu_s N$$

$\mu_s$  viene detto *coefficiente di attrito statico* e dipende dalle natura delle superfici a contatto (tipo di materiale, stato di levigatezza, etc). L'indice s sta per statico.

In generale, quindi, la forza di attrito statico, cioè la componente parallela alla superficie di contatto della reazione vincolare, può assumere tutti i valori tra 0 ed il valore massimo, pari a  $\mu_s N$ . Cioè:

$$F_{as} \leq \mu_s N$$

Il suo valore è determinato, caso per caso, dalla dinamica del problema. Nell'esempio considerato dipendeva dall'intensità della componente parallela alla superficie di contatto della forza applicata: possono esserci anche dei casi in cui la componente parallela al vincolo delle altre forze applicate è nulla, ma non lo è la forza di attrito statico.

Sempre facendo riferimento all'esempio, la forza di attrito ha la stessa direzione, il verso opposto e lo stesso modulo della componente parallela alla superficie di contatto della forza applicata, purché questa sia minore di  $\mu_s N$ .

Questo si può anche esprimere dicendo che la reazione vincolare si trova sempre in un cono con vertice nel punto di contatto e di semiapertura  $\alpha$ , tale che:

$$\tan \alpha = \mu_s$$

Questo cono si chiama *cono di attrito statico*.

Quando la componente orizzontale della forza applicata,  $f_o$ , diventa maggiore di  $\mu_s N$ , il corpo comincia a

muoversi. Per questo il valore massimo della forza di attrito,  $F_{as}^{\max} = \mu_s N$ , viene anche indicato come "*attrito di primo distacco*" oppure "*attrito di moto incipiente*".

Una volta che il corpo è stato messo in movimento, si osserva che, per mantenerlo in moto rettilineo uniforme occorre applicare, nella direzione del moto, una forza orizzontale avente una intensità,  $f_o$ , che è più piccola di quella necessaria per mettere in movimento il corpo, che abbiamo visto essere pari a  $\mu_s N$ .

Siccome anche nel caso di moto rettilineo uniforme, la risultante di tutte le forze applicate al corpo deve essere nulla, la forza di attrito dinamico esercitata dal piano sul corpo deve essere uguale ed opposta alla forza orizzontale applicata. La forza di attrito dinamico è dunque diretta in verso opposto al moto del corpo e si può esprimere come

$$F_{ad} = \mu_d N$$

Dove l'indice d indica l'attrito dinamico. In un ampio intervallo di velocità,  $\mu_d$  è un coefficiente che dipende dalla natura delle superfici a contatto. Ovviamente, da quel che abbiamo detto, risulta che  $\mu_d$  è più piccolo di  $\mu_s$ .

Le due relazioni:

$$F_{as} = \mu_s N$$

$$F_{ad} = \mu_d N$$

sono due relazioni empiriche che nella loro semplicità tengono conto di tutta una serie di comportamenti microscopici complicatissimi.

I coefficienti  $\mu_s$  e  $\mu_d$

non dipendono dalla estensione della superficie di appoggio.

Dipendono invece:

dallo stato delle superfici di contatto.

dai materiali che costituiscono le superfici di contatto.

dalla temperatura.

dalla presenza di altri materiali, in particolare dalla presenza di pellicole liquide.

Fissata la natura delle superfici, i coefficienti  $\mu_s$  e  $\mu_d$  nelle relazioni

$$F_{as} = \mu_s N$$

$$F_{ad} = \mu_d N$$



possono essere assunti come costanti in un intervallo piuttosto ampio di valori della componente normale della reazione vincolare  $N$  e della velocità  $v$  del corpo. Al di fuori di questo intervallo, tali relazioni possono essere ancora usate, ma bisogna tener conto che i coefficienti  $\mu_s$  e  $\mu_d$  dipendono rispettivamente da  $(N/S)$  e  $(v, N/S)$ , dove  $S$  è la superficie di appoggio.

E' bene guardare un po' in dettaglio l'origine delle forze di attrito, non tanto per determinare la loro espressione, quanto per trovare delle giustificazioni a quanto osservato sperimentalmente.

Una superficie, per quanto possa essere levigata, presenterà sempre, a livello microscopico, delle asperità. Quando noi poggiamo un corpo su di un piano orizzontale, in realtà lo poggiamo su un certo numero di queste asperità. A causa dell'interazione tra il corpo e il piano di appoggio, queste asperità si deformano, tendono cioè a schiacciarsi: in corrispondenza di ciascuna asperità si crea una piccola zona in cui i due corpi sono realmente a contatto. Le dimensioni di questa zona dipendono dalla deformazione subita dalla asperità. Ora, noi sappiamo che i materiali reagiscono alle deformazioni generando una forza elastica. Quindi, in ciascun punto di contatto si originerà una forza di tipo elastico che sarà proporzionale alla deformazione e quindi all'area di effettivo contatto. La somma di tutte queste forze elastiche, originatesi nei punti di contatto, costituisce la reazione vincolare che, nel caso di un corpo appoggiato su di un piano orizzontale, possiede solo la componente normale  $N$ , la quale bilancia il peso del corpo. Da questo deriva che l'area di effettivo contatto è proporzionale al peso del corpo.

Nei punti di contatto si formano dei legami a livello molecolare tra un corpo e l'altro. Il numero di tali legami è proporzionale alla superficie di effettivo contatto tra i due corpi, che abbiamo visto essere proporzionale al peso del corpo appoggiato, o, equivalentemente, alla componente normale della reazione vincolare. La forza di attrito è proprio uguale ed opposta alla forza necessaria per rompere questi legami.

Si capisce anche perché la forza di attrito non può dipendere dalla superficie macroscopica di appoggio del corpo sul piano: infatti, l'area di effettivo contatto deve essere sempre la stessa, indipendentemente dalla superficie macroscopica di appoggio, in quanto deve essere proporzionale al peso del corpo. Se la superficie di appoggio è grande ci saranno molti punti di contatto, ciascuno debolmente deformato, ciascuno quindi con una piccola area di contatto effettivo; se invece la superficie di appoggio è piccola, ci saranno meno punti di contatto ma con una maggiore deformazione, quindi ciascuno con una area di effettivo contatto più grande.

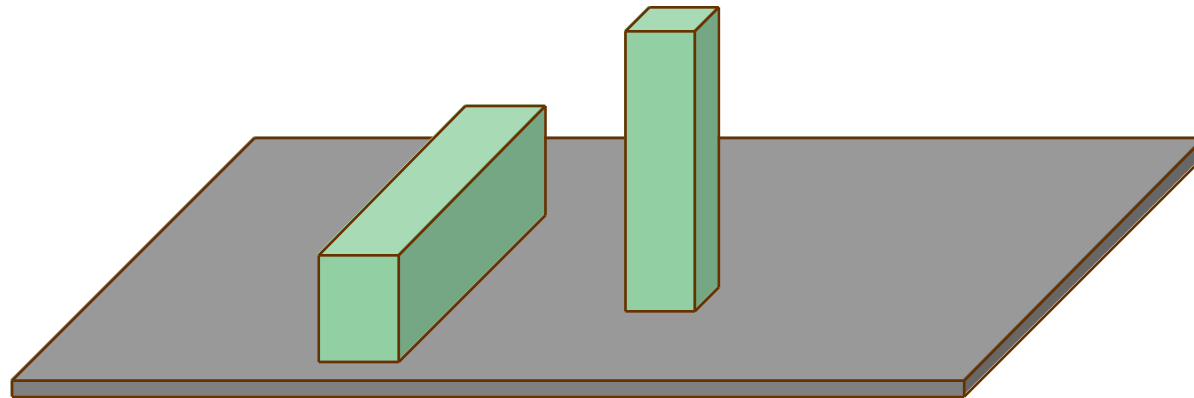
Questo semplice modello è in grado di spiegare anche perché il coefficiente di attrito dinamico è più piccolo di quello statico.

La forza di attrito, sulla base delle considerazioni precedenti, può essere interpretata come la forza necessaria a rompere i legami che si stabiliscono nelle zone di effettivo contatto. Nel caso dell'attrito statico, poiché le superfici a contatto sono ferme una rispetto all'altra, c'è tutto il tempo necessario perché questi legami si consolidino, nel caso invece dell'attrito dinamico, in cui le superfici a contatto scorrono una sull'altra, questi legami si creano e si rompono in tempi estremamente stretti e quindi risultano più deboli di quelli che si generano nel caso statico.

Le forze d'attrito sono molto importanti. Esse infatti ci consentono di camminare, scrivere, tenere in mano degli oggetti, degli utensili etc.

Sono le forze di attrito che consentono ad una automobile di accelerare o di arrestarsi (anche possedendo un motore molto potente, un'automobile ha difficoltà ad accelerare sul ghiaccio o sulla spiaggia nella sabbia).

L'attrito viene anche utilizzato per realizzare i freni, o attacchi a frizione. Si cerca in questi casi di lavorare con



elevati valori di  $\mu_s$  e di porsi nelle condizioni prossime al moto incipiente, in maniera tale che la forza di attrito sia massima.

In molti altri casi invece l'attrito è indesiderato: per esempio negli ingranaggi. In una automobile il 20%

della potenza del motore è spesa per vincere le forze di attrito. Si cerca in questi casi di ridurre l'attrito utilizzando per esempio dei lubrificanti.

E' anche vantaggioso sostituire a corpi che strisciano, corpi che rotolano (attrito volvente). Infatti mentre nel primo caso è necessario tranciare le microsaldature per produrre il movimento, e tutte allo stesso istante, nel secondo caso queste vengono rotte per stiramento, e solo una piccola frazione alla volta. Si ottiene così una notevole riduzione dell'attrito.

### **Tensione in una corda.**

Le corde vengono spesso usate per trasmettere delle forze. Le corde sono in grado di esercitare delle forze a "tirare", in nessun caso è possibile spingere con una corda o esercitare, attraverso la corda, una forza trasversale rispetto alla direzione della corda tesa.

Se ad una corda viene applicata una forza con una componente perpendicolare alla corda stessa, allora la corda tende a modificare la propria direzione e ad allinearsi con la forza applicata.

Consideriamo una corda tesa e ne isoliamo un tratto. Questo tratto interagirà con il resto della corda, in particolare con la parte di corda a destra e con la parte di corda a sinistra. Chiamiamo  $\mathbf{F}_d$  la forza esercitata dalla parte di corda a destra sul tratto di corda in esame e  $\mathbf{F}_s$  quella esercitata dalla parte di corda a sinistra.

Poiché abbiamo detto che le corde esercitano solo forze a tirare aventi la direzione della corda stessa la situazione sarà quella mostrata in figura.

Possiamo scrivere la seconda legge di Newton per il tratto di corda considerato:

$$\mathbf{F}_s + \mathbf{F}_d = m\mathbf{a}$$

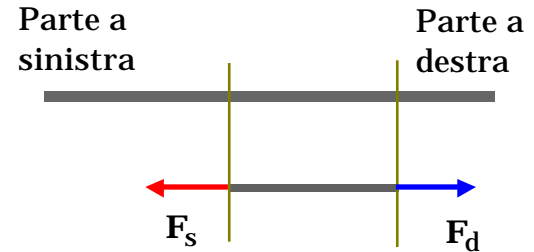
dove abbiamo indicato con  $m$  la massa della parte di corda in esame.

Se la corda è ferma allora l'accelerazione  $\mathbf{a}$  è uguale a zero. Pertanto

$$\mathbf{F}_s = -\mathbf{F}_d$$

cioè la forza esercitata dalla parte a sinistra sul tratto di corda in esame è uguale alla forza esercitata dalla parte a destra.

Ma per il principio di azione e reazione la forza esercitata dal tratto di corda in esame sulla parte di corda a sinistra sarà uguale a  $-\mathbf{F}_s$ , e quindi uguale a  $\mathbf{F}_d$ . La corda quindi trasmette sulla parte di corda a sinistra tutta la forza esercitata dalla parte di corda alla sua destra.



Se l'accelerazione  $\mathbf{a}$  della corda non è nulla e non è nulla neppure la massa della corda, allora  $\mathbf{F}_s = m\mathbf{a} - \mathbf{F}_d$ . In questo caso la forza esercitata dalla parte di corda a sinistra è diversa dalla forza esercitata dalla parte a destra.

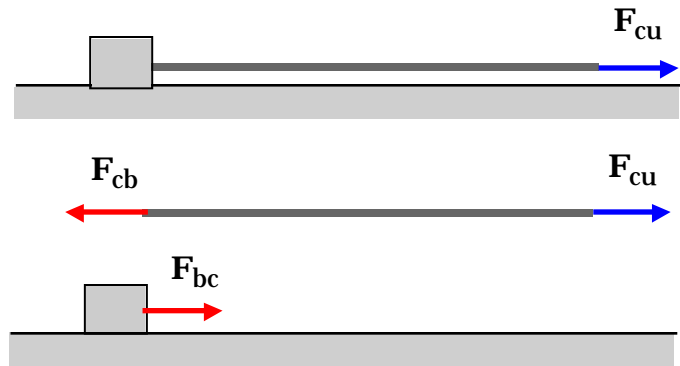
Se però la massa della corda è piccola rispetto a quella degli altri corpi con cui la corda interagisce, per cui è possibile trascurarla, considerarla nulla, si ritorna alla condizione  $\mathbf{F}_s = -\mathbf{F}_d$ . Anche in questo caso dunque la corda trasmette inalterata la forza applicata ad un suo estremo all'altro estremo.

A meno che non venga esplicitamente detto, noi supporremo che le corde utilizzate nei problemi siano corde ideali: inestensibili e prive di massa. Pertanto sia in condizioni statiche che in condizioni dinamiche questo tipo di corde trasmette lasciandola inalterata la forza applicata ad un estremo all'altro. In queste condizioni, in qualunque posizione noi andiamo a tagliare idealmente la corda, la parte a destra eserciterà sulla parte a sinistra una forza  $\mathbf{F}$ , e per il principio di azione e reazione, la parte a sinistra eserciterà sulla parte a destra una forza  $-\mathbf{F}$ , e l'intensità di tale forza è indipendente dal particolare punto in cui è eseguito il taglio ideale. A questa forza si dà il nome di **tensione della corda**. La tensione è dunque, nel caso di corda a massa nulla, costante lungo tutta la corda.

Consideriamo ora un blocco su un piano orizzontale a cui è attaccata una corda. La corda è tirata da un uomo con una forza  $\mathbf{F}_{cu}$  diretta secondo l'asse delle  $x$ . La corda eserciterà sull'uomo una forza uguale e contraria,  $\mathbf{F}_{uc}$ . La corda esercita sul blocco una forza  $\mathbf{F}_{bc}$  diretta lungo l'asse delle  $x$  mentre il blocco esercita sulla corda una forza uguale e contraria,  $\mathbf{F}_{cb}$ . La forza totale agente sulla corda è data dalla relazione:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_{cu} + \mathbf{F}_{cb} = m_c \mathbf{a}$$

Se l'accelerazione  $\mathbf{a}$  è diversa da zero, allora la forza esercitata dall'uomo sulla corda è diversa dalla forza esercitata dalla corda sul blocco. Solo se  $\mathbf{a} = 0$  la forza esercitata dall'uomo sulla corda è uguale alla forza esercitata dalla corda sul blocco. Questo risultato vale anche nel caso ideale in cui la massa della corda è uguale a zero. In questo caso risulta essere sempre verificata la



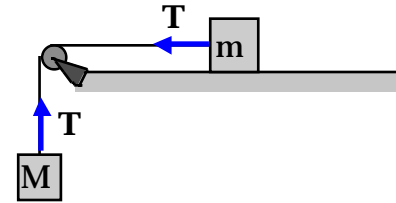
<sup>9</sup>  $\mathbf{F}_{cu}$ : il primo indice indica il corpo su cui la forza agisce, il secondo indica il corpo che genera la forza.

relazione:

$$\mathbf{F}_{cu} = -\mathbf{F}_{cb} = \mathbf{F}_{bc}$$

Cioè la forza in questo caso è interamente trasmessa per mezzo della corda dall'uomo al blocco.

Spesso si usano delle carrucole per cambiare la direzione della tensione. A meno che non venga detto esplicitamente il contrario, noi considereremo le carrucole prive di massa o con un raggio molto piccolo. In queste condizioni il loro unico effetto è quello appunto di far cambiare la direzione alla tensione ma non la sua intensità. Dopo aver studiato i moti di rotazione dei corpi rigidi potremo determinare l'effetto di una carrucola di dimensioni finite e dotata di massa sull'intensità della tensione.



### **Resistenze passive.**

Resistenze passive sono quelle forze che si manifestano su di un corpo in moto e sono sempre dirette in maniera contraria al moto. Un esempio è l'attrito dinamico.

Un altro esempio è costituito dalla forza che un fluido esercita su di un corpo che si muove in esso, per esempio un'automobile che si muove nell'aria. Per penetrare nel fluido, il corpo deve spostarlo, la reazione del mezzo a questo spostamento è una forza che si oppone al moto.

Per velocità molto basse (regime viscoso) la forza è proporzionale alla velocità:

$$\vec{\mathbf{F}} = -b\vec{\mathbf{v}}$$

dove  $b$  è una costante positiva che dipende dal fluido, dalle dimensioni e dalla forma del corpo. Per esempio per un corpo di forma sferica (raggio  $r$ ) che si muove in un fluido viscoso avente coefficiente di viscosità  $\eta$ ,  $b$  è dato dalla legge di Stokes:

$$b = 6 \pi \eta r$$

L'equazione dimensionale del coefficiente di viscosità è data da:

$$[\eta] = [ML^{-1}T^{-1}]$$

e le sue unità di misura nel sistema SI sono Kg/(m s), mentre nel sistema CGS sono g/(cm s) e vengono chiamate *poise*.

A velocità più elevate, quelle tipiche di un'automobile (100km/h) rientrano in questo caso, la resistenza passiva ha una dipendenza dal quadrato della velocità.

Il suo modulo può essere espresso nel seguente modo:

$$D = \frac{1}{2} C \rho A v^2 \quad \text{dove} \quad \begin{array}{l} C = \text{coefficiente aereodinamico (0.4} \div 1) \\ \rho = \text{densità del fluido} \\ A = \text{area efficace} \end{array}$$

Anche in questo caso la direzione è quella della velocità, il verso opposto al moto.

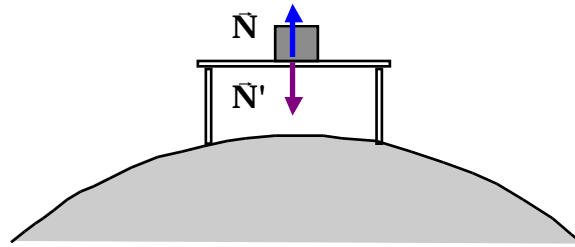
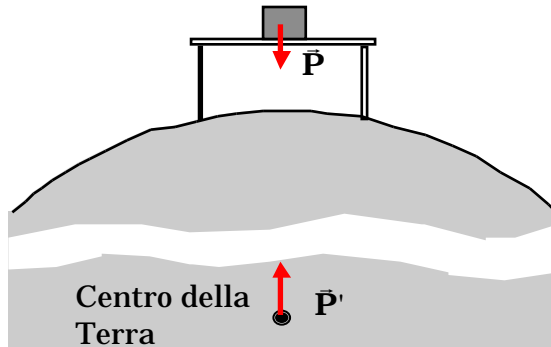
### **Forze di azione e reazione.**

Facciamo alcuni esempi di forze di azione e reazione. Consideriamo un corpo appoggiato su di un piano orizzontale. Il blocco è soggetto alla forza di attrazione della Terra  $\vec{P}$ . Per la terza legge di Newton una forza uguale ed opposta viene esercitata dal blocco sulla Terra,  $\vec{P}'$ . Queste due forze costituiscono una coppia di azione e reazione.

Se queste fossero le uniche forze presenti nel sistema, il blocco cadrebbe verso la Terra, sotto l'azione della forza  $\vec{P}$  acquistando una accelerazione in accordo alla seconda legge della dinamica. Anche la Terra cadrebbe verso il corpo, sotto l'azione della forza  $\vec{P}'$ . Si osservi che a causa della grande differenza di massa tra la Terra ed il corpo, e data l'eguaglianza dei moduli delle forze  $\vec{P}$  e  $\vec{P}'$ , l'accelerazione subita dalla Terra è estremamente più piccola di quella subita dal corpo. E' per questo che solitamente si trascura il moto della Terra e si dice semplicemente che il corpo cade verso la Terra.

Poiché questo non accade, il corpo infatti rimane fermo sul piano orizzontale, vuol dire che c'è qualche altra forza che agisce sul corpo. Infatti il corpo essendo appoggiato sul piano orizzontale interagisce con esso: il piano

orizzontale esercita quindi sul blocco una forza normale  $\vec{N}$  che bilancia esattamente la forza  $\vec{P}$  (questo si deduce applicando al corpo la seconda legge di newton ed osservando che il fatto che il corpo rimane fermo:  $\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a} = 0$ ). Il blocco risulta pertanto in equilibrio. Ma se il piano esercita sul blocco una forza, il blocco a sua volta esercita sul piano una reazione uguale e contraria,  $\vec{N}'$ . Anche le forze  $\vec{N}$  ed  $\vec{N}'$  costituiscono una coppia di forze di azione e reazione.



# Applicazioni delle leggi di NEWTON

## **Regole da utilizzare nella soluzione di problemi che richiedono l'uso delle leggi di NEWTON**

1. *Individuare il punto materiale di cui si vuole determinare il moto.*  
In qualche problema è presente più di un punto materiale: le operazioni descritte ai successivi punti dal 2 al 6 vanno ripetute per ogni punto materiale presente nel problema.
2. *Stabilire il sistema di riferimento inerziale che si intende utilizzare per lo studio del moto*  
In molti problemi si farà uso del sistema del laboratorio, ma in qualche altro caso come nei problemi di gravitazione converrà usare un sistema geocentrico (moto della luna e dei satelliti artificiali) o eliocentrico (moto della terra, moto dei pianeti). In qualche altro caso, come per descrivere moti che avvengono in un treno, su una nave, si potranno usare dei sistemi di riferimento legati al treno, alla nave etc purchè questi oggetti si muovono di moto rettilineo uniforme rispetto al sistema del laboratorio, altrimenti occorrerà considerare sempre il sistema del laboratorio.
3. *Determinare tutte le forze agenti sul punto materiale sotto osservazione.*  
Per ricercare le forze dobbiamo tener presente che nei sistemi di riferimento inerziali le forze sono forze di interazione, nel senso che oltre ad esserci il corpo che le subisce (il corpo sotto osservazione) per ciascuna forza si può determinare il corpo che la origina. Per ricercare le forze agenti sul corpo sotto osservazione occorre quindi guardare nell'ambiente circostante il corpo stesso ed individuare quei corpi che possono dare origine a forze.  
È utile tener presente che le forze si possono suddividere in
  1. forze che agiscono a distanza (non è richiesto il contatto tra il corpo che origina la forza ed il corpo che la subisce). Per esempio la forza peso, la forza di gravitazione universale, la forza elettrostatica tra cariche elettriche, la forza di Lorentz.
  2. forze di contatto (agiscono solo se c'è contatto tra il corpo che origina la forza ed il corpo che la subisce). Per esempio la reazione vincolare (composta dalla componente normale al vincolo  $N$  e dalla componente parallela, la forza di attrito), la tensione della corda, la forza elastica, la resistenza passiva.  
Pertanto, una volta riconosciute le forze che possono agire a distanza, basta guardare i corpi a contatto con il corpo sotto osservazione.



Nel determinare le forze agenti sul corpo si suggerisce di localizzare il corpo stesso in una posizione possibilmente diversa sia da quella iniziale che da quella finale, una posizione intermedia scelta arbitrariamente.

4. *Costruire il diagramma del corpo libero.*

È utile raffigurare con dei vettori le forze agenti sul corpo in quanto questa operazione semplifica quella prevista dal successivo punto 6.

Molto spesso vengono semplicemente riportate le forze nello schizzo che raffigura la situazione fisica in cui avviene il moto ed in cui sono rappresentati tutti i vincoli presenti.

Si suggerisce comunque di raffigurare le forze agenti sul punto materiale oggetto dell'osservazione in uno schizzo in cui non sono rappresentati né i vincoli, né i dispositivi utilizzati per applicare le forze, molle, corde, etc.

Lo schizzo così costruito si chiama diagramma del corpo libero.

5. *Scrivere la seconda legge della dinamica (in forma vettoriale).*

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

6. *Scrivere le tre equazioni scalari corrispondenti alla seconda legge della dinamica (vettoriale).*

Ogni equazione vettoriale è equivalente a tre equazioni scalari ottenute eguagliando le componenti dei vettori lungo tre direzioni tra loro ortogonali.

$$\begin{aligned} \left( \vec{F} \right)_x &= (m\vec{a})_x \\ \left( \vec{F} \right)_y &= (m\vec{a})_y \\ \left( \vec{F} \right)_z &= (m\vec{a})_z \end{aligned}$$

Per proiettare la seconda legge della dinamica non è necessario utilizzare gli assi del sistema di riferimento inerziale utilizzato per scriverla. Infatti quando due vettori sono uguali devono essere uguali anche le loro componenti lungo una qualsiasi delle infinite alla tre direzioni dello spazio. Per trovare le tre equazioni scalari corrispondenti all'equazione vettoriale di partenza basta eguagliare le componenti dei vettori lungo tre direzioni

arbitrariamente scelte purché perpendicolari tra loro.

È chiaro quindi che si ha la massima libertà nella scelta delle direzioni degli assi su cui proiettare l'equazione vettoriale.

Ricordando che:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{F} \\ \vec{F} \end{array} \right)_x &= F_x \quad (m\vec{a})_x = ma_x & F_x &= ma_x \\ \left( \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{F} \\ \vec{F} \end{array} \right)_y &= F_y \quad (m\vec{a})_y = ma_y & F_y &= ma_y \\ \left( \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{F} \\ \vec{F} \end{array} \right)_z &= F_z \quad (m\vec{a})_z = ma_z & F_z &= ma_z \end{aligned}$$

7. *Determinare tutte le ulteriori condizioni particolari presenti nel problema,*

- se due corpi sono connessi da una corda ideale, quindi di lunghezza costante, è possibile scrivere delle relazioni tra i loro spostamenti e quindi tra le loro velocità e le loro accelerazioni.
- Se un corpo è fermo ( $x, y$  e  $z$  costanti), tutte e tre le componenti dell'accelerazione sono nulle.
- In alcuni casi solo alcune delle coordinate del punto materiale sono costanti, ne deriva le corrispondenti componenti dell'accelerazione sono nulle.
- Se la traiettoria percorsa è curva, cioè non rettilinea, allora la componente normale dell'accelerazione vale  $a_n = \frac{v^2}{r}$  ( $v$ =modulo della velocità,  $r$  raggio di curvatura della traiettoria).
- Alcune delle forze possono avere lo stesso modulo:
  1. Coppia di forze di azione e reazione, in base alla terza legge.
  2. Forze esercitate su oggetti diversi dallo stesso tratto di corda.
- Etc.

8. *Determinare le componenti dell'accelerazione o, detto in altri termini, le accelerazioni dei punti proiezione nei loro moti rettilinei sugli assi coordinati.*

$$\begin{aligned}
 F_x &= ma_x & a_x &= \frac{F_x}{m} \\
 F_y &= ma_y & a_y &= \frac{F_y}{m} \\
 F_z &= ma_z & a_z &= \frac{F_z}{m}
 \end{aligned}$$

9. *Esaminare con cura la dipendenza delle accelerazioni appena calcolate.*

1. se qualcuna delle componenti dell'accelerazione è costante, allora vuol dire che il moto del punto proiezione sull'asse considerato è un moto uniformemente accelerato.
2. L'accelerazione è costante se tutte le grandezze da cui dipende sono delle costanti: per esempio  $m, g, \mu_s, \mu_c, \text{sen}$  (con costante), etc.. Per essere costante l'accelerazione non deve dipendere dal tempo o da grandezze dipendenti dal tempo come la posizione o la velocità.
3. Se qualcuna delle componenti dell'accelerazione è proporzionale all'opposto della posizione corrispondente allora il moto è armonico.
4. Se qualcuna delle componenti dell'accelerazione è proporzionale all'opposto della corrispondente componente della velocità, il moto lungo quella direzione è smorzato.
5. Se nessuno di questi casi particolari è verificato occorre procedere con la risoluzione delle equazioni differenziali.

Moto uniforme	Accelerazione nulla $a_x=0$	$x = x_o + v_{x0}t$ $v_x = v_{x0}$
Moto uniformemente accelerato	Accelerazione costante: $a_x=\text{costante}$	$x = x_o + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$ $v_x = v_{x0} + a_x t$

Moto armonico	Accelerazione proporzionale all'opposto della posizione: $a_x = -\frac{\omega^2}{p}x$	$x = A \cos(\omega_p t + \phi_0)$ $v_x = -A \omega_p \sin(\omega_p t + \phi_0)$
Moto smorzato	Accelerazione proporzionale all'opposto della velocità $a_x = -\gamma v_x$	$v_x = v_{x0} e^{-\gamma t}$ $x = x_0 + \frac{v_{x0}}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t})$

10. *Scrivere le leggi orarie facendo attenzione ad inserire correttamente le condizioni iniziali.*

Se qualcuna delle condizioni descritte al punto 9 è verificata si può passare a scrivere la corrispondente legge oraria sulla base della corrispondenza mostrata nella tabella precedente. Altrimenti andranno risolte le tre equazioni differenziali se dovessero risultare indipendenti o il sistema di equazioni differenziali in caso contrario.

Vanno individuate infine le condizioni iniziali, cioè la posizione e la velocità all'istante di tempo iniziale (generalmente l'istante  $t=0$  s) per ciascuno dei corpi presenti nel problema e, sulla base di queste, vanno determinati i parametri liberi nelle soluzioni generali.

11. *Determinare le forze mancanti.*

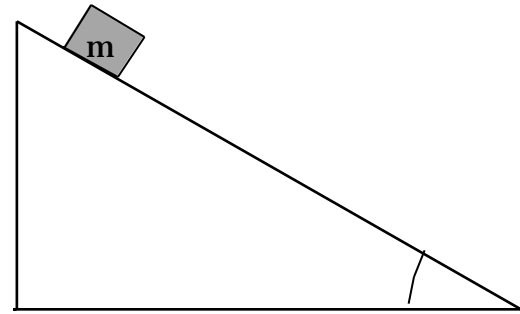
Quando sul corpo agiscono reazioni vincolari, con componente normale e forza di attrito, oppure la tensione di una corda, poiché queste forze non sono note a priori esse vanno determinate sulla base delle tre equazioni scalari descritte precedentemente.

Ho voluto riassumere in questo paragrafo la procedura da seguire per la soluzione dei problemi che richiedono l'applicazione delle leggi di Newton. Per apprezzarne la loro utilità è necessario applicarle ad un caso concreto. Si prega pertanto di rileggere questo paragrafo dopo aver seguito alcuni degli esempi proposti o aver svolto qualche problema.

### **Moto sul piano inclinato.**

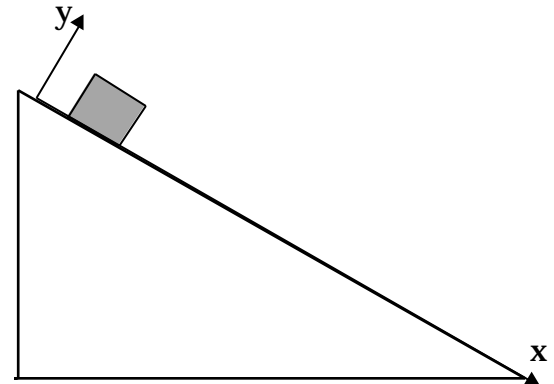
Si consideri un corpo di massa  $m$  appoggiato su un piano inclinato rispetto al piano orizzontale con inclinazione variabile con continuità da zero a  $90^\circ$ . Sperimentalmente si osserva che quando l'angolo raggiunge il valore  $\theta_s=30^\circ$  il corpo inizia a muoversi. Se, una volta che il corpo di massa  $m$  si è messo in moto, si mantiene costante l'angolo al valore  $\theta_s=30^\circ$ , si osserva che il corpo si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato. Se, invece, subito dopo aver messo in moto il corpo, l'inclinazione viene rapidamente diminuita e portata al valore  $\theta_f=25^\circ$ , il moto risulta essere rettilineo uniforme. Determinare i

valori dei coefficienti di attrito statico e dinamico  $\mu_s$  e  $\mu_d$  tra il piano inclinato e il corpo di massa  $m$  e l'accelerazione nel caso in cui l'inclinazione del piano viene mantenuta uguale a  $\theta_s=30^\circ$ .



Cerchiamo in questo esempio di utilizzare la procedura illustrata nel paragrafo precedente.

1. *individuare il punto materiale di cui si vuole determinare il moto.*  
Nel nostro caso si tratta del corpo di massa  $m$  poggiato sul piano inclinato.
2. *fissare il sistema di riferimento inerziale.* Per moti che avvengono nel laboratorio si può scegliere il sistema del Laboratorio. Ovviamente siamo liberi di scegliere l'orientazione del sistema di riferimento in maniera tale da semplificare i calcoli. Nel nostro caso, per esempio, possiamo scegliere un sistema di riferimento il cui piano  $xy$  sia il piano verticale contenente la normale al piano stesso, l'asse  $y$  coincidente con la normale al piano, l'asse  $x$  parallelo al piano, diretto verso la base del piano, e l'asse  $z$  diretto in maniera da formare una terna destrorsa. Possiamo anche fissare l'origine del sistema di riferimento coincidente con la posizione del punto



materiale all'inizio del moto.

3. *determinare tutte le forze che agiscono sul corpo.*

Per trovare le forze occorre guardare ai corpi che sono intorno al corpo di massa  $m$ .

1. interazioni a distanza: l'aggettivo inclinato, riferito al piano, presente nella traccia ci fa capire che siamo nelle vicinanze della superficie terrestre (infatti aggettivi come orizzontale, verticale e inclinato hanno solo significato sulla superficie terrestre). Il corpo di massa  $m$  sarà dunque soggetto alla forza peso  $\vec{P} = m\vec{g}$ .
2. Interazioni con contatto: il corpo di massa  $M$  è a contatto con il piano inclinato. E' logico attendersi una interazione tra il corpo di massa  $m$  ed il piano inclinato.

Dato che il piano inclinato costituisce un vincolo al moto del corpo di massa  $m$ , la forza che il piano inclinato eserciterà sul corpo di massa  $m$  è la reazione vincolare.

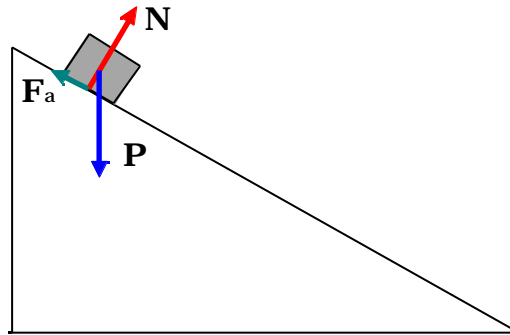
Questa avrà sia la componente normale  $\vec{N}$  che la componente tangente, la forza di attrito  $\vec{F}_a$ .

Per piccoli valori dell'angolo di inclinazione, fino all'angolo di  $\alpha=30^\circ$ , la forza di attrito sarà di attrito statico. Ovviamente quando il corpo si muove la componente parallela della reazione vincolare sarà di attrito dinamico.

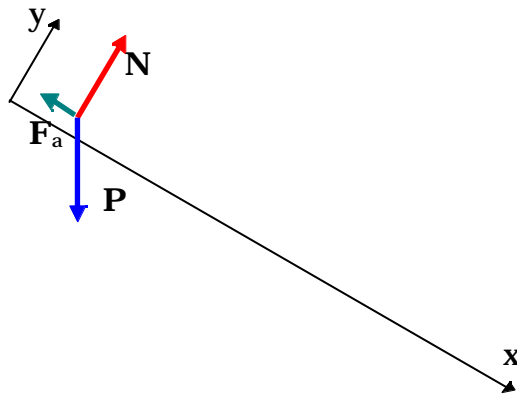
La direzione della forza di attrito statico è determinata dalla componente parallela al piano della forza agente sul corpo, che nel nostro caso è la forza peso. Quest'ultima può essere decomposta in una componente normale ed una parallela al piano. La componente parallela è contenuta nel piano  $xy$ , il piano verticale contenente anche la normale al piano inclinato. Anche la forza di attrito statico giace in questo piano. Quando l'angolo del piano inclinato viene aumentato, la componente parallela al piano della forza peso aumenta fino a diventare più grande della massima<sup>10</sup> forza di attrito che il piano può esercitare: a questo punto il corpo si mette in movimento. Siccome il corpo parte da fermo, il suo moto avverrà nella direzione della componente parallela della forza peso. Ne deriva che il moto avviene nel piano verticale contenente la normale al piano inclinato. La forza di attrito dinamico, che si oppone al moto, è anch'essa contenuta in questo piano.

---

<sup>10</sup> Si osservi che anche la normale  $N$  diminuisce. Con l'aumentare dell'angolo diminuisce anche la massima forza di attrito che il piano inclinato può esercitare, perché diminuisce  $N$ .



4. *costruire il diagramma del corpo libero:*  
 in un diagramma separato si riportano nel sistema di riferimento fissato, le forze che agiscono sul punto materiale.



5. *applicare la seconda legge di Newton in forma vettoriale.*  
 Nel nostro caso si ha:

$$\vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{N}} + \vec{\mathbf{F}}_a = m\vec{\mathbf{a}}$$

6. Scrivere le tre equazioni scalari corrispondenti alla seconda legge della dinamica.

$$\begin{array}{l} x \quad mgsen \quad - \quad F_a = ma_x \\ y \quad N - mgcos \quad = ma_y \\ z \quad \quad \quad 0 = ma_z \end{array}$$

7. Determinare tutte le ulteriori condizioni particolari presenti nel problema,

Per  $\mu_s$  leggermente minore, per esempio un infinitesimo più piccolo, di  $\mu_s$ , il corpo è ancora fermo, cioè  $a_x$  è uguale a zero, mentre la forza di attrito statico  $F_s$  è solo un infinitesimo più piccola di quella massima. Si può scrivere che:

$$\begin{array}{l} a_x = 0 \\ F_a = F_s^{\max} \end{array}$$

Inoltre, poiché il corpo è fermo, anche  $a_y=0$

8. Determinare le accelerazioni dei punti proiezione.

9. Esaminare con cura la dipendenza delle accelerazioni appena calcolate

10. Scrivere le leggi orarie.

Possiamo tralasciare nel nostro caso questi tre punti perché sappiamo che il corpo è fermo.

11. Determinare le forze mancanti.

Utilizzando le equazioni scritte al punto 6 e le condizioni riportate al punto 7 troviamo:

$$F_a^{\max} = mgsen \quad \mu_s \quad \quad N = mgcos \quad \mu_s$$

Ricordando che il modulo della forza di attrito statico massima è data da:  $F_a^{\max} = \mu_s N$  possiamo ricavare il coefficiente di attriti statico:



$$\mu_s = \frac{F_a^{\max}}{N} = \frac{mg \sin \alpha_s}{mg \cos \alpha_s} = \frac{\sin \alpha_s}{\cos \alpha_s} = \tan \alpha_s$$

Il coefficiente di attrito statico è proprio uguale alla tangente dell'angolo limite  $\alpha_s$  ( $\mu_s=0.58$ ).

Consideriamo ora il caso in cui l'angolo  $\alpha_s$  viene ridotto al valore  $\alpha_c$ .

I punti dall'uno al sei sono esattamente uguali a quelli del caso precedente ad eccezione del fatto che in questo caso la forza di attrito da considerare è quella di attrito dinamico.

6bis. *Scrivere le tre equazioni scalari corrispondenti alla seconda legge della dinamica.*

$$\begin{aligned} x & \quad mgsen \alpha - F_a = ma_x \\ y & \quad N - mgcos \alpha = ma_y \\ z & \quad 0 = ma_z \end{aligned}$$

7bis. *Determinare tutte le ulteriori condizioni particolari presenti nel problema,*

1. Essendo l'attrito dinamico, il modulo della forza di attrito dinamico vale:

$$F_a = \mu_d N$$

2. L'inclinazione del piano inclinato è  $\alpha_d$ .

3. Poiché la traccia afferma che quando l'angolo è  $\alpha_d$  il moto è uniforme allora vuol dire che in questo caso  $a_x$  è uguale a zero.

$$a_x = 0$$

4. Poiché durante il moto il corpo si mantiene sempre a contatto con il piano inclinato, questo vuol dire che la sua coordinata y, nel sistema di riferimento adottato, non cambia. Pertanto la componente y della velocità è costante ed è uguale zero, e anche la componente y della accelerazione è nulla, visto che la corrispondente componente della velocità non varia (è sempre uguale a zero).

$$a_y = 0$$

8bis. *Determinare le accelerazioni dei punti proiezione.*

9bis. *Esaminare con cura la dipendenza delle accelerazioni appena calcolate*

10bis. *Scrivere le leggi orarie.*

Anche in questo caso possiamo tralasciare questi tre punti perché sappiamo già dalla traccia che il moto è uniforme.

Forse vale la pena soffermarsi un attimo sulla equazione del moto lungo l'asse z:

$$0 = ma_z$$

Questa equazione ci dice che il moto lungo l'asse z è un moto uniforme. La legge oraria di un moto uniforme è:

$$z(t) = z_0 + v_{z0}t$$

Dalla traccia ricaviamo che il corpo parte da fermo: al tempo  $t=0$  (s)  $v_{z0}=0$  (m/s) e la posizione  $z_0=0$ (m).

Pertanto  $z(t)$  è costantemente uguale a zero. Il moto avviene nel piano xy, anzi in questo caso solo lungo l'asse x.

$$z(t) = 0 \quad (\text{m})$$

11bis. *Determinare le forze mancanti.*

Utilizzando le equazioni scritte al punto 6bis e le condizioni riportate al punto 7bis troviamo:

$$F_{ad} = mg \sin \alpha \quad N = mg \cos \alpha$$

Da cui ricaviamo:

$$\mu_d = \frac{F_{ad}}{N} = \frac{mg \sin \alpha}{mg \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

Il coefficiente di attrito dinamico è proprio uguale alla tangente dell'angolo  $\alpha$  ( $\mu_d=0.47$ ).

Consideriamo ora il terzo caso in cui l'angolo  $\theta$  viene mantenuto al valore limite di  $30^\circ$ .

I punti dall'uno al sei sono esattamente uguali a quelli dei casi precedenti tenendo però conto del fatto che in questo caso la forza di attrito da considerare è quella di attrito dinamico.

6ter. *Scrivere le tre equazioni scalari corrispondenti alla seconda legge della dinamica.*

$$x \quad mgsen \theta - F_a = ma_x$$

$$y \quad N - mgcos \theta = ma_y$$

$$z \quad 0 = ma_z$$

7ter. *Determinare tutte le ulteriori condizioni particolari presenti nel problema,*

1. L'inclinazione del piano inclinato è  $\theta$ .
2. La forza di attrito da considerare è quella di attrito dinamico, il modulo della forza di attrito dinamico vale:

$$F_a = \mu_c N$$

3. Poiché durante il moto il corpo si mantiene sempre a contatto con il piano inclinato, questo vuol dire che la sua coordinata  $y$ , nel sistema di riferimento adottato, non cambia. Pertanto la componente  $y$  della velocità è costante ed è uguale zero, e anche la componente  $y$  della accelerazione è nulla, visto che la corrispondente componente della velocità non varia (è sempre uguale a zero).

$$a_y = 0$$

4. Per quanto riguarda il punto proiezione sull'asse  $z$  valgono le considerazioni svolte precedentemente al punto 10bis. Ne risulta che il moto del punto materiale è un moto rettilineo sull'asse  $x$ .

8ter. *Determinare le accelerazioni dei punti proiezione.*

In questo caso siamo interessati solo alla componente dell'accelerazione lungo l'asse  $x$ . Abbiamo già mostrato che il moto del punto materiale è un moto rettilineo lungo l'asse  $x$ .

Utilizzando la prima delle equazioni elencate al punto 6ter e le ulteriori condizioni elencate al punto 7ter, troviamo che la componente  $x$  dell'accelerazione, che tra l'altro è l'unica componente non nulla, vale:

$$a_x = \frac{mg \sin \theta - F_{ac}}{m} = \frac{mg \sin \theta - \mu_c N}{m}$$

Dalla seconda delle equazioni elencate al punto 6ter, determiniamo il valore del modulo della componente normale della reazione vincolare, anticipiamo cioè il punto 11ter:

$$N = mg \cos \theta$$

La componente x dell'accelerazione diventa dunque:

$$a_x = \frac{mg \sin \theta - \mu_c N}{m} = \frac{mg \sin \theta - \mu_c mg \cos \theta}{m} = g(\sin \theta - \mu_c \cos \theta)$$

9ter. *Esaminare con cura la dipendenza delle accelerazioni appena calcolate*

La componente x dell'accelerazione è costante

$$a_x = g(\sin \theta - \mu_c \cos \theta)$$

essa dipende infatti da  $g$ ,  $\mu_c$  e  $\theta$ , parametri che non variano durante il moto del corpo di massa  $m$ . essa vale infatti:

$$a_x = 0,9 \text{ m/s}^2$$

Il moto del punto proiezione sull'asse x è quindi un moto rettilineo uniformemente accelerato.

10ter. *Scrivere le leggi orarie.*

Limitiamoci sempre a considerare il moto del punto proiezione sull'asse delle x.

La soluzione generale del moto uniformemente accelerato è data da:

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

in cui  $x_0$  e  $v_{x0}$  sono rispettivamente la posizione e la componente x della velocità all'istante iniziale cioè al

tempo  $t=0$  secondi. Poiché come si desume dalla traccia il punto materiale parte da fermo e dato che abbiamo scelto il sistema di riferimento con l'origine coincidente con la posizione iniziale del punto materiale, entrambe le due quantità precedenti sono nulle.

La legge oraria diventa quindi:

$$x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 = \frac{1}{2} g (\sin \alpha - \mu_c \cos \alpha) t^2$$

11ter. *Determinare le forze mancanti.*

Abbiamo già anticipato al punto 7ter il calcolo del modulo della componente normale della reazione vincolare.

### ***Moto del proiettile.***

Un cannone lancia un proiettile con una velocità iniziale  $v_0=60\text{m/s}$  ad un angolo di  $60^\circ$  rispetto all'orizzontale. Determinare, trascurando la resistenza dell'aria,

1. la distanza dal punto di partenza del punto di atterraggio del proiettile (gittata).
2. la velocità di impatto al suolo
3. la durata del moto
4. l'altezza massima raggiunta dal proiettile.
5. il tempo impiegato per raggiungerla.
6. il valore dell'angolo per il quale la gittata è massima ed il valore della gittata.
7. la gittata quando l'angolo è di  $30^\circ$ .

1. *Individuare il punto materiale di cui si vuole determinare il moto.*

Il punto materiale è il proiettile

2. *Stabilire il sistema di riferimento inerziale che si intende utilizzare per lo studio del moto*

Scegliamo un sistema di riferimento con l'origine nella posizione del cannone, cioè coincidente con la posizione iniziale del proiettile, l'asse  $y$  verticale, l'asse  $x$  orizzontale in maniera che il vettore della velocità iniziale sia contenuto nel piano  $xy$  (l'asse  $x$  cioè è diretto nella direzione in cui punta la canna del cannone).

L'asse  $z$  è automaticamente fissato da queste scelte e dal fatto che la terna cartesiana deve essere costruita con

- la regola della mano destra.
3. *Determinare tutte le forze agenti sul punto materiale sotto osservazione.*

Una volta che il proiettile ha abbandonato la canna del cannone, nell'ipotesi di poter trascurare la resistenza dell'aria, l'unica forza agente è la forza peso  $\bar{\mathbf{P}} = m\bar{\mathbf{g}}$ .

4. *Costruire il diagramma del corpo libero.*  
In questo caso il diagramma del corpo libero è abbastanza semplice:
5. *Scrivere la seconda legge della dinamica (in forma vettoriale).*

$$\bar{\mathbf{P}} = m\bar{\mathbf{a}} \quad \bar{\mathbf{g}} = \bar{\mathbf{a}}$$

6. *Scrivere le tre equazioni scalari corrispondenti alla seconda legge della dinamica (vettoriale).*

$$x \quad 0 = a_x$$

$$y \quad -g = a_y$$

$$z \quad 0 = a_z$$

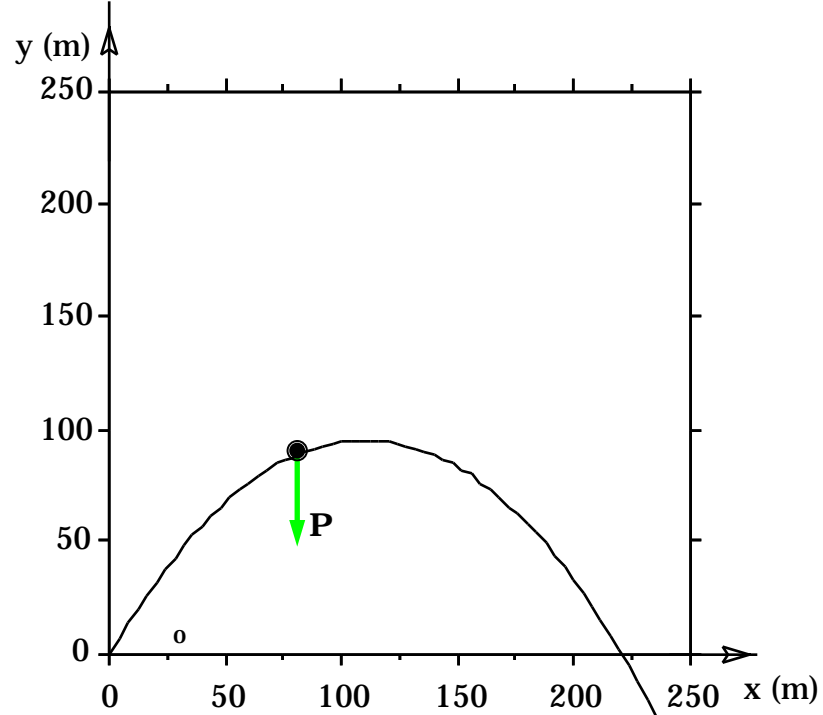
7. *Determinare tutte le ulteriori condizioni particolari presenti nel problema.*  
Nessuna condizione particolare.
8. *Determinare le componenti dell'accelerazione  $\mathbf{a}$ , detto in altri termini, le accelerazioni dei punti proiezione nei loro moti rettilinei sugli assi coordinati.*

$$x \quad a_x = 0$$

$$y \quad a_y = -g$$

$$z \quad a_z = 0$$

9. *Esaminare con cura la dipendenza delle accelerazioni appena calcolate.*



Il moto lungo l'asse x è un moto uniforme.

$$x(t) = x_o + v_{ox} t$$

Quello lungo l'asse y è uniformemente accelerato.

$$y(t) = y_o + v_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2$$

Quello lungo l'asse z è uniforme come quello lungo l'asse x.

$$z(t) = z_o + v_{oz} t$$

10. *Scrivere le leggi orarie facendo attenzione ad inserire correttamente le condizioni iniziali.*

Avendo scelto l'origine del sistema di riferimento coincidente con la posizione iniziale del proiettile risulta che:

$$x_o = 0 \qquad y_o = 0 \qquad z_o = 0$$

mentre le componenti della velocità iniziale

$$v_{x_o} = v_o \cos \alpha_o \qquad v_{y_o} = v_o \sin \alpha_o \qquad v_{z_o} = 0$$

La legge oraria del proiettile diventa:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_o \cos \alpha_o t & v_x &= v_o \cos \alpha_o \\ y(t) &= v_o \sin \alpha_o t - \frac{1}{2} g t^2 & v_y &= v_o \sin \alpha_o - g t \\ z(t) &= 0 & v_z &= 0 \end{aligned}$$

Il fatto che la coordinata z sia costantemente uguale a zero significa che il moto è piano ed avviene nel piano xy.

Le equazioni parametriche della traiettoria sono:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_o \cos \alpha_o t \\ y(t) &= v_o \sin \alpha_o t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

L'equazione della traiettoria si ottiene eliminando il parametro tempo. Ricaviamo il tempo dalla prima equazione e sostituiamo nella seconda:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \theta_0}$$

$$y = x \tan \theta_0 - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta_0}$$

L'equazione è del tipo  $y = ax + bx^2$  ed è quella di una parabola come quella rappresentata nel grafico.

$$y = v_0 \sin \theta_0 \frac{x}{v_0 \cos \theta_0} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta_0}$$

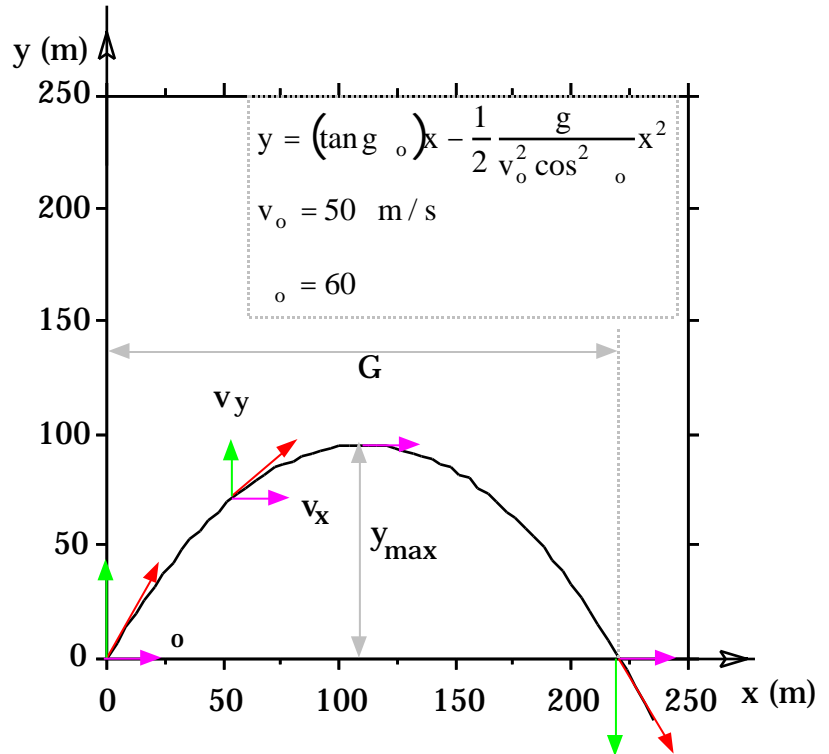
11. *Determinare le forze mancanti.*

Non ci sono forze mancanti da determinare.

Avendo determinato la traiettoria del proiettile, è possibile rispondere alle domande della traccia.

1. la distanza dal punto di partenza del punto di atterraggio del proiettile (gittata).

Per calcolare la gittata occorre determinare la coordinata x del punto di impatto. Poiché la coordinata y del punto di impatto è uguale a zero, occorre ricercare i valori della coordinata x quando la y è uguale a 0.





$$y = 0 \quad 0 = x \tan \theta_0 - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta_0}$$

$$0 = x \tan \theta_0 - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta_0}$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{\tan \theta_0 2v_0^2 \cos^2 \theta_0}{g} = \frac{2v_0^2 \cos^2 \theta_0 \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0}}{g}$$

$$= \frac{2v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{g}$$

La soluzione  $x_1$  rappresenta il punto di partenza, mentre  $x_2$  quello di arrivo. La gittata è la differenza delle due coordinate:

$$G = x_2 - x_1 = \frac{2v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{g} = 220.6 \text{ m}$$

2. la velocità di impatto al suolo

Conviene rispondere prima alla successiva domanda.

3. la durata del moto

Per calcolare la durata del moto occorre calcolare il tempo di impatto del proiettile. Si usa la legge oraria lungo l'asse  $y$  imponendo che  $y$  sia uguale a zero.

$$y = 0 \quad 0 = t v_0 \sin \theta_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

$$t_1 = 0$$

$$t_2 = \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g}$$

Il tempo  $t_1$  corrisponde al punto di partenza,  $t_2$  al punto di impatto.

La durata del moto è la differenza tra i due tempi:

$$D = t_2 - t_1 = \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g} = 8.82 \text{ s}$$

La velocità finale si può ottenere calcolando le due componenti all'istante di tempo dell'impatto  $t_2$ .

$$v_x = v_o \cos \theta_o \qquad v_x = v_o \cos \theta_o$$

$$v_y = v_o \sin \theta_o - gt \qquad v_y = v_o \sin \theta_o - g \frac{2v_o \sin \theta_o}{g} = -v_o \sin \theta_o$$

La componente x è la stessa di quella all'inizio del moto, quella y è opposta a quella iniziale. Il modulo della velocità è lo stesso sia allo sparo che all'impatto.

4. l'altezza massima raggiunta dal proiettile.

Anche qui conviene rispondere prima alla domanda seguente.

5. il tempo impiegato per raggiungerla.

Osserviamo che, essendo la velocità sempre tangente alla traiettoria, nel punto in cui la traiettoria raggiunge la massima altezza, la velocità ha solo la componente orizzontale, quindi la componente verticale della velocità è nulla. Si può usare questa condizione per determinare l'istante di tempo in cui viene raggiunta la massima altezza.

$$v_y = v_o \sin \theta_o - gt$$

$$v_y = 0 \qquad 0 = v_o \sin \theta_o - gt \qquad t_3 = \frac{v_o \sin \theta_o}{g}$$

Il tempo per raggiungere la massima altezza è esattamente la metà della durata del moto.

Utilizzando la legge oraria possiamo colcolare le coordinate del punto in cui la traiettoria raggiunge la massima altezza, cioè all'istante di tempo appena calcolato,  $t_3$ .

$$x(t) = v_o \cos \theta_o t$$

$$y(t) = v_o \sin \theta_o t - \frac{1}{2} gt^2$$

$$t_3 = \frac{v_o \sin \theta_o}{g}$$

$$x_{\max} = \frac{v_o^2 \sin \theta_o \cos \theta_o}{g}$$

$$y_{\max} = v_o \sin \theta_o \frac{v_o \sin \theta_o}{g} - \frac{1}{2} g \left( \frac{v_o \sin \theta_o}{g} \right)^2$$

$$x_{\max} = \frac{v_o^2 \sin \theta_o \cos \theta_o}{g} = 110.3 \text{ m}$$

$$y_{\max} = \frac{1}{2} \frac{v_o^2 \sin^2 \theta_o}{g} = 95.6 \text{ m}$$

6. il valore dell'angolo per il quale la gittata è massima ed il valore della gittata.

Dall'espressione della gittata, usando la relazione trigonometrica  $2 \sin \theta \cos \theta = \sin(2\theta)$  otteniamo

$$G = x_2 - x_1 = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

La gittata sarà massima a parità di velocità iniziale, quando il seno sarà massimo. Il massimo della funzione seno è uguale a 1 in corrispondenza di un angolo di 90°. Possiamo concludere che la gittata sarà massima in corrispondenza di un angolo di lancio di 45°. Il valore della gittata massima sarà:

$$G_{\max} = \frac{v_0^2}{g} = 254.8 \text{ m}$$

7. la gittata quando l'angolo è di 30°.

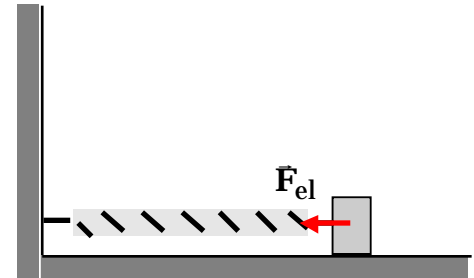
$$G = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2 * 30^\circ)}{g} = 220.6 \text{ m}$$

Il valore della gittata con un angolo di tiro di 30 gradi è uguale alla gittata con un angolo di tiro di 60°. Angoli che distano da 45° della stessa quantità hanno la stessa gittata.

### **L'oscillatore armonico.**

Un punto materiale di massa  $m=1 \text{ kg}$  può muoversi lungo una guida orizzontale rettilinea priva di attrito. Il corpo è attaccato ad una molla di costante elastica  $k=400 \text{ N/m}$ , il secondo estremo della molla è connesso ad una parete verticale, come mostrato in figura.

Inizialmente il corpo viene spostato in maniera da allungare la molla di un tratto di 10 cm e lasciato da questa posizione con velocità nulla. Determinare la legge oraria, mostrare che il moto è periodico e determinarne il periodo.



1. *Individuare il punto materiale di cui si vuole determinare il moto.*

Il punto materiale è il corpo di massa  $m$ .

2. *Stabilire il sistema di riferimento inerziale che si intende utilizzare per lo studio del moto*

Introduciamo un sistema di riferimento avente l'asse  $x$  coincidente con la guida rettilinea orizzontale l'asse  $y$

verticale e l'asse z in maniera da formare una terna destrorsa. Abbiamo cura di scegliere l'origine del sistema di riferimento in modo da coincidere con la posizione del punto materiale quando la molla non è deformata. Questa accortezza ci permette di esprimere la forza elastica esercitata dalla molla sul corpo in funzione della posizione del corpo attraverso la relazione:

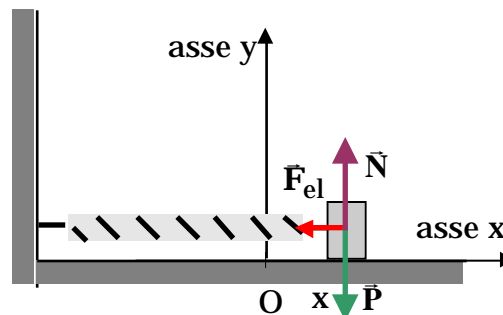
$$F_x = -kx$$

Il sistema di riferimento così introdotto è connesso rigidamente al Laboratorio, quindi è il sistema di riferimento del Laboratorio. Per moti breve durata esso può essere considerato inerziale. In tale sistema possiamo applicare le leggi di Newton.

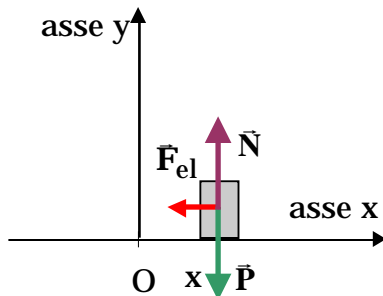
3. *Determinare tutte le forze agenti sul punto materiale sotto osservazione.*

Se si trascura la presenza dell'aria, le interazioni che il corpo subisce sono le seguenti:

- Azioni a distanza: la forza peso
- Azioni per contatto: la forza dovuta alla molla, la reazione vincolare del piano (solo la componente normale perché il vincolo è privo di attrito).



4. *Costruire il diagramma del corpo libero.*



5. *Scrivere la seconda legge della dinamica (in forma vettoriale).*

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{el} = m\vec{a}$$

6. Scrivere le tre equazioni scalari corrispondenti alla seconda legge della dinamica (vettoriale).

$$\begin{array}{ll} x & F_{elx} = ma_x \\ y & N - mg = ma_y \\ z & 0 = ma_z \end{array}$$

7. Determinare tutte le ulteriori condizioni particolari presenti nel problema.

- Poiché durante il moto il corpo si mantiene sempre a contatto con il piano inclinato, questo vuol dire che la sua coordinata  $y$ , nel sistema di riferimento adottato, non cambia. Pertanto la componente  $y$  della velocità è costante ed è uguale zero, e anche la componente  $y$  della accelerazione è nulla, visto che la corrispondente componente della velocità non varia (è sempre uguale a zero).

$$a_y = 0$$

- L'equazione lungo l'asse  $z$ :

$$0 = ma_z$$

ci dice che lungo l'asse  $z$  il moto è uniforme.

La legge oraria del moto uniforme è:

$$z(t) = z_0 + v_{z0}t$$

Dalla traccia ricaviamo che il corpo parte da fermo: al tempo  $t=0$  (s)  $v_{z0}=0$  (m/s) e la posizione  $z_0=0$ (m).  
Pertanto  $z(t)$  è costantemente uguale a zero.

$$z(t) = 0 \quad (\text{m})$$

Il moto avviene nel piano  $xy$ , anzi in questo caso solo lungo l'asse  $x$ .

8. Determinare le componenti dell'accelerazione  $a$ , detto in altri termini, le accelerazioni dei punti proiezione nei loro moti rettilinei sugli assi coordinati.

L'unica accelerazione che ci rimane da calcolare è quella lungo l'asse x. D'altro canto le considerazioni che abbiamo fatto ci portano a concludere che si tratta di un moto rettilineo lungo l'asse x.

$$a_x = -\frac{k}{m} x$$

9. *Esaminare con cura la dipendenza delle accelerazioni appena calcolate.*

La componente x dell'accelerazione, l'unica non nulla, dipende dalla posizione in cui si trova il punto materiale, la coordinata x. Poiché la posizione varia durante il moto, allora l'accelerazione non è costante, **non** si tratta quindi di un moto uniformemente accelerato.

Piuttosto in questo caso l'accelerazione è proporzionale all'opposto della posizione. Pertanto il moto è armonico e l'espressione generale della legge oraria vale:

Equazione differenziale	Legge oraria
$a_x = -\frac{k}{m}x$	$x(t) = A \cos(\omega_p t + \phi_0)$

dove A, l'ampiezza del moto, e  $\phi_0$ , la fase iniziale, sono le costanti da determinare in base alle condizioni iniziali, mentre  $\omega_p$ , la pulsazione angolare vale:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

10. *Scrivere le leggi orarie facendo attenzione ad inserire correttamente le condizioni iniziali.*

Dalla traccia sappiamo che  $x_0 = 10 \text{ cm} = 0.10 \text{ m}$ , mentre  $v_{x0} = 0 \text{ m/s}$ .

Valutando dalla legge oraria la velocità in funzione del tempo e poi i valori della posizione e della velocità all'istante iniziale otteniamo:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -A \omega_p \sin(\omega_p t + \phi_0)$$

$$\begin{aligned} x_0 &= A \cos(\phi_0) & \phi_{01} &= 0 \\ 0 &= -A \omega_p \sin(\phi_0) & \phi_{02} &= \end{aligned} \quad \text{dalla seconda}$$

La seconda soluzione usata nella prima equazione ci darebbe una ampiezza negativa ( $\cos \phi_0 = -1$ ). Va

selezionata la soluzione  $\dot{x}_0=0$  perché è l'unica che fornisce una soluzione positiva per l'ampiezza, che in tal caso è proprio uguale a  $x_0=0.10$  m.

Tenendo infine conto che nel nostro caso

$$\omega_p^2 = \frac{k}{m}$$

la legge oraria diventa:

$$x(t) = 0.10 \cos(20t) \quad \text{con } t \text{ in secondi e } x \text{ in metri}$$

11. *Determinare le forze mancanti.*

Dalla seconda delle equazioni riportate al punto 6 e ricordando l'osservazione del punto 7 possiamo calcolare il valore del modulo della normale N:

$$N - mg = ma_y \quad \text{con } a_y = 0 \quad N = mg$$

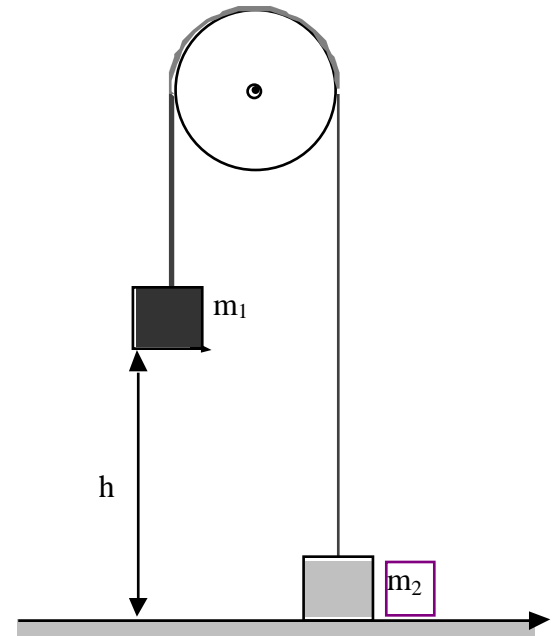
Per determinare il periodo del moto armonico dobbiamo far ricorso alla relazione tra il periodo T e la pulsazione angolare  $\omega_p$ .

$$T = \frac{2}{\omega_p} = 2 \sqrt{\frac{m}{k}} = 0.314 \text{ s}$$

### **La macchina di Atwood.**

Si considerino un corpo di massa  $m_1=2$  kg ed un secondo di massa  $m_2=1$ kg connessi da una corda ideale avvolta ad una carrucola anch'essa ideale. All'inizio il corpo di massa  $m_2$  viene mantenuto a contatto con il suolo. In queste condizioni il corpo  $m_1$  si trova ad una altezza di 2 m dal suolo come mostrato in figura. Determinare

1. la velocità del corpo  $m_2$  quando il corpo  $m_1$  tocca il suolo,
2. il valore della tensione della corda,
3. la massima altezza raggiunta dal corpo di massa  $m_2$ .



1. *Individuare il punto materiale di cui si vuole determinare il moto.*  
In questo caso nel problema si parla di due corpi, occorre determinare le forze agenti su ciascuno dei due corpi e scrivere la seconda legge di Newton per ciascuno dei due corpi.
2. *Stabilire il sistema di riferimento inerziale che si intende utilizzare per lo studio del moto*  
Il sistema di riferimento da usare è il sistema del laboratorio, con l'origine sul suolo, l'asse y verticale, l'asse x orizzontale nel piano della figura e l'asse z determinato dalle scelte degli altri due assi. Il sistema di riferimento è inerziale.

3. *Determinare tutte le forze agenti sul punto materiale sotto osservazione.*

Sul corpo di massa  $m_1$ :

azioni a distanza: la forza peso  $\vec{P}_1$ .

azioni per contatto: la tensione della fune  $\vec{T}_1$ .

Sul corpo di massa  $m_2$ :

azioni a distanza: la forza peso  $\vec{P}_2$ .

azioni per contatto: la tensione della fune  $\vec{T}_2$ .

4. *Costruire il diagramma del corpo libero.*  
Vedi la figura al lato.
5. *Scrivere la seconda legge della dinamica (in forma vettoriale).*

Per il corpo di massa  $m_1$ :

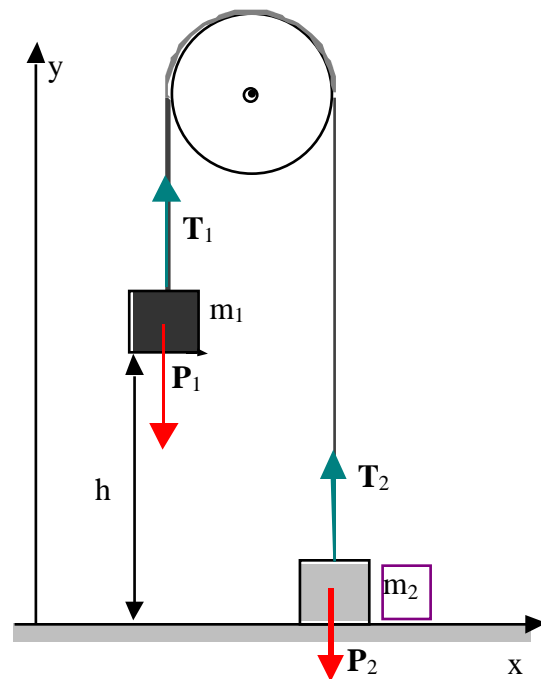
$$\vec{P}_1 + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}_1$$

Per il corpo di massa  $m_2$ :

$$\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}_2$$

6. *Scrivere le tre equazioni scalari corrispondenti alla seconda legge della dinamica (vettoriale).*

Per il corpo di massa  $m_1$ :





$$\begin{array}{ll}
 x & 0 = m_1 a_{x1} \\
 y & -m_1 g + T_1 = m_1 a_{y1} \\
 z & 0 = m_1 a_{z1}
 \end{array}$$

Per il corpo di massa  $m_2$ :

$$\begin{array}{ll}
 x & 0 = m_2 a_{x2} \\
 y & -m_2 g + T_2 = m_2 a_{y2} \\
 z & 0 = m_2 a_{z2}
 \end{array}$$

Il fatto che le accelerazioni dei due corpi lungo gli assi  $x$  e  $z$  siano uguali a zero, unitamente al fatto che le rispettive velocità iniziali lungo questi assi sono nulle, ci fa capire che non c'è moto dei corpi nelle direzioni  $x$  e  $z$ , i corpi si muovono quindi di moto rettilineo lungo la verticale.

Per ottenere le proiezioni scalari della seconda legge abbiamo usato per entrambi i corpi lo stesso sistema di riferimento, quello introdotto al punto 2. Avremmo potuto scegliere sistemi di riferimento diversi per ciascuno dei due corpi. Per esempio per il corpo  $m_1$  che scende avremmo potuto utilizzare un asse  $y_1$  orientato verso il basso, mentre per il corpo  $m_2$  che sale un asse  $y_2$  diretto verso l'alto. Questa scelta ha una diretta conseguenza sulle considerazioni riportate al punto successivo.

7. *Determinare tutte le ulteriori condizioni particolari presenti nel problema,*

Per le proprietà delle corde ideali e delle carrucole ideali, il modulo della tensione agente sul corpo  $m_1$  e quello della tensione agente sul corpo  $m_2$  sono uguali:

$$T_1 = T_2 = T$$

Con  $T$  indichiamo il valore comune.

Poiché la corda è ideale e quindi di lunghezza costante, se il corpo  $m_2$  si solleva di un tratto  $y_2$ , il corpo di massa  $m_1$  si abbassa di un tratto  $y_1$ . In altri termini:

$$y_2 = -y_1$$

Per spostamenti infinitesimi, diventa:

$$dy_2 = -dy_1$$

e dividendo primo e secondo membro per dt, l'intervallo di tempo in cui avvengono gli spostamenti infinitesimi, si ottiene:

$$\frac{dy_2}{dt} = -\frac{dy_1}{dt} \quad v_{y2} = -v_{y1}$$

Derivando ulteriormente si ottiene:

$$\frac{dv_{y2}}{dt} = -\frac{dv_{y1}}{dt} \quad a_{y2} = -a_{y1}$$

8. *Determinare le componenti dell'accelerazione o, detto in altri termini, le accelerazioni dei punti proiezione nei loro moti rettilinei sugli assi coordinati.*

Considerando le due equazioni relative all'asse y determinate al punto 6 e le ulteriori condizioni determinate al punto 7, otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{array}{llll} -m_1g + T_1 = m_1a_{y1} & \text{e tenendo conto che} & -m_1g + T = m_1a_{y1} & \\ -m_2g + T_2 = m_2a_{y2} & T_1 = T_2 = T & a_{y2} = -a_{y1} & -m_2g + T = -m_2a_{y1} \end{array}$$

Da cui sottraendo membro a membro per eliminare T, si ottiene:

$$-m_1g + m_2g = m_1a_{y1} + m_2a_{y1}$$

$$a_{y1} = -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

L'accelerazione  $a_{y1}$  è negativa ( $m_1$  è più grande di  $m_2$ ), cosa che indica che il corpo 1 scende. Di conseguenza  $a_{y2}$  è positiva ad indicare che il corpo 2 sale.

9. *Esaminare con cura la dipendenza delle accelerazioni appena calcolate.*

Le due accelerazioni  $a_{y_1}$  e  $a_{y_2}$  sono costanti. Il moto dei due corpi pertanto è uniformemente accelerato.

10. *Scrivere le leggi orarie facendo attenzione ad inserire correttamente le condizioni iniziali.*

Tenendo conto che le velocità iniziali sono nulle per entrambi i corpi mentre  $y_{10}=h$  e  $y_{20}=0$ , le leggi orarie per i due corpi valgono:

$$y_1(t) = h - \frac{1}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} gt^2 \qquad v_{y_1}(t) = -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} gt$$

$$y_2(t) = \frac{1}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} gt^2 \qquad v_{y_2}(t) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} gt$$

11. *Determinare le forze mancanti.*

Per il calcolo della tensione possiamo usare una delle due equazioni del sistema introdotto al punto 8:

$$-m_1g + T = m_1a_{y_1}$$

$$T = m_1a_{y_1} + m_1g = m_1 \frac{-(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} g + m_1g = \frac{-m_1^2 + m_1m_2 + m_1^2 + m_1m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2} g$$

Sostituendo i dati del problema, si ottiene per la tensione il seguente risultato:

$$T = 13.0 \text{ N}$$

Per rispondere alle altre due domande della traccia, la velocità del corpo 2 quando il corpo 1 tocca terra, occorre determinare l'istante di tempo in cui il corpo 1 tocca terra, quando cioè  $y_1=0$  metri. Dalla legge oraria abbiamo:

$$y_1(t_f) = 0 \qquad 0 = h - \frac{1}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} gt_f^2$$

$$t_{f1} = -\sqrt{\frac{2h(m_1 + m_2)}{(m_1 - m_2)g}} \qquad t_{f2} = \sqrt{\frac{2h(m_1 + m_2)}{(m_1 - m_2)g}}$$

La prima delle due soluzioni è sicuramente da scartare perché si riferisce ad un istante di tempo antecedente

all'inizio del moto. Sostituendo il tempo  $t_{2f}$  nell'espressione della velocità del corpo 2, otterremo il valore della velocità quando il corpo  $m_1$  tocca terra.

$$v_{y_2}(t_f) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \sqrt{\frac{2h(m_1 + m_2)}{(m_1 - m_2)g}} = \sqrt{\frac{2gh(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}} = 3.71 \text{ m/s}$$

Ovviamente questo è anche il modulo della velocità del corpo  $m_1$  quando tocca terra.

Per calcolare la massima altezza raggiunta dal corpo  $m_2$ , è necessario fare un attimo di attenzione. Quando il corpo  $m_1$  tocca terra, si ferma. L'effetto sul corpo di massa  $m_2$  è che dal momento in cui il corpo di massa  $m_1$  tocca terra, la tensione della corda si annulla (la corda si affloscia). L'unica forza che agisce sul corpo di massa  $m_2$ , dopo che il corpo di massa  $m_1$  ha toccato terra, è il suo peso ( $P_2 = m_2 g$ )

La seconda legge della dinamica per il corpo  $m_2$  vale:

$$\vec{P}_2 = m_2 \vec{a}_2 \quad m_2 \vec{g} = m_2 \vec{a}_2$$

la cui proiezione sull'asse delle  $y$  ci da:

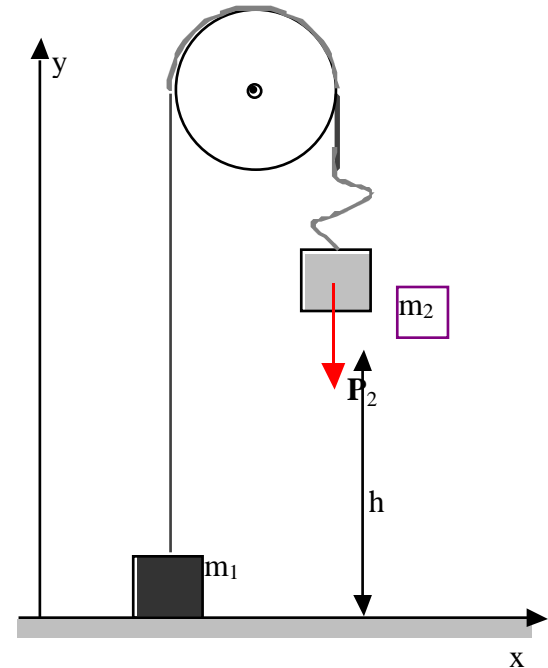
$$-g = a_{y_2}$$

Nell'ipotesi di far ripartire l'orologio dall'istante in cui il corpo di massa  $m_1$  ha toccato terra ( $t=0$ ), il moto del corpo  $m_2$  è un moto rettilineo lungo l'asse verticale, uniformemente accelerato con accelerazione  $-g$ , velocità iniziale pari a 3,71 m/s e posizione iniziale  $y_{20} = 2$  m.

La corrispondente legge oraria vale:

$$y_2(t) = h + v_{y_0} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad v_y(t) = v_{y_0} - g t$$

La massima altezza verrà raggiunta quando la velocità si annulla:



$$v_y(t_{\max}) = 0 \quad 0 = v_{y0} - gt_{\max}$$

$$t_{\max} = \frac{v_{y0}}{g}$$

Sostituendo nella legge oraria, si ottiene:

$$y_{2\max} = y_2(t_{\max}) = h + v_{y0} \frac{v_{y0}}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_{y0}^2}{g^2} \quad y_{2\max} = h + \frac{1}{2} \frac{v_{y0}^2}{g} = 2\text{m} + \frac{1}{2} \frac{3.71^2 \text{m}^2/\text{s}^2}{9.81 \text{m}/\text{s}^2} = 2,7\text{m e} \quad \text{questo}$$

completa la soluzione del problema.

### **Il pendolo semplice.**

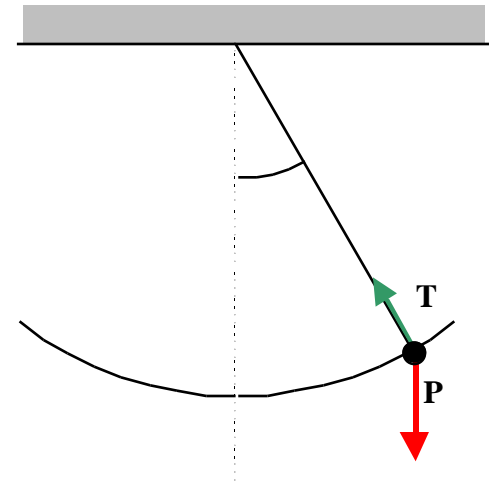
Un corpo di massa  $m=1\text{kg}$  è appeso mediante una fune ideale di lunghezza  $L=3\text{ m}$  al soffitto del Laboratorio. Determinare il periodo del pendolo nell'ipotesi che l'ampiezza delle oscillazioni sia di  $5^\circ$  e possa essere considerata piccola. Determinare inoltre il valore della tensione nella fune quando passa per la posizione verticale.

1. *Individuare il punto materiale di cui si vuole determinare il moto.*  
Il punto materiale di cui si vuol conoscere il moto è il corpo di massa  $m$ .
2. *Stabilire il sistema di riferimento inerziale che si intende utilizzare per lo studio del moto*  
Come sistema di riferimento usiamo quello del Laboratorio, che sappiamo essere inerziale.
3. *Determinare tutte le forze agenti sul punto materiale sotto osservazione.*

Azioni a distanza: la forza peso

Azioni per contatto: la tensione della fune

4. *Costruire il diagramma del corpo libero.*



Vedi disegno al lato.

5. Scrivere la seconda legge della dinamica (in forma vettoriale).

$$\vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{T}} = m\vec{\mathbf{a}}$$

6. Scrivere le tre equazioni scalari corrispondenti alla seconda legge della dinamica (vettoriale).

Nel caso del pendolo conviene proiettare la seconda legge della dinamica non lungo gli assi x,y,z del laboratorio, ma lungo tre direzioni tra loro perpendicolari indicate nella figura a lato.

$\vec{\mathbf{u}}_r$  è il versore radiale, il versore del vettore posizione

$\vec{\mathbf{u}}$  è il versore trasverso (perpendicolare al vettore posizione)

$\vec{\mathbf{u}}_z$  è un versore perpendicolare agli altri due. Esso è perpendicolare al piano della figura.

Si ottiene quindi:

$$\vec{\mathbf{u}}_r \quad mg\cos - T = ma_r$$

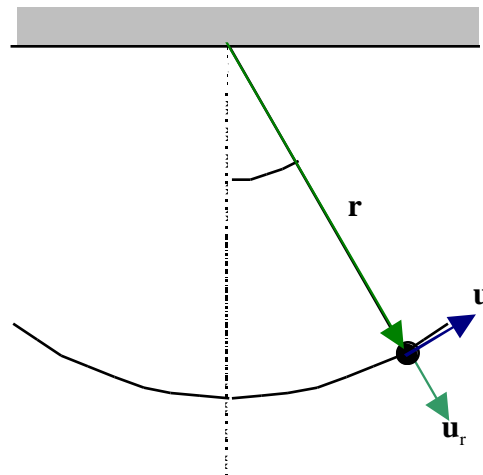
$$\vec{\mathbf{u}} \quad -mg\sin = ma$$

$$\vec{\mathbf{u}}_z \quad 0 = ma_z$$

L'ultima equazione, insieme con la considerazione che la componente della velocità nella direzione perpendicolare al piano della figura è sempre nulla e tale quindi doveva essere anche all'inizio del moto, ci permette di dire che il moto del pendolo è un moto piano che avviene nel piano che all'istante iniziale era individuato dalla verticale passante per il punto di sospensione (la linea tratteggiata nella figura) e dalla fune.

7. Determinare tutte le ulteriori condizioni particolari presenti nel problema,

1. Poiché il pendolo si muove su di una traiettoria circolare, la componente radiale dell'accelerazione coinciderà con l'accelerazione centripeta la cui intensità vale  $v^2/L$ , dove  $v$  è il modulo della velocità nel punto considerato.



$$a_r = -\frac{v^2}{L}$$

2. Il segno meno deriva dal fatto che l'accelerazione centripeta è diretta verso il centro della traiettoria circolare, mentre il versore  $\bar{u}_r$  è diretto verso l'esterno.

L'accelerazione trasversa coincide con l'accelerazione tangenziale quando il pendolo si muove in verso antiorario.

Nello studio del moto circolare avevamo fatto vedere che in queste condizioni:

$$a_t = a_r = L \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \text{dove } \frac{d\theta}{dt} \text{ è l'accelerazione angolare}$$

8. *Determinare le componenti dell'accelerazione*

L'equazione secondo  $\bar{u}_t$  si può riscrivere nella seguente forma:

$$-mg \sin \theta = ma_t \quad L \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin \theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

9. *Esaminare con cura la dipendenza delle accelerazioni appena calcolate*

Se l'ampiezza delle oscillazioni è piccola, l'angolo massimo espresso in radianti è molto minore di 1 radiante, allora vale l'approssimazione che

$$\sin \theta \approx \theta$$

e l'ultima equazione diventa:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \theta$$

Risulta che l'accelerazione angolare ( $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ ) è proporzionale all'opposto della posizione angolare ( $\theta$ ).

Si tratta quindi di un moto armonico. La legge oraria sarà data da:

$$\theta(t) = \theta_{\max} \cos(\omega_p t + \theta_0)$$

con  $\omega_p = \sqrt{\frac{g}{L}}$   
 $\theta_{\max}$  e  $\theta_0$  da determinare  
con le condizioni iniziali

10. *Scrivere le leggi orarie facendo attenzione ad inserire correttamente le condizioni iniziali.*

Nel nostro caso la traccia non specifica le condizioni iniziali, sappiamo solo che l'ampiezza delle oscillazioni vale  $\theta_{\max} = 5^\circ$ , mentre  $\theta_0$  non è determinabile.

11. *Determinare le forze mancanti.*

Utilizzando la prima delle relazioni elencate al punto 6 insieme con la prima osservazione del punto 7, possiamo calcolarci la tensione nella fune del pendolo.

$$mg \cos \theta - T = ma_r \quad a_r = -\frac{v^2}{L}$$

$$T = mg \cos \theta + m \frac{v^2}{L}$$

che ci dà il valore della tensione T in funzione dell'angolo  $\theta$  se è noto il valore del modulo della velocità del punto materiale in quella posizione.

Il problema ci chiede di calcolare il valore della tensione quando  $\theta = 0$  è uguale a zero, cioè quando la fune passa per la direzione verticale. È necessario conoscere il valore della velocità quando il punto materiale passa per la posizione  $\theta = 0$ .

Dalla legge oraria possiamo calcolarci la velocità angolare e poi possiamo passare alla velocità moltiplicando per il raggio della traiettoria circolare (L in questo caso).



$$\theta(t) = \theta_{\max} \cos(\omega_p t + \phi_0) \quad \dot{\theta}(t) = -\omega_p \theta_{\max} \sin(\omega_p t + \phi_0)$$

$$\theta(0) = 0 \quad \omega_p t + \phi_0 = \frac{\pi}{2} \quad \dot{\theta}(0) = -\omega_p \theta_{\max} \quad v(0) = L \omega_p \theta_{\max}$$

Con  $L=2.5\text{m}$ ,  $\theta_{\max}=5^\circ=0.087$  radianti e  $\omega_p = \sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{9.81}{2.5}} = 1.98$  rad/s la tensione vale:

$$T = mg \cos \theta + m \frac{v^2}{L}$$

$$T = 1\text{kg} * 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 1\text{kg} \frac{2.5\text{m} * 0.087 * 1.98^2}{2.5\text{m}} = 9.81\text{N} + 0.07\text{N} = 9.88\text{N}$$

Si osservi che il valore della tensione è più grande di quello della forza peso<sup>11</sup>, valore che assume la tensione

---

<sup>11</sup> La posizione  $\theta=0$  è anche la posizione di equilibrio del pendolo. Le forze agenti sul punto materiale sono infatti la tensione della fune e la forza peso. La posizione di equilibrio del pendolo si ottiene quando la risultante delle forze applicate è nulla (corpo in quiete=accelerazione nulla):

$$\mathbf{T} + \mathbf{P} = \mathbf{0}$$

da cui si ottiene:

$$\mathbf{T} = -\mathbf{P}$$

Questa condizione si realizza quando la fune è disposta nella direzione verticale (filo a piombo) e l'intensità della tensione vale  $mg$ .

nella fune quando il corpo è fermo nella posizione di equilibrio.

Possiamo infine valutare il periodo  $T$  del pendolo sfruttando la relazione tra il periodo e la pulsazione angolare  $\omega$ :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6,28}{1,98} = 3,17 \text{ s}$$

### ***Dinamica del moto circolare uniforme.***

Un disco di massa  $m$  sta al di sopra di un tavolo orizzontale privo di attrito ed è collegato con una massa  $M$  appesa ad una fune che passa attraverso un foro al centro del tavolo, come illustrato in figura. Si determini la velocità del disco lungo la circonferenza di raggio  $r$  in grado di mantenere fermo il cilindro. Si assuma  $m=0,5 \text{ kg}$ ,  $M=0,3 \text{ kg}$ ,  $r=50 \text{ cm}$ .

1. *Individuare il punto materiale di cui si vuole determinare il moto.*

In questo problema ci sono due punti materiali da tenere sotto controllo: il corpo di massa  $m$  e quello di massa  $M$ .

2. *Stabilire il sistema di riferimento inerziale che si intende utilizzare per lo studio del moto*

Anche in questo caso useremo il sistema di riferimento del laboratorio, che è inerziale.

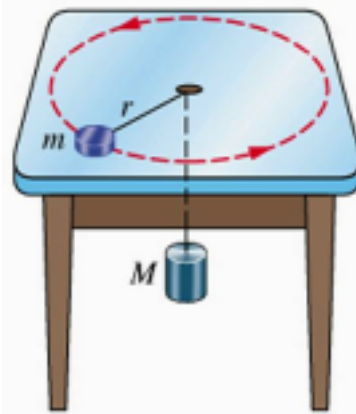
3. *Determinare tutte le forze agenti sul punto materiale sotto osservazione.*

Sul corpo di massa  $m$

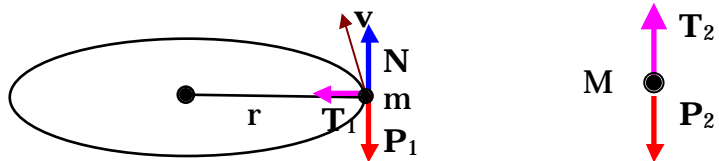
- Azioni a distanza: la forza peso
- Azioni per contatto: la tensione  $T$  della fune, la reazione vincolare (in questo caso c'è solo la componente normale  $N$ , poiché per ipotesi il piano è liscio).

Sul corpo di massa  $M$

- Azioni a distanza: la forza peso
- Azioni per contatto: la tensione  $T$  della fune



4. Costruire il diagramma del corpo libero.



5. Scrivere la seconda legge della dinamica (in forma vettoriale).

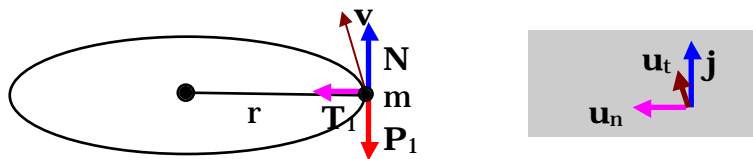
Per il corpo di massa m

$$\vec{P}_1 + \vec{N} + \vec{T}_1 = m\vec{a}_1$$

Per il corpo di massa M

$$\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = M\vec{a}_2$$

6. Scrivere le tre equazioni scalari corrispondenti alla seconda legge della dinamica (vettoriale).



Per il corpo di massa m proiettiamo nelle direzioni  $\vec{u}_n, \vec{u}_t, \vec{j}$ , per il corpo di massa M solo lungo la direzione  $\vec{j}$ .

$$\begin{array}{l}
 \vec{u}_n \\
 \vec{u}_t \\
 \vec{j}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 T_1 = ma_n = m \frac{v^2}{r} \\
 0 = ma_t \\
 N - mg = ma_{1y}
 \end{array}
 \quad y : \quad T_2 - Mg = Ma_{2y}$$

7. *Determinare tutte le ulteriori condizioni particolari presenti nel problema,*

6. l'accelerazione  $a_{2y}$  è uguale a zero.
7. La tensione  $T_1 = T_2 = T$  per le proprietà delle funi.
8. L'accelerazione  $a_n$  è l'accelerazione centripeta.

8. *Determinare le componenti dell'accelerazione o, detto in altri termini, le accelerazioni dei punti proiezione nei loro moti rettilinei sugli assi coordinati.*

Il fatto che l'accelerazione tangenziale sia nulla ci dice il moto del corpo di massa  $m$  si muove di moto circolare uniforme.

9. *Esaminare con cura la dipendenza delle accelerazioni appena calcolate.*

10. *Scrivere le leggi orarie facendo attenzione ad inserire correttamente le condizioni iniziali.*

Si passa direttamente al punto 11.

11. *Determinare le forze mancanti.*

Utilizzando le equazioni del punto 6 e le ulteriori condizioni elencate al punto 7, si trova:

$$T = T_2 = Mg = 2.94\text{N}$$

$$N = mg = 4.09\text{N}$$

$$T = T_1 = m \frac{v^2}{r} \quad \text{da cui} \quad v = \sqrt{\frac{rT}{m}} = \sqrt{\frac{rMg}{m}} = 1.71\text{m/s}$$

La tensione nella corda fornisce in questo caso la forza centripeta.

La forza centripeta non è un nuovo tipo di forza, né specifica alcunché circa la sua natura. Con tale denominazione si indica quella componente della risultante delle forze applicate in grado di produrre l'accelerazione centripeta che sicuramente è presente in caso di traiettoria curva.

In conclusione ogni qualvolta un punto materiale si muove su di una traiettoria curva, le forze agenti su di esso si

devono combinare in modo tale che la loro risultante abbia una componente diretta verso il centro di curvatura della traiettoria e di intensità pari a  $mv^2/r = m \omega^2 r$ . A seconda dei casi la forza centripeta potrà essere una forza elastica, una reazione vincolare, una forza di attrito, la tensione in una corda, una forza gravitazionale, come nel caso del moto della luna o dei satelliti intorno alla terra, oppure elettrostatica, come nel moto dell'elettrone attorno al nucleo atomico.

### **Il pendolo conico**

Un corpo di massa  $m$ , sospeso mediante una corda di lunghezza  $L$ , che si muove in modo tale che la fune forma costantemente un angolo  $\theta$  con la verticale. In questo modo il punto materiale percorre una circonferenza di raggio  $R$  in un piano orizzontale con velocità costante. Determinare la velocità del punto materiale assumendo  $m=0.5 \text{ kg}$ ,  $L=1\text{m}$ ,  $\theta=30^\circ$ .

1. *Individuare il punto materiale di cui si vuole determinare il moto.*

In questo problema non ci sono dubbi: il punto materiale sotto osservazione è il corpo di massa  $m$ .

2. *Stabilire il sistema di riferimento inerziale che si intende utilizzare per lo studio del moto*

Anche in questo caso useremo il sistema di riferimento del laboratorio, che è inerziale.

3. *Determinare tutte le forze agenti sul punto materiale sotto osservazione.*

Sul corpo di massa  $m$

1. Azioni a distanza: la forza peso
2. Azioni per contatto: la tensione  $T$  della fune

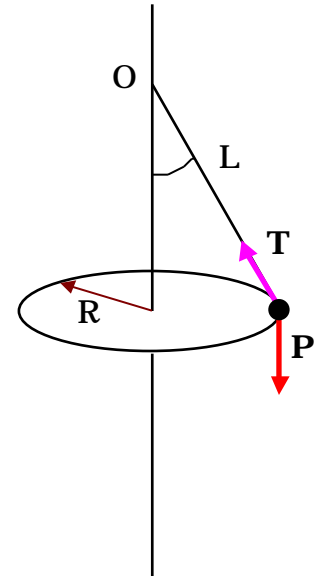
4. *Costruire il diagramma del corpo libero.*

Le forze sono rappresentate nel grafico al lato.

5. *Scrivere la seconda legge della dinamica (in forma vettoriale).*

Per il corpo di massa  $m$

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$



6. Scrivere le tre equazioni scalari corrispondenti alla seconda legge della dinamica (vettoriale).

Proiettiamo nelle direzioni  $\vec{u}_n, \vec{u}_t, \vec{j}$ .

$$\begin{array}{l} \vec{u}_n \quad T \sin \alpha = ma_n = m \frac{v^2}{r} \\ \vec{u}_t \quad 0 = ma_t \\ \vec{j} \quad T \cos \alpha - mg = ma_y \end{array}$$

7. Determinare tutte le ulteriori condizioni particolari presenti nel problema, il moto avviene nel piano orizzontale.

L'accelerazione  $a_n$  è l'accelerazione centripeta.

Il raggio R della traiettoria circolare è data da:  $R = L \sin \alpha = 0.5 \text{ m}$

8. Determinare le componenti dell'accelerazione o, detto in altri termini, le accelerazioni dei punti proiezione nei loro moti rettilinei sugli assi coordinati.

Il fatto che l'accelerazione tangenziale sia nulla ci dice il moto del corpo di massa m si muove di moto circolare uniforme.

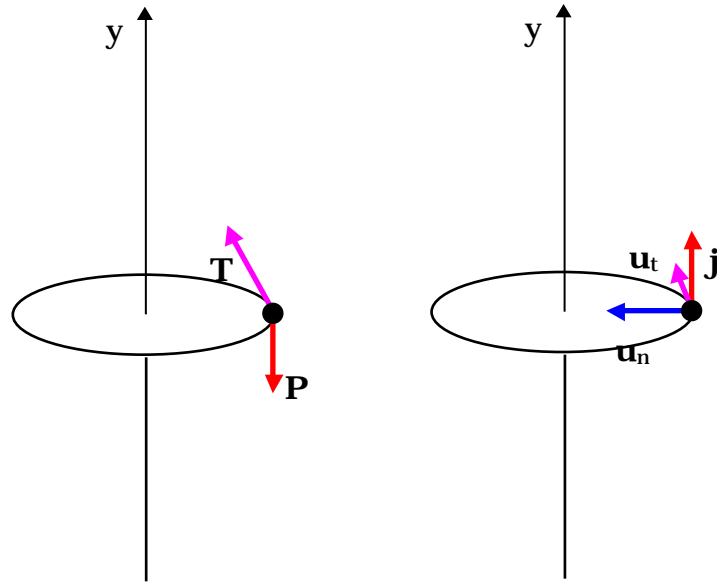
9. Esaminare con cura la dipendenza delle accelerazioni appena calcolate.

10. Scrivere le leggi orarie facendo attenzione ad inserire correttamente le condizioni iniziali. Si passa direttamente al punto 11.

11. Determinare le forze mancanti.

Utilizzando le equazioni del punto 6 e le ulteriori condizioni elencate al punto 7, si trova:

$$T \cos \alpha = mg \quad \text{da cui} \quad T = \frac{mg}{\cos \alpha} = 5.66 \text{ N}$$



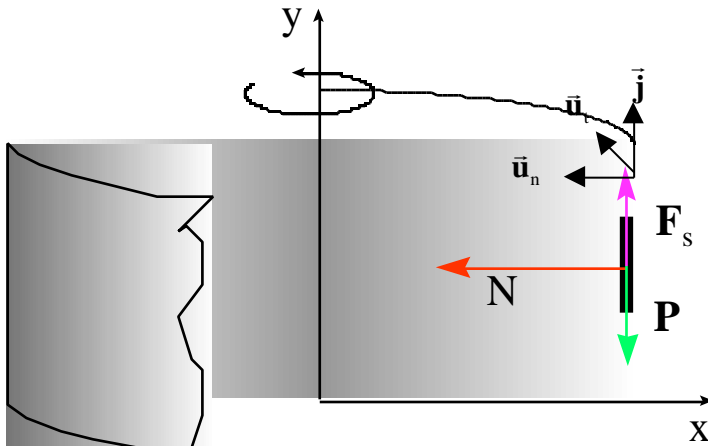
$$T \sin = m \frac{v^2}{R} \quad \text{da cui} \quad v = \sqrt{\frac{RT \sin}{m}} = \sqrt{\frac{Rmg \sin}{m \cos}} = \sqrt{Rg \tan} = 1.68 \text{ m/s}$$

In questo caso la componente orizzontale della tensione fornisce la forza centripeta, la forza necessaria per fornire l'accelerazione centripeta e quindi mantenere il corpo sulla traiettoria circolare.

La componente verticale della tensione,  $T \cos$ , equilibra il peso del corpo.

### Il rotore.

È un'attrazione da luna park in cui una stanza cilindrica è posta in rotazione attorno al suo asse verticale. Gli utilizzatori si muovono insieme con il rotore appoggiandosi alla parete: quando il rotore raggiunge una certa velocità  $v$ , viene abbassato il pavimento: gli utilizzatori restano comunque attaccati alla parete senza cadere verso il basso. Determinare qual è il numero minimo di giri al minuto con cui deve ruotare il rotore affinché gli utilizzatori restino attaccati alla parete e non scivolino verso il basso seguendo il pavimento.



1. Individuare il punto materiale di cui si vuole determinare il moto.  
Il punto materiale che si vuole osservare è il generico utilizzatore del rotore

2. *Stabilire il sistema di riferimento inerziale che si intende utilizzare per lo studio del moto*  
 Si intende utilizzare un sistema di riferimento legato al terreno, quindi il sistema di riferimento del Laboratorio.  
 Questo sistema di riferimento è inerziale.

3. *Determinare tutte le forze agenti sul punto materiale sotto osservazione.*

Azioni a distanza: la forza peso

– Azioni per contatto: la reazione vincolare esercitata dalla parete sul punto materiale avente quindi sia la componente normale che quella tangenziale di attrito (poiché stiamo supponendo che il punto materiale resti fermo rispetto alla parete, cioè non scivoli, si tratterà di attrito statico)

4. *Costruire il diagramma del corpo libero.*

Il diagramma del corpo libero è quello illustrato in figura

5. *Scrivere la seconda legge della dinamica (in forma vettoriale).*

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_s = m\vec{a}$$

6. *Scrivere le tre equazioni scalari corrispondenti alla seconda legge della dinamica (vettoriale).*

$$\vec{u}_n : \quad N = ma_n$$

$$\vec{u}_t : \quad 0 = ma_t$$

$$y : \quad -mg + F_s = ma_y$$

7. *Determinare tutte le ulteriori condizioni particolari presenti nel problema,*

- $a_y = 0$  proprio perché vogliamo che il corpo non scivoli lungo la parete.
- Il fatto che  $a_t$  sia uguale a zero è una conseguenza del fatto che il moto circolare sia uniforme, con modulo della velocità costante.
- L'accelerazione centripeta  $a_n$  vale:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

8. *Determinare le componenti dell'accelerazione o, detto in altri termini, le accelerazioni dei punti proiezione nei loro moti rettilinei sugli assi coordinati.*

9. *Esaminare con cura la dipendenza delle accelerazioni appena calcolate.*



10. *Scrivere le leggi orarie facendo attenzione ad inserire correttamente le condizioni iniziali.*  
 Questi punti non hanno significato in questo caso.

11. *Determinare le forze mancanti.*

Dalle equazioni del punto 6 e dalle osservazioni riportate al punto 7 ricaviamo la normale N:

$$N = m \frac{v^2}{R}$$

e la forza d'attrito:

$$F_s = mg$$

Sapendo che la forza di attrito è limitata superiormente ricaviamo:

$$F_s \leq \mu_s N$$

$$mg \leq \mu_s m \frac{v^2}{R}$$

$$v \geq \sqrt{\frac{gR}{\mu_s}}$$

La condizione a cui deve soddisfare  $v$  risulta indipendente dalla massa della persona. Per la velocità angolare  $\omega$  e la frequenza invece la condizione diventa:

$$v \geq \sqrt{\frac{gR}{\mu_s}} = \frac{v}{R}$$

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\mu_s R}}$$

Assumendo  $\mu_s=0.5$ ,  $R=2$  m, la velocità  $v$  deve essere maggiore di 6.2 m/s, mentre  $\omega$ , che è uguale a  $v/R$ , deve essere maggiore di 3.1 rad/s. La frequenza  $f$  del moto di rotazione è data da  $f = \omega / 2\pi$  deve essere maggiore di 0.5 giri/s o 30 giri al minuto.

### Moto di un'automobile su una traiettoria circolare piana.

Un'automobile di massa  $m=1000$  kg percorre una curva piana di raggio costante  $r=80$  m con una velocità costante di 60 km/h. Determinare il minimo coefficiente di attrito statico tra asfalto e ruote dell'automobile necessario perché l'automobile si mantenga la traiettoria curva.

1. Individuare il punto materiale di cui si vuole determinare il moto.

Anche in questo problema non ci sono dubbi: il punto materiale sotto osservazione è l'automobile.

2. Stabilire il sistema di riferimento inerziale che si intende utilizzare per lo studio del moto

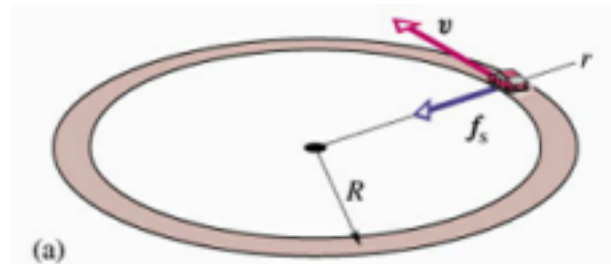
Anche in questo caso useremo un sistema di riferimento fisso rispetto alla curva, che coincide con il sistema del laboratorio, e quindi è inerziale.

3. Determinare tutte le forze agenti sul punto materiale sotto osservazione.

Sul corpo di massa  $m$

1. Azioni a distanza: la forza peso

2. Azioni per contatto: la reazione componente normale  $N$  e la osservi che l'attrito è statico, un'automobile anche se in dei pneumatici che tocca terra è all'asfalto: i pneumatici non pertanto la forza di attrito è



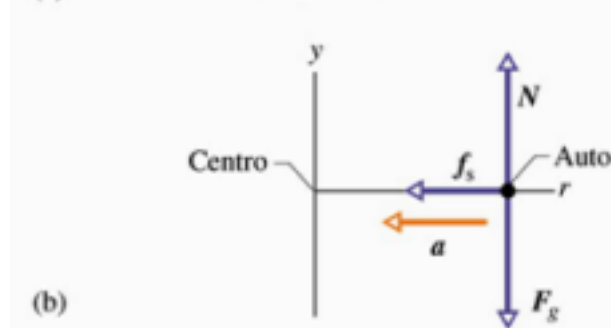
vincolare con la sua forza di attrito. Si infatti in movimento, la parte ferma rispetto scorrono sull'asfalto, l'attrito statico.

4. Costruire il diagramma del corpo

Le forze sono rappresentate nel quanto riguarda la forza di attrito, priori quale sarà la sua orientazione, sarà orizzontale, quindi potrà avere secondo  $\vec{u}_n, \vec{u}_t$ .

5. Scrivere la seconda legge della vettoriale).

Per il corpo di massa  $m$



libero.

grafico al lato. Per noi non sappiamo a sappiamo solo che solo le componenti

dinamica (in forma

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_s = m\vec{a}$$

6. Scrivere le tre equazioni scalari corrispondenti alla seconda legge della dinamica (vettoriale).

Proiettiamo nelle direzioni  $\vec{u}_n, \vec{u}_t, \vec{j}$ .

$$\begin{array}{l} \vec{u}_n \\ \vec{u}_t \\ \vec{j} \end{array} \quad \begin{array}{l} F_{sn} = ma_n = m \frac{v^2}{r} \\ F_{st} = ma_t \\ N - mg = ma_y \end{array}$$

7. Determinare tutte le ulteriori condizioni particolari presenti nel problema, L'accelerazione  $a_y$  è uguale a zero, il moto avviene nel piano orizzontale. L'accelerazione  $a_n$  è l'accelerazione centripeta. L'accelerazione  $a_t$  è nulla, il moto è circolare uniforme. La velocità dell'automobile in unità del SI varrà:

$$v = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 60 \frac{1000\text{m}}{3600\text{s}} = 16.7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

8. Determinare le componenti dell'accelerazione  $a$ , detto in altri termini, le accelerazioni dei punti proiezione nei loro moti rettilinei sugli assi coordinati.

Il fatto che l'accelerazione tangenziale sia nulla ci dice che la componente tangenziale della forza di attrito è nulla.

$$F_{st} = 0$$

La forza di attrito ha solo la componente secondo il versore  $\vec{u}_n$ .

9. Esaminare con cura la dipendenza delle accelerazioni appena calcolate.

10. Scrivere le leggi orarie facendo attenzione ad inserire correttamente le condizioni iniziali.

Si passa direttamente al punto 11.

11. Determinare le forze mancanti.

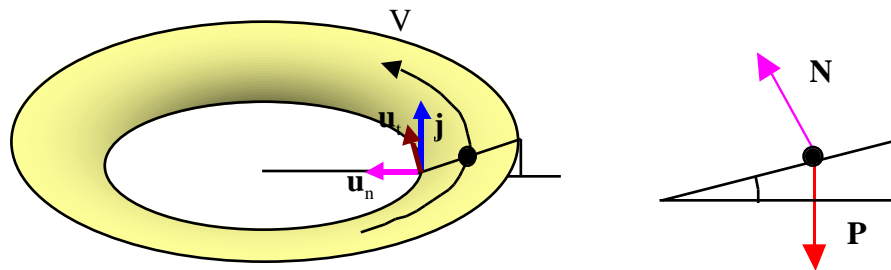
Utilizzando le equazioni del punto 6 e le ulteriori condizioni elencate al punto 7, si trova:  
 $N = mg = 9810\text{N}$

$$F_s = F_{sn} = m \frac{v^2}{R} \quad F_s \mu_s N = \mu_s mg \quad \mu_s \frac{m \frac{v^2}{R}}{mg} = \frac{v^2}{gR} = \frac{16.7^2}{9.81 \cdot 80} = 0.35$$

Occorre un coefficiente di attrito maggiore o uguale a 0.98 perché l'automobile mantenga la traiettoria. Si osservi che il coefficiente di attrito non dipende dalla massa del veicolo. Tutti i veicoli, qualunque sia la loro massa, potranno percorrere la curva se la imbroccano con la corretta velocità (nel nostro caso 60 km/h).

### La curva sopraelevata

Un'automobile di massa  $m=1000$  kg percorre una curva di raggio costante  $r=80$  m con una velocità di 60 km/h. Determinare l'angolo di cui deve essere sopraelevato l'esterno della curva rispetto all'interno perché l'automobile si mantenga sulla traiettoria curva senza far ricorso alla forza di attrito.



1. Individuare il punto materiale di cui si vuole determinare il moto.  
 Anche in questo problema non ci sono dubbi: il punto materiale sotto osservazione è l'automobile.
2. Stabilire il sistema di riferimento inerziale che si intende utilizzare per lo studio del moto  
 Anche in questo caso useremo un sistema di riferimento fisso rispetto alla curva, che coincide con il sistema

del laboratorio, e quindi è inerziale.

3. *Determinare tutte le forze agenti sul punto materiale sotto osservazione.*

Sul corpo di massa  $m$

12. Azioni a distanza: la forza peso

13. Azioni per contatto: la reazione vincolare con la sua componente normale  $N$ . Supporremo che non ci sia la forza di attrito proprio perché vogliamo che l'automobile percorra la traiettoria curva senza farvi ricorso.

4. *Costruire il diagramma del corpo libero.*

Le forze sono rappresentate nella figura precedente.

5. *Scrivere la seconda legge della dinamica (in forma vettoriale).*

Per il corpo di massa  $m$

$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$

6. *Scrivere le tre equazioni scalari corrispondenti alla seconda legge della dinamica (vettoriale).*

Proiettiamo nelle direzioni  $\vec{u}_n, \vec{u}_t, \vec{j}$ .

$$\begin{array}{l} \vec{u}_n \\ \vec{u}_t \\ \vec{j} \end{array} \quad \begin{array}{l} N \sin = ma_n = m \frac{v^2}{r} \\ 0 = ma_t \\ N \cos - mg = ma_y \end{array}$$

7. *Determinare tutte le ulteriori condizioni particolari presenti nel problema,*

L'accelerazione  $a_y$  è uguale a zero, il moto avviene nel piano orizzontale.

L'accelerazione  $a_n$  è l'accelerazione centripeta.

La velocità dell'automobile in unità del SI varrà:

$$v = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 60 \frac{1000\text{m}}{3600\text{s}} = 16.7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

8. *Determinare le componenti dell'accelerazione  $a$ , detto in altri termini, le accelerazioni dei punti proiezione nei loro moti rettilinei sugli assi coordinati.*

Il fatto che l'accelerazione tangenziale  $a_t$  sia nulla significa che il moto è circolare uniforme, come specificato

nella traccia.

9. *Esaminare con cura la dipendenza delle accelerazioni appena calcolate.*
10. *Scrivere le leggi orarie facendo attenzione ad inserire correttamente le condizioni iniziali.*  
Si passa direttamente al punto 11.
11. *Determinare le forze mancanti.*

Utilizzando le equazioni del punto 6 e le ulteriori condizioni elencate al punto 7, si trova:

$$N \cos = mg \quad N = \frac{mg}{\cos}$$

$$N \sin = m \frac{v^2}{R} \quad \frac{mg}{\cos} \sin = m \frac{v^2}{R} \quad \tan = \frac{v^2}{gR} = \frac{16.7^2}{9.81 * 80} = .35$$

$$= \text{arccot}(0.35) = 19.2^\circ$$

Occorre un angolo di sopraelevazione di  $19.2^\circ$  perché l'automobile possa percorrere la curva senza far ricorso alla forza di attrito.

Si osservi che l'angolo di sopraelevazione non dipende dalla massa del veicolo. Tutti i veicoli qualunque sia la loro massa possono mantenere la traiettoria se imboccano la curva con la corretta velocità (nel nostro caso 60 km/h).

# Lavoro ed energia.

## **Introduzione**

Il problema fondamentale della dinamica del punto materiale consiste nel determinare la legge oraria del moto di un corpo, una volta note le forze agenti su di esso. Se si riesce ad esprimere la risultante delle forze agenti sul punto materiale in funzione della sua posizione relativa a quella di altri corpi, delle sue proprietà e di quelle dei punti circostanti (massa, carica elettrica, ecc), ed eventualmente in funzione del tempo, se si riesce a conoscere la *legge della forza*, la descrizione del moto si ottiene risolvendo le seguenti equazioni differenziali.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F_x}{m}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{F_y}{m}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{F_z}{m}$$

Noi abbiamo trovato delle soluzioni di queste equazioni in alcuni casi particolari:

- quando la forza è costante ( moto uniformemente accelerato),
- quando la forza è proporzionale all'opposto della posizione (moto armonico)
- quando la forza è proporzionale all'opposto della velocità (moto smorzato)

Quando la forza ha una dipendenza complicata non è così semplice risolvere le equazioni differenziali.

La situazione è ancora più complessa in quei casi in cui la forza non è nota; basti pensare alla forza che si esplica tra una racchetta ed una pallina da tennis, oppure tra una stecca ed una palla da biliardo.

In queste circostanze l'espressione della forza non è nota. Ciononostante è possibile in qualche maniera ricavare delle informazioni, fare delle previsioni, sul moto della palla da biliardo dopo l'applicazione della forza, tanto è vero che i bravi giocatori di biliardo riescono a fare la carambola e a buttare giù i birilli sbagliando pochissimi tiri.

Queste previsioni sul moto della pallina di biliardo si possono ottenere anche senza conoscere l'espressione esatta della forza, ma utilizzando *le leggi di conservazione*.

E' possibile trovare infatti delle classi di interazioni, in cui particolari grandezze fisiche si conservano, non vengono cioè modificate dall'interazione. Utilizzando queste proprietà, si possono valutare complessivamente gli effetti delle interazioni senza dover esaminare in dettaglio l'intervallo di tempo in cui l'interazione avviene, e quindi senza la necessità di una descrizione accurata dell'interazione stessa.

Pertanto il nostro programma di lavoro proseguirà nel seguente modo:

- 1) basandoci sulle tre leggi di Newton, che per noi rappresentano i postulati fondamentali,
- 2) determineremo quali grandezze fisiche si conservano e sotto quali condizioni
- 3) classificheremo le interazioni sulla base delle grandezze fisiche che si conservano.

### **Definizione di Lavoro.**

Incominciamo con l'introdurre alcune nuove grandezze fisiche partendo dal *lavoro meccanico*.

Partiremo da situazioni semplici, e poi estenderemo la definizione al caso più generale.

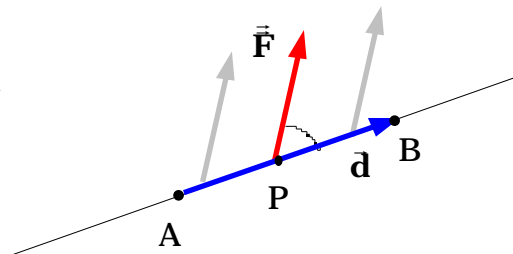
Sia  $\vec{F}$  una forza costante in direzione e modulo, e supponiamo che il punto materiale P a cui è applicata, si muova dalla posizione A alla posizione B percorrendo il segmento AB. Indichiamo con  $\vec{d}$  il segmento orientato AB.

Si definisce lavoro eseguito dalla forza  $\vec{F}$  sul punto materiale P che percorre lo spostamento  $\vec{d}$ , il prodotto scalare tra la forza e lo spostamento:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

Il prodotto scalare di due vettori ha come risultato uno scalare uguale al prodotto del modulo del primo vettore per il modulo del secondo vettore per il coseno dell'angolo, minore di  $180^\circ$ , compreso tra i due vettori. In formule:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos$$

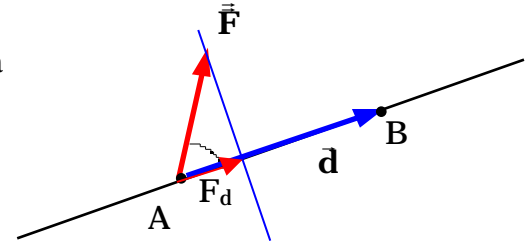




Il lavoro può essere anche inteso come il prodotto del modulo dello spostamento per la proiezione della forza sullo spostamento,  $F_d = F \cos \theta$ , o, equivalentemente, come il prodotto del modulo della forza per la proiezione dello spostamento sulla forza,  $d_F = d \cos \theta$ ,

$$W = F_d d = (F \cos \theta) d = F d \cos \theta$$

$$W = F d_F = F (d \cos \theta) = F d \cos \theta$$



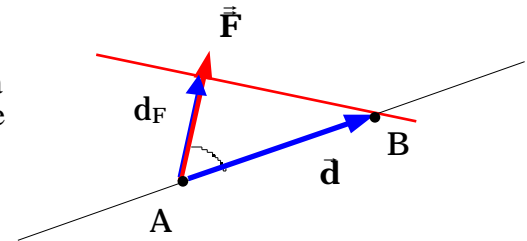
Se la forza e lo spostamento sono

paralleli	$L = Fd$
antiparalleli	$L = -Fd$
ortogonali	$L = 0$

Il lavoro è una grandezza scalare, che può essere positiva o negativa a seconda che la proiezione dello spostamento sulla forza sia concorde con la forza o opposta a questa.

Si tratta di una unità derivata. L'equazione dimensionale è data da:

$$[\text{Lavoro}] = [F][L] = [MLT^{-2}][L] = [ML^2T^{-2}]$$



Nel sistema SI l'unità di misura è il joule (J). Uno joule è il lavoro fatto da una forza di 1 N che agisce lungo un percorso ad essa parallelo di 1 m. Nel sistema CGS il lavoro si misura in erg = 1 dina x 1 cm. Nel sistema pratico degli ingegneri si misura in Kg per m (Kgm) o kilogrammetri.

Se sul punto materiale P agiscono contemporaneamente più forze costanti, il lavoro complessivo è dato dalla somma algebrica dei lavori eseguiti dalle singole forze, calcolati utilizzando la relazione precedente.

### **Valutazione del prodotto scalare mediante le componenti cartesiane**

Supponiamo che sia la forza  $\vec{F}$  che lo spostamento  $\vec{d}$  siano noti attraverso le rispettive componenti cartesiane, cioè:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$\vec{d} = d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k}$$

Il lavoro fatto dalla forza costante  $\vec{F}$  sullo spostamento  $\vec{d}$  si può scrivere come:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = (F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}) \cdot (d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k})$$

Assumendo che per il prodotto scalare valga la proprietà distributiva sulla somma come per il prodotto normale e tenendo conto che dalla definizione di prodotto scalare risulta:

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i} &= 1 & \vec{i} \cdot \vec{j} &= 0 & \vec{i} \cdot \vec{k} &= 0 \\ \vec{j} \cdot \vec{j} &= 1 & \vec{j} \cdot \vec{k} &= 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{k} &= 1 \end{aligned}$$

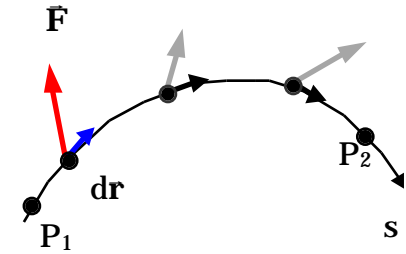
$$\begin{aligned} W = \vec{F} \cdot \vec{d} &= (F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}) \cdot (d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k}) = \\ F_x \vec{i} \cdot d_x \vec{i} + F_x \vec{i} \cdot d_y \vec{j} + F_x \vec{i} \cdot d_z \vec{k} + F_y \vec{j} \cdot d_x \vec{i} + F_y \vec{j} \cdot d_y \vec{j} + F_y \vec{j} \cdot d_z \vec{k} + F_z \vec{k} \cdot d_x \vec{i} + F_z \vec{k} \cdot d_y \vec{j} + F_z \vec{k} \cdot d_z \vec{k} &= \\ &= F_x d_x + F_y d_y + F_z d_z \end{aligned}$$

### **Generalizzazione della definizione di lavoro.**

#### **Forza di intensità e direzione variabile e traiettoria qualsiasi.**

Possiamo ora passare alla definizione più generale del lavoro. Supponiamo che sul punto materiale P agisca una qualsiasi forza  $\vec{F}$  che in generale, mentre il punto materiale P si sposta sulla sua traiettoria da  $P_1$  a  $P_2$ , varia in modulo e direzione.

Possiamo sempre pensare di suddividere lo spostamento complessivo tra da  $P_1$  a  $P_2$  in una successione di spostamenti molto piccoli, in maniera tale che ciascuno spostamento possa essere considerato rettilineo e che la forza possa essere considerata costante lungo tale spostamento. Sicuramente questo è vero se suddividiamo la traiettoria in una successione di infiniti spostamenti infinitesimi  $d\vec{r}$ .



Una volta che ci siamo messi in queste condizioni, possiamo applicare la definizione di lavoro data per forze costanti e per spostamenti rettilinei al paragrafo precedente, e quindi calcolare il lavoro fatto dalla forza in ciascuno degli spostamenti infinitesimi:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

In cui  $\vec{F}$  è la forza che agisce sul punto materiale mentre subisce lo spostamento infinitesimo  $d\vec{r}$ . Dato che  $d\vec{r}$  è infinitesimo la forza  $\vec{F}$  può essere considerata costante su tutto lo spostamento  $d\vec{r}$ .

Per trovare il lavoro complessivo fatto dalla forza mentre il punto materiale P si sposta sulla sua traiettoria da  $P_1$  a  $P_2$  basterà sommare gli infiniti lavori infinitesimi relativi ai vari spostamenti infinitesimi  $d\vec{r}$  in cui è stato suddiviso il tratto tra  $P_1$  e  $P_2$  della traiettoria : il lavoro complessivo sarà cioè dato dall'integrale eseguito sulla traiettoria tra  $P_1$  e  $P_2$  del lavoro infinitesimo  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ :

$$W = \int_{P_1}^{P_2} dW = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Ricordiamo che lo spostamento  $d\vec{r} = \vec{r}(t + dt) - \vec{r}(t)$  è sempre tangente alla traiettoria. Ricordiamo altresì che si preferisce indicare il con il simbolo  $ds$  il modulo dello spostamento infinitesimo  $d\vec{r}$  (con  $s$  infatti si indica il percorso effettuato sulla traiettoria). Non si usa  $dr$  perché con questo simbolo si indica la variazione del modulo del vettore  $\vec{r}$ , cioè la componente di  $d\vec{r}$  lungo il vettore  $\vec{r}$ , o equivalentemente, lungo versore  $\vec{u}_r$ .

Ricordando infine che le componenti cartesiane del vettore posizione sono proprio le coordinate  $x, y, z$  del punto  $P$  che si muove sulla traiettoria ( $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ), le componenti cartesiane dello spostamento infinitesimo  $d\vec{r}$  saranno proprio gli spostamenti infinitesimi dei punti proiezione sui rispettivi assi,  $dx, dy, dz$  corrispondenti allo spostamento vettoriale  $d\vec{r}$ . Cioè:

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

Tenendo presenti le osservazioni precedenti e la definizione di prodotto scalare tra due vettori, il lavoro fatto dalla forza su tutto il percorso da  $P_1$  e  $P_2$  si può anche scrivere come:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} F \cos \theta ds = \int_{P_1}^{P_2} F_t ds \quad W = \int_{P_1}^{P_2} F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

in cui l'integrale è valutato sulla traiettoria tra i punti  $P_1$  a  $P_2$ ,  $\theta$  è l'angolo tra la forza  $\vec{F}$  e lo spostamento infinitesimo  $d\vec{r}$ ,  $F_t$  è la componente della forza lungo lo spostamento, ossia la componente della forza tangente alla traiettoria.

Qualora sul punto materiale agiscano più forze, il lavoro effettuato dalla risultante è uguale alla somma dei lavori effettuati da ciascuna delle forze qualora agissero da sole. Infatti sia:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{P_1}^{P_2} \bar{\mathbf{R}} \, d\bar{\mathbf{r}} = \int_{P_1}^{P_2} (\bar{\mathbf{F}}_1 + \bar{\mathbf{F}}_2 + \dots + \bar{\mathbf{F}}_n) \, d\bar{\mathbf{r}} = \int_{P_1}^{P_2} (\bar{\mathbf{F}}_1 \, d\bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{F}}_2 \, d\bar{\mathbf{r}} + \dots + \bar{\mathbf{F}}_n \, d\bar{\mathbf{r}}) = \\
 &= \int_{P_1}^{P_2} \bar{\mathbf{F}}_1 \, d\bar{\mathbf{r}} + \int_{P_1}^{P_2} \bar{\mathbf{F}}_2 \, d\bar{\mathbf{r}} + \dots + \int_{P_1}^{P_2} \bar{\mathbf{F}}_n \, d\bar{\mathbf{r}} = W_1 + W_2 + \dots + W_n
 \end{aligned}$$

Utilizzando le proprietà del prodotto scalare e quella dell'integrale.

Esempio: calcolare il più piccolo lavoro necessario per allungare una molla di un tratto  $x = x_2 - x_1$ .

In questo caso la forza è parallela allo spostamento ma non è costante. Infatti la forza elastica dipende dalla posizione.

$$F_{e,x} = -kx$$

Per allungare una molla di un tratto  $x$  bisogna applicare una forza  $F_x$  che in ogni punto tra  $x_1$  e  $x_2$  sia opposta alla forza elastica ed abbia un modulo maggiore, per un infinitesimo, della forza elastica.

E' chiaro che questa è la forza minima che occorre applicare per produrre l'allungamento della molla; è possibile ovviamente anche applicare forze più intense, ma evidentemente questo comporterebbe l'esecuzione di un lavoro maggiore.

Nei calcoli possiamo trascurare l'infinitesimo in più, che serve a produrre l'allungamento, e assumere che

$$F_x = -F_{ex}$$

Il lavoro  $W$  sarà dato da:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = -\int_{x_1}^{x_2} F_{\text{elx}} dx = -\int_{x_1}^{x_2} F_{\text{elx}} dx = -W_{\text{el}}$$

Ma

$$W_{\text{el}} = \int_{x_1}^{x_2} F_{\text{elx}} dx = -\int_{x_1}^{x_2} kx dx = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx = -k \frac{x^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2} =$$

$$-\frac{1}{2} kx_2^2 + \frac{1}{2} kx_1^2 = \frac{1}{2} kx_1^2 - \frac{1}{2} kx_2^2$$

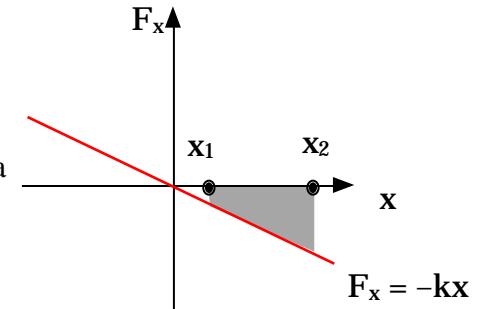
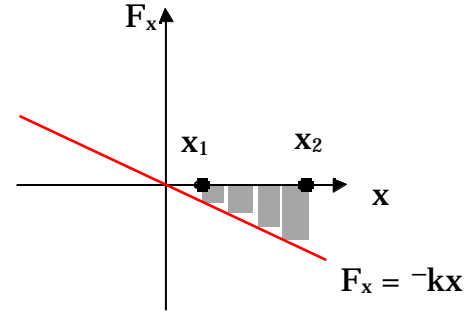
Il minimo lavoro necessario per spostare il corpo attaccato alla molla dalla posizione  $x_1$  alla posizione  $x_2$  è dato da:

$$W = -W_{\text{el}} = \frac{1}{2} kx_2^2 - \frac{1}{2} kx_1^2$$

Nel caso particolare che  $x_1 = 0$  e  $x_2 = x$ , il lavoro  $W$  è dato da:

$$W = \frac{1}{2} kx^2$$

Poiché la deformazione della molla compare al quadrato segue che si compie lo stesso lavoro sia per allungare la molla di un tratto  $x$  che per comprimerla di un uguale tratto.



## **Potenza.**

Al concetto di *lavoro di una forza* si associa immediatamente il concetto di *potenza*. La potenza di una forza è definita come la rapidità con cui essa è in grado di compiere un lavoro: la potenza è dunque il lavoro effettuato nell'unità di tempo.

Quindi, se  $W$  è il lavoro effettuato dalla forza  $\vec{F}$  nell'intervallo di tempo  $t$ , si definisce potenza media sviluppata dalla forza  $\vec{F}$  nell'intervallo di tempo  $t$ , la quantità:

$$P_{\text{media}} = \frac{W}{t}$$

Al solito, facendo il limite per  $t$  che tende a zero, si giunge alla definizione della potenza istantanea, che rappresenta la potenza sviluppata dalla forza  $\vec{F}$  al generico istante di tempo  $t$ :

$$P_{\text{istantanea}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{W}{t} = \left. \frac{dW}{dt} \right|_t$$

Dove  $dW$  è il lavoro effettuato dalla forza nell'intervallo  $dt$ , o meglio il lavoro effettuato dalla forza sullo spostamento  $d\vec{r}$  effettuato nell'intervallo  $dt$ .  $dW$  si può dunque scrivere come

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

e la potenza  $P$ :

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

A parità di forza, la potenza è tanto più grande quanto più grande è la velocità con cui il punto materiale percorre la traiettoria.

La potenza è una grandezza scalare, le cui unità di misura sono quelle di un lavoro diviso un tempo. L'equazione dimensionale della potenza è data da:

$$[P] = [ML^2T^{-2}][T^{-1}] = [ML^2T^{-3}]$$

Nel sistema S.I., la potenza si misura in watt (W). Ovviamente si usano spesso anche i suoi multipli, il kilowatt (KW), il megawatt (MW), il gigawatt (GW). Un watt corrisponde al lavoro di un joule fatto in un secondo.

Altre unità di misura utilizzate per la potenza sono:

- HP horse power (potenza del cavallo). Questa unità di misura della fu introdotta da Watt in seguito alla invenzione della macchina a vapore, per confrontarne la potenza con quella del cavallo, che era stato usato fino ad allora per produrre del lavoro. Essa corrisponde alla potenza media fornita da un cavallo.  
La conversione in watt si ottiene ricordando che  $1 \text{ HP} = 746 \text{ W}$ .
- erg/s è l'unità di misura della potenza nel sistema CGS.
- Kg m/s nel sistema pratico degli ingegneri.
- CV = cavallo vapore è un'altra unità di misura usata comunemente.  $1 \text{ CV} = 75 \text{ Kg m/s}$ . La conversione nel sistema SI si ottiene ricordando che  $1 \text{ Kg-forza} = 9.8 \text{ N}$ , per cui:  
 $1 \text{ CV} = 75 \cdot 9.8 \text{ Nm/s} = 735.5 \text{ W}$  quindi  $1 \text{ CV}$  è circa uguale a 1HP.

Se P è la potenza fornita da una forza, il lavoro effettuato dalla forza F nell'intervallo t è dato da:

$$W = P \cdot t$$

Da questa relazione si può derivare una nuova unità di misura del lavoro: il chilowattora. Un chilowattora corrisponde al lavoro effettuato da un forza avente una potenza di un KW (kilowatt) in un intervallo di tempo di un ora. La trasformazione in joule si ottiene utilizzando la relazione:

$$1 \text{ chilowattora} = 1000 \text{ W } 3600 \text{ s} = 3.6 \cdot 10^6 \text{ W s} = 3.6 \text{ MJ}$$

### ***Teorema dell'energia cinetica o delle forze vive.***

Supponiamo di avere un punto materiale di massa m sottoposto ad un'unica forza,  $\vec{F}$ , costante in modulo e diretta



lungo l'asse delle  $x$ . Nell'ipotesi che anche la velocità iniziale sia diretta secondo l'asse delle  $x$ , la seconda legge di Newton ci dice che il moto del punto materiale  $P$  è un moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione pari ad  $a_x = F_x/m$ . La legge oraria del moto risulta essere:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

Il lavoro  $W$  effettuato dalla forza  $F$  nello spostamento del punto materiale tra la posizione iniziale  $x_0$  e la generica posizione  $x$ , è dato da:

$$W = F_x (x - x_0) = m a_x (x - x_0)$$

Se ricaviamo il tempo  $t$  dalla espressione della velocità in funzione del tempo e sostituiamo nella espressione della posizione, possiamo esprimere lo spazio percorso in funzione della velocità:

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x}$$

$$\begin{aligned} x - x_0 &= v_{0x} \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} + \frac{1}{2} a_x \frac{(v_x - v_{0x})^2}{a_x^2} = \frac{2v_{0x} v_x - 2v_{0x}^2 + v_x^2 - 2v_x v_{0x} + v_{0x}^2}{2a_x} = \\ &= \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x} \end{aligned}$$

Sostituendo nella espressione del lavoro effettuato dalla forza  $F$  lungo il percorso tra  $x_0$  e  $x$ .

$$W = m a_x \frac{1}{2 a_x} (v_x^2 - v_{0x}^2) = \frac{1}{2} m v_x^2 - \frac{1}{2} m v_{0x}^2$$

Chiamiamo energia cinetica del punto materiale P la quantità:

$$K = \frac{1}{2} mv^2$$

Ora osserviamo che quando il punto materiale P si sposta dalla posizione iniziale  $x_0$  alla posizione finale  $x$ , la sua velocità passa dal valore  $v_{0x}$  al valore  $v$ , e corrispondentemente la sua energia cinetica passa dal valore  $K_0$  al valore  $K$ , subendo una variazione  $\Delta K = K - K_0$ . La relazione precedente ci mostra anche che il lavoro effettuato dalla forza  $F$  a seguito dello spostamento dalla posizione iniziale  $x_0$  alla posizione finale  $x$ , è proprio uguale alla variazione dell'energia cinetica, cioè:

$$W = \Delta K$$

Questa relazione va sotto il nome *di teorema dell'energia cinetica o teorema delle forze vive*.

### ***L'energia cinetica.***

Il termine energia esprime la capacità di un corpo a compiere un lavoro, cinetica perché l'energia è legata al moto del corpo.

Il teorema delle forze vive afferma che il lavoro effettuato dalla forza  $F$  è uguale alla variazione dell'energia cinetica:

$$W = K_f - K_i = \Delta K$$

Se  $W > 0$  anche  $\Delta K$  è maggiore di zero, il lavoro è stato effettuato dalla forza sul punto materiale ed è stato accumulato come aumento dell'energia cinetica del punto materiale. Se  $W < 0$  anche  $\Delta K$  è minore di zero, il lavoro è stato effettuato dal punto materiale sulla forza, quindi sull'ambiente circostante, a spese dell'energia cinetica posseduta inizialmente che infatti si è ridotta.

L'energia cinetica può quindi essere utilizzata per compiere del lavoro sull'ambiente esterno.

Consideriamo l'acqua di un fiume che scorre con una certa velocità verso il mare. Se si immerge nell'acqua una

ruota munita di palette, il moto della corrente, trascinando le palette, mette in rotazione la ruota che poi a sua volta può trasmettere il moto alle macine del mulino.

Consideriamo una parte di acqua del fiume che interagisce con la paletta della ruota immersa nella corrente. Indichiamo con  $m$  la massa di questa porzione di acqua e sia  $v$  la sua velocità.

La sua energia cinetica è data da  $K = \frac{1}{2} mv^2$ .

Vogliamo mostrare che  $K$  rappresenta la capacità di quella porzione di acqua a compiere del lavoro. Infatti nell'interazione con la paletta, la massa di acqua in considerazione subisce una forza resistente, opposta alla velocità della massa di acqua. Questa interazione tra la porzione di acqua in considerazione e la paletta dura un certo intervallo di tempo durante il quale la massa di acqua subisce uno spostamento nella direzione della corrente e corrispondentemente la ruota con la paletta ruota di un certo angolo fino a che la paletta non fuoriesce dall'acqua.

Il lavoro fatto dalla forza resistente esercitata dalla paletta sulla massa di acqua è negativo perché lo spostamento e la forza hanno verso opposto:

$$W_{Fr} < 0$$

Il che vuol dire che del lavoro è stato eseguito sull'ambiente circostante, infatti la ruota con le palette è stata messa in rotazione, il movimento della ruota è stato poi trasmesso alle macine per la molitura dei chicchi di grano.

Sulla base del teorema delle forze vive, il lavoro fatto dalla forza resistente, nell'ipotesi che essa sia l'unica forza agente sulla massa di acqua è uguale alla variazione di energia cinetica subita dalla massa di acqua:

$$W_{Fr} = K_f - K_i$$

Risulta perciò che anche la variazione dell'energia cinetica è minore di zero:

$$K_f - K_i < 0$$

Il che significa, stante la definizione di energia cinetica, che il modulo della velocità finale della massa di acqua risulta essere più piccolo del modulo della velocità iniziale.

In conclusione la molitura dei chicchi di grano è avvenuta a spese dell'energia cinetica dell'acqua. L'energia cinetica della massa di acqua è stata usata per fare del lavoro sull'ambiente circostante la massa di acqua.

### **Generalizzazione del teorema delle forze vive.**

Abbiamo dimostrato il teorema delle forze vive nel caso particolare di una forza costante applicata ad un punto materiale che si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato. Per una particella che si muove su di una traiettoria qualsiasi soggetta ad alcune forze, il lavoro compiuto dalla risultante  $\vec{F}$  è dato da:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Il lavoro infinitesimo  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , tenendo conto che in base alla seconda legge di Newton la risultante delle forze applicate ad un punto materiale è uguale alla massa per l'accelerazione del punto materiale  $\vec{F} = m\vec{a}$ , è dato da:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m\vec{a} \cdot \vec{v}dt = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt = m d\vec{v} \cdot \vec{v}$$

Ma

$$d\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} d(v^2)$$

infatti

$$d(v^2) = d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = d\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot d\vec{v} = 2d\vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$dW = \frac{1}{2} md(v^2) = d \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) = dK$$

mentre il lavoro totale effettuato dalla forza  $\vec{F}$  sarà dato da:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} dK$$

Tale integrale può essere interpretato come l'integrale della funzione costante unitaria, cioè:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} 1 dK \quad \text{con } K = \frac{1}{2} mv^2$$

Calcolando l'integrale come l'area compresa tra la funzione, l'asse delle ascisse e l'intervallo di integrazione, si ottiene:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} dK = [K]_{P_1}^{P_2} = K(P_2) - K(P_1) = K_f - K_i = \Delta K$$

che appunto esprime il teorema dell'energia cinetica o delle forze vive:

***Il lavoro effettuato dalla risultante delle forze applicate al punto materiale tra la posizione iniziale e quella finale lungo la traiettoria  $\gamma$  è uguale alla variazione della sua energia cinetica.***

### **Forze conservative.**

Si dicono conservative quelle forze che si comportano in accordo alla seguente definizione:

*La forza  $\vec{F}$  si dice conservativa se il lavoro eseguito dalla forza  $\vec{F}$  sul punto materiale  $P$  mentre si sposta dalla posizione  $P_1$  alla posizione  $P_2$  dipende soltanto dalla posizione iniziale e dalla posizione finale e non dal percorso effettuato, dalla traiettoria seguita per andare da  $P_1$  a  $P_2$ , né da alcun altro parametro come la velocità, il tempo impiegato, ecc.*

Esempi di forze conservative:

#### **Forze costanti:**

Forza peso

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

**Forze centrali:** Qualunque sia la posizione del punto materiale nello spazio la forza subita è sempre diretta verso, o si diparte da, un particolare punto dello spazio, caratteristico della forza, detto *centro della forza*. Inoltre l'intensità della forza dipende dalla distanza del punto materiale dal *centro della forza*.

Forza elastica

$$F_x = -kx$$

Forza gravitazionale

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r$$

Forza di Coulomb

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r$$

### **Forza peso.**

Per provare che la forza peso è una forza conservativa dobbiamo mostrare che il lavoro fatto dalla forza peso quando un corpo di massa  $m$  si sposta nelle vicinanze della superficie della terra dipende esclusivamente dalla posizione del punto iniziale e da quella del punto finale e non dalla traiettoria percorsa per spostarsi tra le due

posizioni.

Sia  $P_1$  il punto iniziale e  $P_2$  quello finale. Si osservi che dati due punti è sempre possibile trovare un piano verticale che li contiene.

Introduciamo un sistema di riferimento avente il piano  $xy$  coincidente con il piano verticale contenente i due punti  $P_1$  e  $P_2$ . Indichiamo con  $(x_1, y_1, 0)$  le coordinate del punto  $P_1$  e con  $(x_2, y_2, 0)$  quelle del punto  $P_2$ .

Possiamo immaginare una serie di percorsi lungo i quali il punto  $P$  può raggiungere la posizione finale  $P_2$  partendo da  $P_1$ .

Cominciamo dal percorso  $P_1AP_2$  mostrato in figura.

Il lavoro fatto lungo tutto il percorso può essere immaginato come la somma del lavoro fatto sul percorso  $P_1A$  più il lavoro fatto sul percorso  $A P_2$ .

$$W_{P_1AP_2} = W_{P_1A} + W_{AP_2}$$

Il lavoro fatto sul tratto  $A P_2$  è nullo perché la forza peso (verticale) è perpendicolare allo spostamento (orizzontale):

$$W_{AP_2} = \vec{P} \cdot \vec{d} = mg \ell_{AP_2} \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

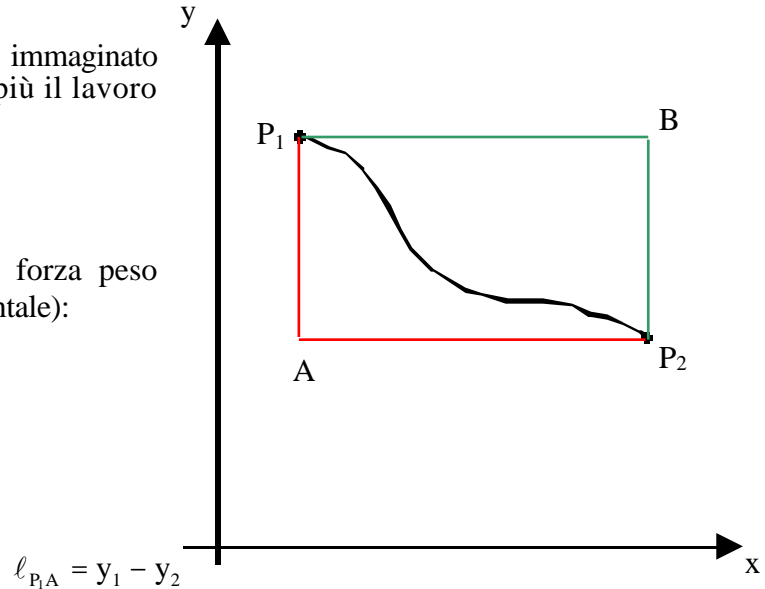
Risulta che:

$$W_{P_1AP_2} = W_{P_1A}$$

Valutando  $W_{P_1A}$  otteniamo:

$$W_{P_1A} = \vec{P} \cdot \vec{d} = mg \ell_{P_1A} \cos 0 = mg \ell_{P_1A}$$

$$W_{P_1A} = mg(y_1 - y_2) = mgy_1 - mgy_2$$



Consideriamo ora il percorso  $P_1BP_2$ . Anche in questo caso il lavoro complessivo lo possiamo ottenere come

somma del lavoro effettuato sul tratto  $P_1B$  e quello effettuato sul tratto  $BP_2$ .

$$W_{P_1BP_2} = W_{P_1B} + W_{BP_2}$$

Il lavoro fatto sul tratto  $P_1B$  è nullo perché la forza peso (verticale) è perpendicolare allo spostamento (orizzontale):

$$W_{P_1B} = \vec{P} \cdot \vec{d} = mg \ell_{P_1B} \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

Risulta che:

$$W_{P_1BP_2} = W_{BP_2}$$

Valutando  $W_{BP_2}$  otteniamo:

$$W_{BP_2} = \vec{P} \cdot \vec{d} = mg \ell_{BP_2} \cos 0 = mg \ell_{BP_2} \quad \ell_{BP_2} = y_1 - y_2$$

$$W_{BP_2} = mg(y_1 - y_2) = mgy_1 - mgy_2$$

Infine possiamo immaginare un percorso fatto mediante una spezzata come quello mostrato in figura.

Anche in questo caso il lavoro fatto sui tratti orizzontali sarà nullo mentre quello fatto sui tratti verticali sarà proporzionale all'altezza del gradino.

Per il generico gradino (l'i-esimo) si avrà:

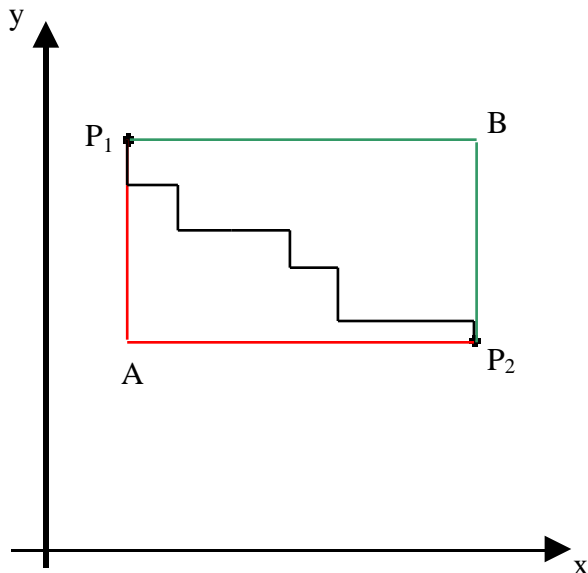
$$W_i = \vec{P} \cdot \vec{d}_i = mgh_i$$

in cui  $h_i$  rappresenta l'altezza del gradino.

Quando poi sommiamo su tutti i gradini si ottiene che il lavoro è proporzionale al dislivello complessivo. Cioè ancora una volta

$$W = mg(y_1 - y_2) = mgy_1 - mgy_2$$

Poiché qualunque traiettoria possiamo immaginare tra  $P_1$  e  $P_2$





potrà essere sempre approssimata con una spezzata, vuol dire che il lavoro fatto dalla forza peso mentre il punto materiale si sposta da  $P_1$  a  $P_2$  non dipende dalla traiettoria utilizzata ma solo dalla posizione iniziale e da quella finale. La forza peso è dunque una forza conservativa.

Del resto anche dall'esame dell'espressione del lavoro compiuto dalla forza peso si nota che esso dipende soltanto dalle coordinate  $y_1$  ed  $y_2$  rispettivamente del punto iniziale e di quello finale: non c'è nessun termine che tiene conto della particolare traiettoria seguita per andare da  $P_1$  a  $P_2$ . Resta pertanto verificato che la forza peso è una forza conservativa (Per comodità di disegno abbiamo utilizzato solo traiettorie contenute nel piano  $xy$ , ma la dimostrazione si può estendere facilmente a traiettorie che non giacciono nel piano verticale contenete  $P_1$  e  $P_2$ ).

### **Funzione energia potenziale.**

Se il lavoro fatto da una forza conservativa dipende solo dal punto iniziale e dal punto finale, allora :

esiste una funzione  $U$  della posizione del punto materiale  $P$ ,  $U(P) = U(x,y,z)$ , tale che il lavoro fatto dalla forza conservativa quando il punto materiale si sposta tra due punti qualsiasi,  $P_1$  e  $P_2$ , è dato dalla differenza tra i valori che la funzione  $U$  assume nel punto iniziale  $P_1$  meno quello che assume nel punto finale  $P_2$ . Cioè

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(P_1) - U(P_2) = - (U(P_2) - U(P_1)) = - \Delta U.$$

La funzione  $U$  così introdotta descrive la capacità della forza conservativa a compiere lavoro. Come capacità a compiere lavoro la funzione  $U$  rappresenta una energia; in particolare la capacità a compiere lavoro questa volta è legata alla posizione del punto materiale, per cui  $U$  è detta *energia potenziale*. La sua unità di misura è quella del lavoro.

Il lavoro fatto dalla forza conservativa è uguale all'opposto della variazione dell'energia potenziale.

$$W = - \Delta U$$

Infatti, se lo spostamento è concorde con la forza conservativa, il lavoro fatto dalla forza conservativa è positivo, di conseguenza  $\Delta U$  è negativo: l'energia potenziale passa da un valore più alto ad uno più basso, parte dell'energia potenziale iniziale è stata spesa per compiere il lavoro. Se viceversa lo spostamento è opposto alla

forza, il lavoro fatto dalla forza conservativa è negativo. In questo caso il lavoro viene compiuto dalle altre forze che agiscono sul punto materiale e subito dalla forza conservativa.  $U$  è positivo: la funzione energia potenziale passa da un valore più piccolo ad un valore più grande; il lavoro fatto dalle forze esterne viene accumulato sotto forma di energia potenziale, nel senso che ci può essere restituito quando il punto materiale ritorna nella posizione di partenza.

### **Determinazione della funzione energia potenziale.**

Per determinare l'espressione della funzione energia potenziale relativa ad una forza conservativa, si segue la seguente procedura:

- si indica con  $P$ , di coordinate  $x, y$  e  $z$ , il generico punto dello spazio in cui si vuole calcolare l'energia potenziale e con  $P_o$ , di coordinate  $x_o, y_o$  e  $z_o$ , un altro punto qualsiasi scelto in maniera arbitraria.
- Si parte dalla definizione di energia potenziale: il lavoro fatto dalla forza conservativa per spostare il punto materiale dalla posizione iniziale  $P_o$  alla posizione finale  $P$  lungo una qualsiasi traiettoria che connette  $P_o$  con  $P$  vale:

$$W_{P_o, P} = - \Delta U = U(P_o) - U(P)$$

o anche:

$$W_{P_o, P} = U(x_o, y_o, z_o) - U(x, y, z)$$

- Da questa si ricava che il valore della funzione  $U$  nel punto  $P$ , di coordinate  $x, y$  e  $z$ , vale:

$$U(x, y, z) = U(x_o, y_o, z_o) - W_{P_o, P}$$

- Ripetendo questo calcolo per ogni punto  $P$  dello spazio otteniamo l'espressione della funzione  $U(x, y, z)$
- L'ultimo passo che resta per completare la definizione è quello di fissare, arbitrariamente il valore dell'energia potenziale nel punto  $P_o$  e con questo la definizione di  $U$  è completa.

L'energia potenziale è quindi nota a meno di una costante arbitraria, l'energia potenziale del punto  $P_o$ , naturalmente questo non ci deve preoccupare perché in tutti i nostri calcoli avremo sempre a che fare con differenze di energia potenziale e quindi il valore arbitrario di energia assegnato al punto  $P_o$  è ininfluente.

Applichiamo quindi la procedura ad alcune delle forze conservative anche al fine di chiarirla meglio.

### **Energia potenziale della forza peso.**

Nel caso della forza peso abbiamo visto che il lavoro fatto dalla forza per spostare un corpo dalla posizione  $P_1$

di coordinate  $(x_1, y_1, z_1)$  alla posizione  $P_2$  di coordinate  $(x_2, y_2, z_2)$  è uguale a

$$W = mg y_1 - mg y_2$$

Identifichiamo il punto  $P_1$  con il punto  $P_o$  introdotto precedentemente e  $P_2$  con il generico punto  $P$ .

$$W_{P_o,P} = mgy_o - mgy$$

La funzione energia potenziale della forza peso sarà data:

$$U(x,y,z) = U(x_o,y_o,z_o) - W_{P_o,P} =$$

$$= U(x_o,y_o,z_o) - mgy_o + mgy$$

Scegliamo arbitrariamente il punto  $P_o$  nel piano  $xz$  (quindi  $y_o=0$ ) e sempre arbitrariamente gli assegniamo energia potenziale nulla. Con queste scelte l'espressione dell'energia potenziale della forza peso nel generico punto  $P$  dello spazio, e quindi in tutti i punti dello spazio, diventa:

$$U(x,y,z) = mgy$$

Dove  $y$  rappresenta la quota del punto  $P$  a partire dal piano di riferimento, quello che contiene  $P_o$ , a quota 0 a cui abbiamo assegnato energia potenziale uguale a zero.

### **Energia potenziale della forza elastica.**

Nel caso della forza elastica abbiamo visto che il lavoro fatto dalla forza per spostare un corpo dalla posizione  $P_1$  di coordinata  $x_1$ , alla posizione  $P_2$  di coordinata  $x_2$ , è uguale a

$$W_{el} = \frac{1}{2} kx_1^2 - \frac{1}{2} kx_2^2$$

Identifichiamo il punto  $P_1$  con il punto  $P_o$  introdotto precedentemente e  $P_2$  con il generico punto  $P$  sull'asse  $x$ .

$$W_{el,P_o,P} = \frac{1}{2} kx_o^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

La funzione energia potenziale della forza elastica sarà data:

$$\begin{aligned}
 U(x) &= U(x_0) - W_{el,P_0P} = \\
 &= U(x_0) - \frac{1}{2} kx_0^2 + \frac{1}{2} kx^2
 \end{aligned}$$

Scegliamo il punto  $P_0$  coincidente con la posizione del punto materiale quando la molla non è deformata (quindi  $x_0=0$ ) e sempre arbitrariamente gli assegniamo energia potenziale nulla. Con queste scelte l'espressione dell'energia potenziale della forza peso nel generico punto P dello spazio, e quindi in tutti i punti dell'asse x, diventa:

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

Dove x rappresenta la posizione del punto P sull'asse x coincidente con l'asse della molla, avente l'origine nel punto  $P_0$  a cui abbiamo assegnato energia potenziale uguale a zero (quando la molla non è deformata abbiamo assegnato energia potenziale nulla).

### **Energia potenziale della forze di gravitazione universale.**

Ricordiamo l'espressione della forza di gravitazione universale che agisce sul corpo di massa m ed è generata dal corpo di massa M posto nell'origine del sistema di riferimento

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \vec{u}_r = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

dove G è la costante di gravitazione universale, r è la distanza tra le due masse o, in altri termini, il modulo del vettore posizione  $\vec{r}$ , il cui versore è indicato con  $\vec{u}_r$ .

L'espressione dell'energia potenziale per la forza di gravitazione universale è data da

$$U(r) = -G \frac{mM}{r}$$

da cui si vede che l'energia potenziale dipende dalla distanza tra le due particelle. Per arrivare a questo risultato il punto di riferimento  $P_0$  è preso a distanza infinita dalla massa M ed ad esso è stata assegnata energia potenziale nulla.

Una espressione simile vale anche per la forza elettrostatica.

Calcolo del lavoro fatto da una forza centrale, gravitazionale o elettrostatica, per spostare il punto materiale dalla posizione  $P_1$ , a distanza  $r_1$  dal centro della forza, al punto  $P_2$  posto a distanza  $r_2$ . Consideriamo una forza centrale del tipo:

$$\vec{F} = \frac{k}{r^2} \vec{u}_r \quad \begin{array}{l} k = -GmM \text{ per la forza di gravitazione universale} \\ k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \text{ per la forza elettrostatica} \end{array}$$

in cui stiamo supponendo che il centro della forza sia nell'origine e  $r$ ; il modulo del vettore posizione  $\vec{r}$ , rappresenta la distanza del punto materiale dal centro della forza. Calcoliamo il lavoro  $W$  fatto dalla forza centrale per spostare il punto materiale dalla posizione iniziale  $P_1$  alla posizione finale  $P_2$ . Utilizzando la definizione più generale per il lavoro, la forza  $F$  non è né costante in modulo né in direzione, si ha:

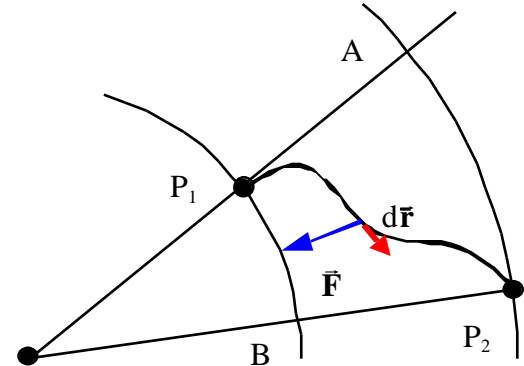
$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{k}{r^2} \vec{u}_r \cdot d\vec{r}$$

Il prodotto scalare di  $\vec{u}_r \cdot d\vec{r}$  fornisce proprio la variazione  $dr$  della distanza corrispondente allo spostamento infinitesimo  $d\vec{r}$ . L'integrale diventa dunque:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \frac{k}{r^2} dr = -\frac{k}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = -\frac{k}{r_2} + \frac{k}{r_1}$$

Risolvendo l'integrale si ottiene:

$$W = -\frac{k}{r_2} + \frac{k}{r_1}$$



Nel caso della forza di interazione gravitazionale questo diventa:

$$W = \frac{GmM}{r_2} - \frac{GmM}{r_1}$$

Seguendo la solita procedura per individuare la funzione  $U(x,y,z)$  per la forza di gravitazione universale, identifichiamo  $P_0$  con  $P_1$  e il generico punto  $P$  con  $P_2$ .

$$W_{P_0P} = \frac{GmM}{r} - \frac{GmM}{r_0}$$

L'energia potenziale sarà quindi data da:

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= U(x_0,y_0,z_0) - W_{P_0P} = \\ &= U(x_0,y_0,z_0) - \frac{GmM}{r} + \frac{GmM}{r_0} \end{aligned}$$

Che diventa  $U(x,y,z) = -\frac{GmM}{r}$  scegliendo il punto  $P_0$  a distanza infinita dal centro della forza,  $r_0 = \text{infinito}$ , e assegnando energia nulla a tale punto.

### ***Proprietà delle forze conservative.***

Le forze conservative godono delle seguente proprietà:

***Il lavoro eseguito da una forza conservativa su di un percorso chiuso è nullo.***

Consideriamo infatti un percorso chiuso. Individuiamo sul percorso due punti qualsiasi A e B che lo dividono nei tratti  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . Il lavoro effettuato dalla forza  $\vec{F}$  sul percorso chiuso si può esprimere come somma dei lavori eseguiti sui tratti  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ :

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1, 1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{P_2, 2}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Ora osserviamo che, considerando il secondo integrale, quello su  $\gamma_2$ , si ottiene:

$$\int_{P_2, 2}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{P_1, 2}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Infatti cambiare il verso di percorrenza significa cambiare il verso a  $d\vec{r}$  in ogni punto della traiettoria. La forza, invece, rimane invariata. Questo corrisponde a cambiare il segno a tutti gli elementi di lavoro infinitesimo,  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ . L'integrale da  $P_1$  a  $P_2$  corrisponde alla somma di tutti i lavori infinitesimi,  $dW$ , presi con il proprio segno, cosicché quando si inverte il verso di percorrenza della curva  $\gamma_2$  si sommano gli stessi lavori infinitesimi ma con il segno cambiato. Il lavoro complessivo sul percorso chiuso è dato da:

$$W = \int_{P_1, 1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1, 1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{P_1, 2}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Infatti, poiché la forza  $\vec{F}$  è conservativa, i due integrali tra i punti  $P_1$  e  $P_2$  sui percorsi  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono uguali perché connettono gli stessi due punti  $P_1$  e  $P_2$ , cosicché la loro differenza è nulla.

Il viceversa è anche vero. Cioè

***se una forza compie lavoro nullo su un qualunque percorso chiuso è una forza conservativa.***

La dimostrazione segue le stesse linee utilizzate per la dimostrazione precedente.

Una volta stabilita questa proprietà è molto facile fare un esempio di una forza non conservativa. Per far vedere che una forza non è conservativa è sufficiente trovare un percorso su cui la forza compie un lavoro diverso da zero. Una forza non conservativa è la forza di attrito dinamico. Essa infatti è sempre opposta al moto, cioè

opposta a  $d\vec{r}$ . Il lavoro infinitesimo compiuto dalla forza di attrito in ogni punto della traiettoria  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , è perciò sempre negativo. Il lavoro eseguito dalla forza di attrito su un percorso chiuso è la somma di tanti lavori infinitesimi tutti negativi: cosicché anche il lavoro totale risulta negativo e quindi non nullo. La forza di attrito quindi non è conservativa.

Facciamo un esempio.

Supponiamo di lanciare su per un piano inclinato un punto materiale con una certa velocità iniziale  $v_0$ . Chiamiamo  $P_1$  il punto di partenza del moto. Il corpo salendo sul piano inclinato raggiunge il punto  $P_2$  e poi ridiscende ritornando dopo un certo tempo nel punto  $P_1$ . Si tratta quindi di un percorso chiuso. Sappiamo che la forza peso compie lavoro nullo in questo ciclo. Il lavoro fatto dalla forza peso è proporzionale alla differenza di quota tra il punto finale e quello iniziale, che in questo caso coincidono. Se il piano inclinato è scabro, sul corpo agisce durante il moto anche la forza di attrito dinamico pari a  $\mu_d mg \cos \alpha$ . Se indichiamo con  $s$  la distanza tra  $P_1$  e  $P_2$  lungo il piano inclinato, il lavoro fatto dalla forza di attrito nel percorso da  $P_1$  a  $P_2$  è dato da:

$$W(P_1 \rightarrow P_2) = -s \mu_d mg \cos \alpha$$

mentre quello fatto sul percorso per tornare da  $P_2$  a  $P_1$  è dato da:

$$W(P_2 \rightarrow P_1) = -s \mu_d mg \cos \alpha$$

Il lavoro eseguito sul percorso chiuso risulta pertanto uguale a:

$$W(P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_1) = -2s \mu_d mg \cos \alpha$$

che è diverso da zero. La forza di attrito non è una forza conservativa.



### **Energia potenziale di un punto materiale soggetto a più forze conservative.**

Qualora un punto materiale sia soggetto a più forze conservative la funzione energia potenziale si ottiene sommando le funzioni energia potenziale relative a ciascuna delle forze agenti:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{R} \, d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n) \, d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} (\mathbf{F}_1 \, d\mathbf{r} + \mathbf{F}_2 \, d\mathbf{r} + \dots + \mathbf{F}_n \, d\mathbf{r}) =$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} \vec{\mathbf{F}}_1 \, d\vec{\mathbf{r}} + \int_{P_1}^{P_2} \vec{\mathbf{F}}_2 \, d\vec{\mathbf{r}} + \dots + \int_{P_1}^{P_2} \vec{\mathbf{F}}_n \, d\vec{\mathbf{r}} = W_1 + W_2 + \dots + W_n =$$

$$= \left[ (U_1(P_1) - U_1(P_2)) + (U_2(P_1) - U_2(P_2)) + \dots + (U_n(P_1) - U_n(P_2)) \right] =$$

$$= \left[ (U_1(P_1) + U_2(P_1) + \dots + U_n(P_1)) + (U_1(P_2) + U_2(P_2) + \dots + U_n(P_2)) \right] =$$

$$= U(P_1) - U(P_2)$$

dove  $U(P) = U_1(P) + U_2(P) + \dots + U_n(P)$ .

### **Conservazione dell'energia meccanica.**

Consideriamo un punto materiale su cui agisce una sola forza. Il teorema delle forze vive ci ha consentito di stabilire, che comunque sia la forza agente sul punto materiale, il lavoro fatto dalla forza lungo il percorso da  $P_1$  a  $P_2$  è uguale alla variazione di energia cinetica del punto materiale. Cioè:

$$W = \Delta K = K(P_2) - K(P_1)$$

Se la forza agente sul punto materiale è anche conservativa, allora dalla definizione di energia potenziale sappiamo che il lavoro fatto dalla forza lungo il percorso da  $P_1$  a  $P_2$  è dato da:

$$W = U(P_1) - U(P_2) = - (U(P_2) - U(P_1)) = - \Delta U.$$

Confrontando queste due relazioni, per una forza conservativa, possiamo scrivere che:

$$K = - \Delta U$$

$$K(P_2) - K(P_1) = - (U(P_2) - U(P_1))$$

Da questa si ottiene:

$$K(P_2) + U(P_2) = K(P_1) + U(P_1)$$

$$E(P_2) = E(P_1)$$

Indichiamo con  $E$  la quantità  $K(P) + U(P)$ .  $E$  è la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale posseduta dal punto materiale e prende il nome di energia meccanica totale.

La relazione precedente afferma che, sotto l'azione di una forza conservativa, l'energia meccanica totale del punto materiale è la stessa all'inizio e alla fine del moto. Ma data l'arbitrarietà dei punti  $P_1$  e  $P_2$  possiamo affermare che in presenza di sole forze conservative l'energia meccanica totale è una costante del moto. Se indichiamo con  $P$  il generico punto sulla traiettoria possiamo scrivere:

$$E(P) = K(P) + U(P) = \text{cost} = K(P_1) + U(P_1)$$

Questo risultato vale anche quando sul punto materiale agiscono più forze, purché esse siano tutte conservative e come energia potenziale si usi la somma delle energie potenziali relative a ciascuna delle forze agenti.

### **Estensione della "conservazione dell'energia" in presenza di forze non conservative.**

Se alcune delle forze agenti sul punto materiale non sono conservative, allora si può vedere che la variazione dell'energia meccanica totale,  $E$ , a seguito dello spostamento del punto materiale tra  $P_1$  e  $P_2$  è proprio uguale al lavoro fatto dalle forze non conservative,  $W_{nc}$ . Infatti il lavoro,  $W$ , effettuato dalla risultante delle forze agenti sul punto materiale nello spostamento del punto materiale tra  $P_1$  e  $P_2$  può essere ottenuto come somma del lavoro effettuato dalle forze conservative,  $W_c$ , e di quello effettuato dalle forze non conservative,  $W_{nc}$ :

$$W = W_c + W_{nc}$$

da cui per il teorema delle forze vive e dalla definizione dell'energia potenziale:

$$K = W = W_c + W_{nc} = -U + W_{nc}$$

$$K + U = W_{nc}$$

$$(K_2 - K_1) + (U_2 - U_1) = (K_2 + U_2) - (K_1 + U_1) = E_2 - E_1 = E = W_{nc}$$

Quindi:

$$E = W_{nc}$$

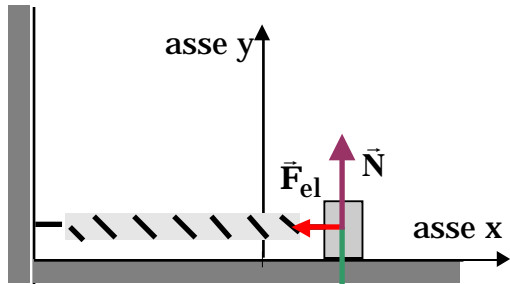
Come vedremo poi in Termodinamica, la variazione dell'energia meccanica totale, dovuta al lavoro delle forze non conservative, corrisponde ad una variazione dell'energia interna dei corpi coinvolti nel moto del punto materiale in considerazione. Quindi nel caso di una diminuzione dell'energia meccanica, che corrisponde ad un lavoro negativo delle forze non conservative, come per esempio nel caso delle forze di attrito o delle resistenze passive, l'energia interna dei corpi aumenta: si osserva infatti un aumento della temperatura dei corpi a contatto; mentre nel caso di un aumento dell'energia meccanica totale, che corrisponde ad un lavoro positivo fatto dalle forze non conservative, cosa che per esempio può succedere nelle esplosioni, si osserva un cambiamento della formula chimica dell'esplosivo che corrisponde ad una diminuzione dell'energia interna del sistema.

In conclusione, in presenza di forze non conservative, si osserva una variazione dell'energia meccanica totale, ma se si include nel conto anche l'energia interna dei corpi, si osserva che complessivamente l'energia si conserva.

## Diagramma dell'energia

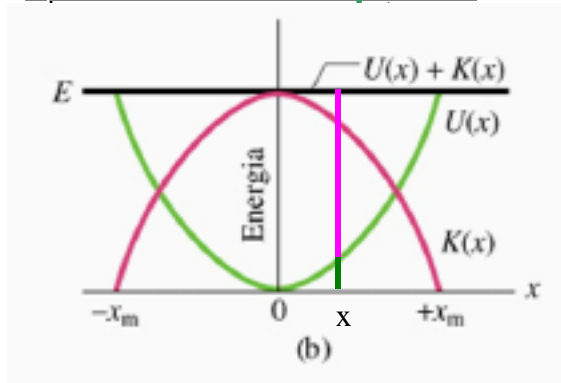
È utile studiare il moto di un punto materiale studiando il diagramma dell'energia.

In questo paragrafo ci limiteremo a considerare un punto materiale soggetto ad una forza conservativa la cui energia potenziale sia funzione di una sola coordinata per esempio la  $x$  (in queste ipotesi il moto sarà lungo l'asse  $x$  e la forza avrà solo la componente  $x$ ).



Possiamo considerare per esempio l'oscillatore armonico. In questo caso sia la forza peso che la normale  $N$  fanno lavoro nullo durante il moto dell'oscillatore (le forze sono perpendicolari allo spostamento), non contribuiscono cioè alle variazioni della sua energia cinetica e/o potenziale. L'unica forza che contribuisce a far variare l'energia cinetica e l'energia potenziale dell'oscillatore armonico è la forza elastica, che è una forza conservativa e la sua funzione energia potenziale vale:

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2$$



Questa funzione può essere rappresentata in un grafico, che prende il nome di diagramma dell'energia. Sull'asse delle ascisse si riporta la coordinata  $x$ , cioè la posizione del punto materiale. Sull'asse delle ordinate si riporta l'energia. La funzione energia potenziale sarà rappresentata da una parabola (curva verde) con vertice nell'origine, simmetrica rispetto all'asse delle ordinate (l'energia potenziale assume lo stesso valore sia in  $x$  che in meno  $x$  ( $-x$ )) ed è sempre positiva.

L'energia meccanica totale durante il moto dell'oscillatore armonico si conserva, essendo la forza elastica è conservativa e essendo nullo il lavoro fatto dalle altre forze presenti. Essa sarà rappresentata da

una retta parallela all'asse delle ascisse ( $E = \text{costante}$ ).

Questa retta interseca la curva che rappresenta l'energia potenziale in due punti di ascisse rispettivamente  $x_m$  e  $-x_m$ . Questi due punti si chiamano *punti di inversione* del moto. Vediamo perché.

Fissata una generica posizione  $x$  dell'oscillatore armonico, allora la lunghezza del segmento perpendicolare all'asse delle ascisse delimitato dall'asse delle ascisse e dalla curva dell'energia potenziale (segmento verde)

rappresenta l'energia potenziale del punto materiale quando si trova nella posizione  $x$ , mentre la lunghezza del segmento perpendicolare all'asse delle ascisse delimitato dalla curva dell'energia potenziale e dalla retta che rappresenta l'energia meccanica totale (segmento viola) rappresenta l'energia cinetica posseduta dal punto materiale in quella posizione.

Infatti:

$$\text{per definizione } E = K + U \quad K = E - U$$

Calcolando in questo modo l'energia cinetica otteniamo il grafico dell'energia cinetica in funzione della posizione (curva viola).

Si vede che l'energia cinetica è massima per  $x=0$ , quando cioè l'energia potenziale è uguale a zero, ed è nulla nei *punti di inversione* del moto,  $x=x_m$  e  $x=-x_m$ . Parlando in termini di velocità, il modulo della velocità assume il valore massimo in  $x=0$  e si annulla nei *punti di inversione* del moto.

Dal diagramma dell'energia capiamo dunque che il punto materiale può spostarsi tra  $-x_m$  ed  $x_m$ , infatti in questo tratto essendo l'energia meccanica totale maggiore dell'energia potenziale, l'energia cinetica sarà positiva o al massimo nulla come deve essere ( $K = \frac{1}{2}mv^2$ ). Per valori della  $x$  esterni a questo intervallo, l'energia cinetica

dovrebbe assumere valori negativi (l'energia meccanica totale è più piccola di quella potenziale), quindi non fisici, vuol dire che non potremo mai trovare il punto materiale al di là dei *punti di inversione* del moto. Ecco spiegato anche il motivo del loro nome: quando il punto materiale si avvicina ad un *punto di inversione* del moto rallenta fino ad arrestarsi ( $v=0$ ) e poi torna indietro invertendo il moto.

Dal digramma dell'energia possiamo anche ricavare informazioni sulla forza agente sul punto materiale in una data posizione.

Dalla definizione di energia potenziale sappiamo che il lavoro fatto dalla forza per un fissato spostamento del punto materiale  $x$  sarà uguale all'opposto della variazione di energia potenziale:

$$W = U_i - U_f = - \Delta U$$

Se lo spostamento è infinitesimo,  $dx$ , l'espressione precedente diventa:

$$dW = -dU$$

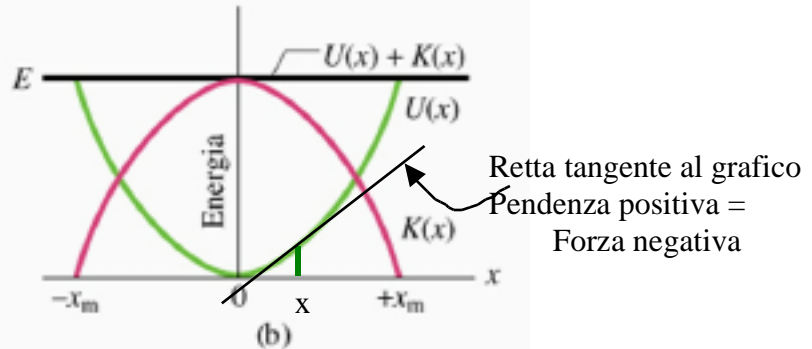
Nella ipotesi che la forza abbia solo la componente  $x$ , avremo:

$$dW = -dU$$

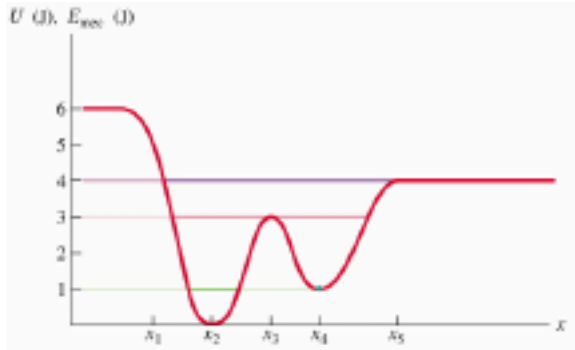
$$dW = F_x dx \quad F_x = -\frac{dU}{dx}$$

La componente x della forza si ottiene facendo la derivata della funzione energia potenziale rispetto ad x e cambiando il segno.

Geometricamente: dobbiamo costruire la retta tangente al grafico nell'ascissa considerata, valutare la pendenza e poi cambiare di segno per ottenere la forza. Nell'origine la pendenza della tangente al grafico è nulla, la tangente al grafico coincide proprio con l'asse delle x. Pertanto nell'origine, che è anche la posizione di minimo relativo del grafico della funzione, la forza è nulla. Possiamo affermare che i punti di minimo della funzione energia potenziale sono punti di equilibrio. Essi sono anche di equilibrio stabile, infatti non appena il punto materiale viene spostato dalla



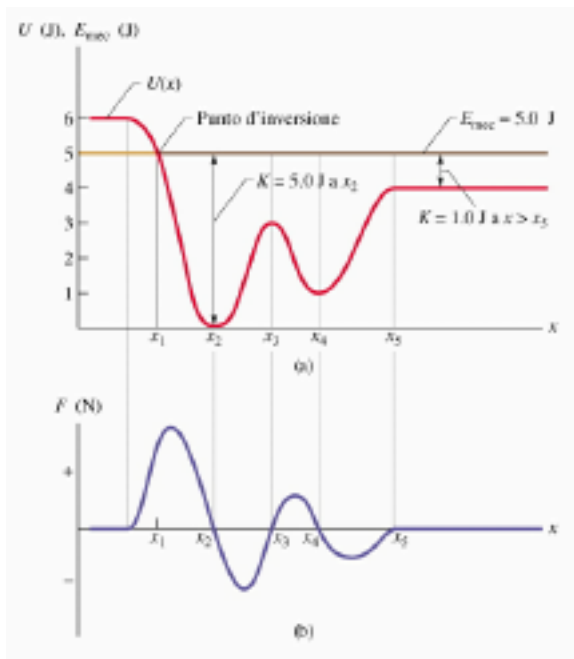
posizione di equilibrio, si genera una forza (si osservino le pendenze delle rette tangenti al grafico) che tende a riportarlo nella posizione di equilibrio (forza di richiamo).



Generalizziamo il discorso. Supponiamo di avere un corpo soggetto ad una forza la cui curva dell'energia potenziale sia quella rappresentata in figura: essa ha due minimi relativi in  $x_2$  e  $x_4$  ed un massimo relativo in  $x_3$ .

Possiamo fare riferimento ad un carrello su un otto voltante privo di attrito avente la stessa sagoma del grafico della funzione. In tal caso il punto proiezione sull'asse delle x ha come energia potenziale dovuta alla forza peso proprio l'andamento mostrato.

Se l'energia meccanica totale è pari a zero J. Allora potremo trovare



il punto materiale nella posizione  $x_2$  fermo. Esso resta in quella posizione per sempre.

Se l'energia meccanica totale è minore di 1 J, allora la retta che rappresenta l'energia meccanica totale interseca la curva dell'energia potenziale in due punti (i punti di inversione del moto): il punto materiale oscilla intorno alla coordinata  $x_2$ .

Se l'energia meccanica totale è pari a 1 J (il valore dell'energia potenziale in  $x_4$ ), allora potremo avere due casi: o il punto materiale oscilla intorno a  $x_2$  o si trova fermo nella posizione  $x_4$ . Tutto dipende dalla posizione iniziale: se all'istante di tempo il corpo era vicino a  $x_2$  continuerà ad oscillare intorno a  $x_2$ , se al contrario era fermo in  $x_4$ , continuerà a restare in quella posizione.

Per energie meccaniche totali ancora maggiori ma comunque più piccole di 3 J (il valore dell'energia potenziale in  $x_3$ , ci saranno 4 intersezioni tra la retta dell'energia meccanica totale e la curva dell'energia potenziale. Il punto materiale oscillerà intorno a  $x_2$  o intorno a  $x_4$  sulla base alle condizioni iniziali. Non potrà mai passare da una parte all'altra, superare la cosiddetta barriera di potenziale.

Per energie meccaniche totali comprese tra 3 J e 4 J, ci saranno due sole intersezioni tra la retta che rappresenta l'energia

meccanica totale e la curva dell'energia potenziale: il punto materiale oscillerà tra queste due posizioni passando sia per  $x_2$  che per  $x_4$ , ha energia sufficiente per superare la barriera di potenziale in  $x_3$ .

Per valori dell'energia meccanica totale ancora maggiori (più grandi di 4 J e minori di 6J), ci sarà un solo punto di intersezione tra la retta che rappresenta l'energia meccanica totale e la curva dell'energia potenziale, quindi un solo punto di inversione del moto. Il punto materiale può provenire da  $x = +$ , raggiungere il punto di inversione e tornare a  $x = +$ .

Se l'energia meccanica totale è maggiore di 6J, non ci saranno punti di inversione del moto.

La curva b) rappresenta la componente x della forza ottenuta utilizzando la relazione

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

si noti che nelle posizioni di minimo relativo  $x_2$  e  $x_4$ , in quelle di massimo  $x_3$  e sui pianerottoli per  $x < x_1$  e  $x > x_5$ , la forza è nulla.

C'è però una differenza:

I punti di minimo relativo sono punti di equilibrio stabile: non appena si sposta il punto materiale dalla posizione di equilibrio si manifestano delle forze che tendono a riportare il punto nella posizione di equilibrio (si osservino le pendenze delle rette tangenti al grafico dell'energia potenziale subito prima e subito dopo il minimo).

I punti di massimo relativo sono punti di equilibrio instabile: se si sposta il punto dalla posizione di equilibrio, le forze che si manifestano tendono ad allontanarlo ancora di più dalla posizione di equilibrio.

I pianerottoli sono punti di equilibrio indifferente: se si sposta il punto materiale dalla posizione di equilibrio non si manifesta alcuna forza.

### **Regole da utilizzare nella soluzione di problemi con l'approccio energetico**

1) *Utilizzare l'approccio energetico ogni volta che è possibile.*

L'approccio energetico è più semplice della seconda legge della dinamica:

- la conservazione dell'energia è un'equazione scalare mentre la seconda legge di Newton è vettoriale corrispondente a ben tre equazioni scalari
- la seconda legge di Newton è un'equazione differenziale del secondo ordine, la conservazione dell'energia è solo del primo ordine.

Non è possibile usare l'approccio energetico quando viene chiesto di calcolare la legge oraria o l'accelerazione. Negli altri casi bisognerebbe cercare di utilizzare l'approccio energetico, anche se viene chiesto di calcolare qualche forza, in molti casi è possibile utilizzare l'approccio energetico, soprattutto se la forza fa lavoro non nullo.

2) *Individuare il punto materiale di cui si vuole determinare il moto.*

In qualche problema è presente più di un punto materiale: le operazioni descritte ai successivi punti dal 2 al 6 vanno ripetute per ogni punto materiale presente nel problema.

3) *Stabilire il sistema di riferimento inerziale che si intende utilizzare per lo studio del moto*

In molti problemi si farà uso del sistema del laboratorio, ma in qualche altro caso come nei problemi di gravitazione converrà usare un sistema geocentrico (moto della luna e dei satelliti artificiali) o eliocentrico (moto della terra, moto dei pianeti). In qualche altro caso, come per descrivere moti che avvengono in un treno, su una nave, si potranno usare dei sistemi di riferimento legati al treno, alla nave, ecc., purché questi oggetti si muovono di moto rettilineo uniforme rispetto al sistema del laboratorio, altrimenti occorrerà



considerare sempre il sistema del laboratorio.

4) *Determinare tutte le forze agenti sul punto materiale sotto osservazione.*

Per ricercare le forze dobbiamo tener presente che nei sistemi di riferimento inerziali le forze sono di interazione, nel senso che oltre ad esserci il corpo che le subisce (il corpo sotto osservazione) per ciascuna forza si può determinare il corpo che la origina. Per ricercare le forze agenti sul corpo sotto osservazione occorre quindi guardare nell'ambiente circostante il corpo stesso ed individuare quei corpi che possono dare origine a forze.

È utile tener presente che le forze si possono suddividere in

- forze che agiscono a distanza (non è richiesto il contatto tra il corpo che origina la forza ed il corpo che la subisce). Per esempio la forza peso, la forza di gravitazione universale, la forza elettrostatica tra cariche elettriche, la forza di Lorentz.
- forze di contatto (agiscono solo se c'è contatto tra il corpo che origina la forza ed il corpo che la subisce). Per esempio la reazione vincolare (composta dalla componente normale al vincolo  $N$  e dalla componente parallela, la forza di attrito), la tensione della corda, la forza elastica, la resistenza passiva.

Pertanto, una volta riconosciute le forze che possono agire a distanza, basta guardare i corpi a contatto con il corpo sotto osservazione.

Nel determinare le forze agenti sul corpo si suggerisce di localizzare il corpo stesso in una posizione possibilmente diversa sia da quella iniziale che da quella finale, una posizione intermedia scelta arbitrariamente.

5) *Separare le forze tra forze conservative e forze non conservative.*

Sono forze conservative:

- La forza peso  $U_p = mgh$
- La forza elastica  $U_{el} = \frac{1}{2} kx^2$
- La forza di gravitazione  $U_G = -G \frac{m_1 m_2}{r}$
- La forza elettrostatica  $U_{Coulomb} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$

Per queste forze noi conosciamo l'espressione dell'energia potenziale. Tutte le altre forze andranno

considerate come forze non conservative.

- 6) *Scrivere l'equazione della conservazione dell'energia meccanica totale.*

$$E = 0 \quad \text{se tutte le forze sono conservative}$$

$$E = W_{nc} \quad \text{se **non** tutte le forze sono conservative}$$

- 7) *Stabilire con precisione la situazione iniziale e quella finale.*

Questo è un passo particolarmente delicato. In molti problemi questa scelta è obbligata e quindi banale. In altri invece è possibile scegliere tra diverse situazioni iniziali o finali. La scelta deve essere operata in maniera da semplificare i calcoli successivi.

Come suggerimento generale conviene selezionare come istante iniziale o finale quelli per i quali le quantità da calcolare (l'energia cinetica e potenziale) sono direttamente derivabili dai dati della traccia. Evitare di applicare la conservazione di energia per calcolare i valori dell'energia in uno stato intermedio e poi utilizzare quest'ultimo come punto iniziale per il passo successivo: eventuali errori commessi nel primo passo si propagheranno anche ai passi successivi, ritornando invece allo stato iniziale derivabile direttamente dai dati della traccia si evita tale propagazione.

- 8) *Valutare il lavoro delle forze non conservative se presenti.*

Nel valutare il lavoro delle forze non conservative si tenga conto che:

- La forza di attrito statico non compie lavoro, perché applicata ad un punto fermo.
- La forza di attrito dinamico fa sempre un lavoro negativo.
- La normale compie lavoro nullo perché è sempre perpendicolare allo spostamento.
- La tensione nella fune con un capo fisso come nel caso del pendolo: l'altro si muove di moto circolare e quindi il lavoro della tensione è nullo perché la tensione (radiale) è sempre perpendicolare allo spostamento (tangente alla traiettoria circolare)
- La tensione nella fune con entrambi i capi che si muovono: poiché la corda si assume ideale e quindi di lunghezza fissa, gli spostamenti ai due capi della corda sono uguali in modulo. Il lavoro fatto dalle due tensioni risulta essere l'uno l'opposto dell'altro. Anche in questo caso il lavoro complessivo delle due

tensioni è nullo.

9) *Valutare l'energia cinetica e l'energia potenziale iniziale e le corrispondenti quantità finali*

Valutare l'energia cinetica e l'energia potenziale iniziale utilizzando le condizioni iniziali, velocità e posizione iniziale. Per il calcolo dell'energia potenziale occorre fissare il punto di riferimento a cui assegnare energia potenziale uguale a zero. Si faccia attenzione ad usare lo stesso riferimento per il calcolo dell'energia potenziale finale.

Per valutare l'energia potenziale di un sistema di particelle, per esempio un corpo rigido, nel campo della forza peso ricordarsi che l'energia potenziale dipende dalla posizione del centro di massa.

### **Quantità di moto.**

Dato un corpo di massa  $m$  che si sta muovendo con velocità  $\vec{v}$ , si chiama *quantità di moto* del corpo la grandezza:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Essendo la quantità di moto di un corpo il prodotto di uno scalare, la massa, che è un numero positivo, per un vettore, la velocità, essa è una grandezza vettoriale che ha la stessa direzione e lo stesso verso di  $\vec{v}$ . Le sue dimensioni sono quelle di una massa per una velocità:

$$[p]=[M][v]=[M][L][T^{-1}]$$

Nel Sistema Internazionale si misurerà in  $\text{kg m s}^{-1}$ .

In termini di quantità di moto il principio di inerzia (o I<sup>a</sup> legge di Newton) si può esprimere dicendo che la “quantità di moto di un punto materiale isolato resta costante”, infatti la sua massa non varia e, in base al principio di inerzia, neppure la sua velocità.

Se invece la velocità del punto materiale cambia per effetto dell’accelerazione prodotta dalla risultante  $\vec{F}$  delle forze applicate ( $\vec{F} = m\vec{a}$  in base alla seconda legge di Newton), allora anche la quantità di moto varierà nel tempo. Possiamo calcolarci la rapidità con cui essa varia calcolando la sua derivata rispetto al tempo:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

In conclusione, nell’ipotesi in cui la massa è costante, approssimazione lecita quando la velocità del corpo è molto più piccola di quella della luce, si ottiene che:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

la derivata della quantità di moto rispetto al tempo è proprio uguale alla risultante delle forze applicate al punto materiale.

La relazione ottenuta rappresenta un modo diverso di esprimere la seconda legge di Newton. Anzi questa forma è addirittura più generale di quella che abbiamo usato finora,  $\vec{F} = m\vec{a}$ . Infatti mentre la seconda legge della dinamica nella forma  $\vec{F} = m\vec{a}$  è valida solo a basse velocità, confrontata con quella della luce, la forma  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$  è valida anche per velocità paragonabili a quella della luce, cioè quando la massa di un corpo non può più essere considerata costante ma è una funzione della sua velocità (aumenta all'aumentare della velocità).

### **Definizione del prodotto vettoriale tra due vettori ( $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ).**

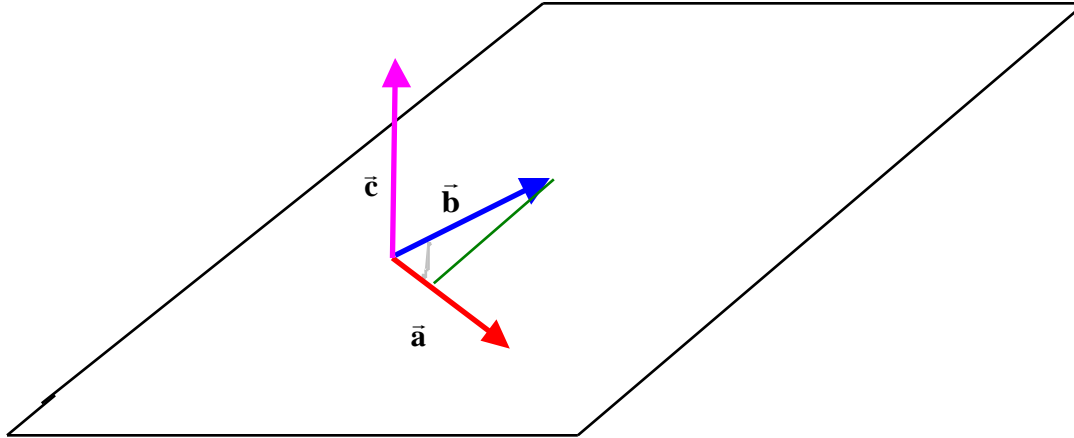
Il prodotto vettoriale tra i due vettori si indica con il segno  $\times$ .

Il risultato di un prodotto vettoriale è un vettore.

Il vettore  $\vec{c}$ , risultato del prodotto vettoriale  $\vec{a} \times \vec{b}$ , è così definito:

- la sua direzione è perpendicolare al piano individuato dai due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . Pertanto il vettore  $\vec{c}$  è perpendicolare sia al primo vettore  $\vec{a}$  che al secondo  $\vec{b}$ .
- il suo modulo è dato da  $c = ab \sin \theta$ , dove  $\theta$  è l'angolo minore di  $180^\circ$  compreso tra  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . (N.B. con questa limitazione sull'angolo il modulo del vettore  $\vec{c}$  è un numero positivo)
- il suo verso è determinato dal verso indicato dal dito medio della mano destra quando il pollice è disposto secondo il vettore  $\vec{a}$  e l'indice secondo il vettore  $\vec{b}$ . Cioè i vettori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  sono disposti come gli assi x,y e z di una terna cartesiana destrorsa. (E' facile applicare la regola della mano destra quando i vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  sono all'incirca ortogonali. Se non è così allora diventa complicato disporre le dita della mano destra secondo i vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . Dobbiamo però notare che, in un prodotto vettoriale, la cosa importante è la componente di  $\vec{b}$  ortogonale ad  $\vec{a}$  ( $b \sin \theta$ ), per cui basterà disporre l'indice secondo la componente di  $\vec{b}$  ortogonale ad  $\vec{a}$ .

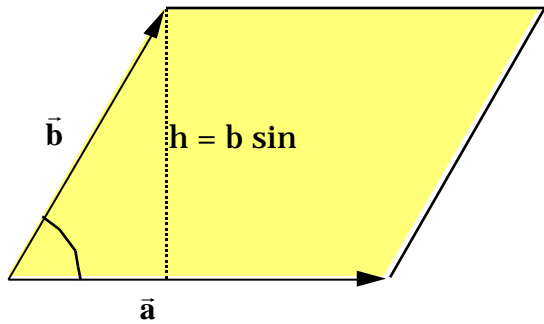
Una maniera alternativa per definire il verso del vettore  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ , consiste sempre nell'uso della mano destra, questa volta però chiusa a pugno e con il pollice sollevato. Si orienti il pugno in maniera che le dita indichino il verso in cui deve ruotare, dell'angolo minore di  $180^\circ$ , il primo vettore del prodotto vettoriale,  $\vec{a}$ , per sovrapporsi al secondo vettore  $\vec{b}$ . Allora il vettore  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  sarà diretto secondo il pollice.



Proprietà del prodotto vettoriale:

- Il prodotto vettoriale non è commutativo infatti  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ .
- Se  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  sono paralleli, allora  $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ .
- Se  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  sono perpendicolari, allora  $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab$ .
- $\vec{i} \times \vec{i} = 0$     $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$     $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$
- $\vec{j} \times \vec{j} = 0$     $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$     $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$
- $\vec{k} \times \vec{k} = 0$     $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$     $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$
- Il prodotto vettoriale gode della proprietà distributiva rispetto alla somma  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Interpretazione di una superficie come un vettore.



$$\text{Area} = ah = ab \sin = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Con riferimento alla figura, l'area del parallelogramma è data da:

$$A = ah = ab \sin$$

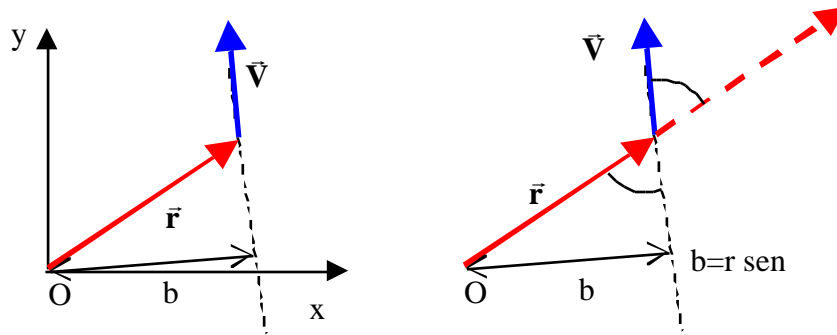
Facendo corrispondere i vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  ai due lati del parallelogramma come mostrato in figura, possiamo osservare che il prodotto vettoriale  $\vec{a} \times \vec{b}$  ha come modulo proprio l'area del parallelogramma.

### **Momento di un vettore.**

Sia  $\vec{V}$  un vettore applicato ad un punto P, la cui posizione rispetto al "polo" O è individuata dal vettore posizione  $\vec{r}$ , si definisce *momento del vettore  $\vec{V}$  rispetto al polo O* il seguente prodotto vettoriale:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{V}$$

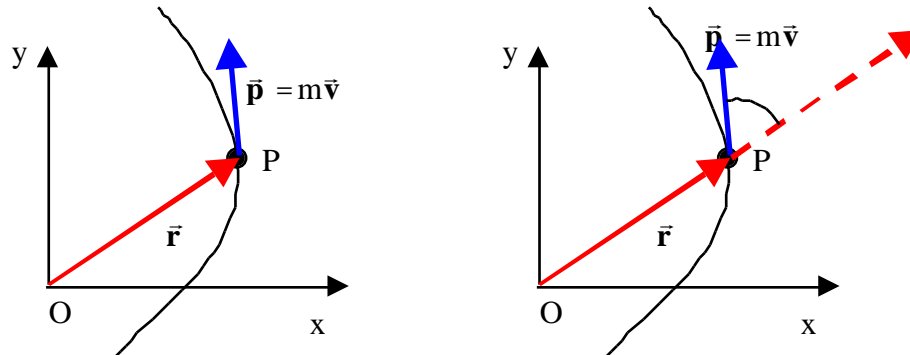
Il modulo del momento è dato da  $M = rV \sin \theta = bV$ , dove  $\theta$  è l'angolo tra  $\vec{r}$  e  $\vec{V}$ , mentre b è la distanza del punto O dalla retta di azione del vettore V e viene chiamato *braccio*. La direzione del momento è quella perpendicolare al piano che contiene  $\vec{r}$  e  $\vec{V}$ , mentre il verso può essere determinato con la regola della mano destra.



**Momento angolare o momento della quantità di moto.**

Se  $\vec{p}$  è la quantità di moto del punto materiale P ed  $\vec{r}$  il vettore posizione che individua la posizione di P rispetto ad O, si definisce *momento della quantità di moto, o momento angolare*, del punto materiale P rispetto al polo O la quantità:

$$\vec{\ell}_o = \vec{r} \times \vec{p}$$





Si suppone infatti che il vettore quantità di moto  $\vec{p}$  sia applicato nel punto P e  $\vec{r}$  rappresenta quindi la posizione del punto di applicazione del vettore  $\vec{p}$ .

Il momento angolare quale prodotto vettoriale di due vettori è un vettore.

Il suo modulo è dato da:

$$\ell_o = rpsen\theta = rmvsen\theta$$

dove  $\theta$  è l'angolo, minore di  $180^\circ$ , tra il vettore posizione e il vettore quantità di moto come mostrato in figura.

Le sue dimensioni sono:

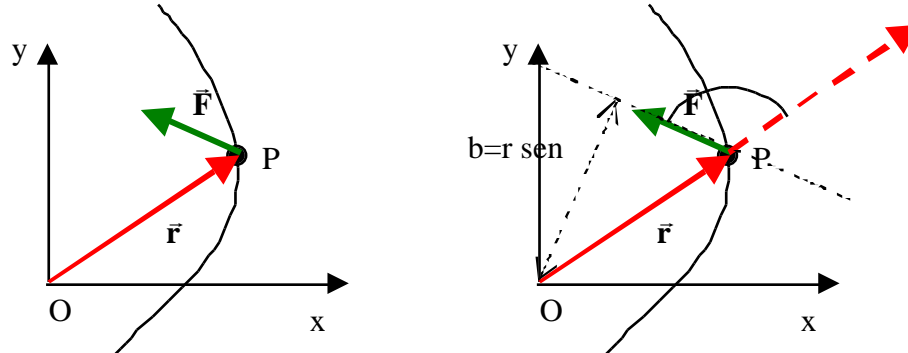
$$[\ell] = [L][MLT^{-1}] = [ML^2T^{-1}]$$

e nel sistema S.I. si misura in  $\text{kgm}^2/\text{s}$ .

## Momento della forza

Se sul punto materiale P, individuato rispetto al polo O, l'origine di un sistema di riferimento cartesiano, agisce una forza  $\vec{F}$  si definisce **momento della forza**, rispetto al polo O, la quantità:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$



Il momento della forza, quale prodotto vettoriale di due vettori, è un vettore. Il suo modulo è dato da:

$$M_O = rF \sin \theta = Fb$$

dove  $\theta$  è l'angolo minore di  $180^\circ$  tra il vettore posizione e la forza. La direzione del momento della forza è normale al piano contenente la forza e il vettore posizione, e il verso può essere determinato utilizzando la regola della mano destra. Le dimensioni del momento di una forza sono:

$$[M] = [L][MLT^{-2}] = [ML^2T^{-2}],$$

Le sue unità di misura nel sistema SI sono newton per metro, Nm.

Come appare dalla formula precedente, il modulo del momento della forza è dato dalla forza per la componente del

vettore posizione perpendicolare alla forza, detta *braccio* della forza, che corrisponde alla distanza  $b$  della retta di azione della forza dal polo  $O$ .

$$M_o = rF\sin = F(r\sin(180^\circ - )) = Fb$$

Per retta di azione della forza si intende quella retta avente l'orientazione della forza e passante per il punto di applicazione della forza.

Si osservi che spostando il punto di applicazione della forza lungo la retta di azione, il momento della forza non cambia, infatti non cambia la distanza della retta di azione dal polo  $O$ .

In particolare se il polo  $O$  appartiene alla retta di azione della forza (la forza è parallela o anti-parallela al raggio vettore), il momento della forza è nullo.

### **Relazione tra momento della quantità di moto e momento della forza.**

Se il punto materiale  $P$  si muove sulla sua traiettoria, il suo momento della quantità di moto rispetto al polo  $O$ , l'origine del sistema di riferimento in cui viene studiato il moto, varierà sia perché cambia il vettore posizione di  $P$ , ma anche la sua velocità:  $\vec{\ell}_o = \vec{r} \times \vec{p}$ . Possiamo valutare la rapidità con cui il momento della quantità di moto varia calcolando la sua derivata rispetto al tempo.

$$\frac{d\vec{\ell}_o}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

tenendo conto che  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ , che  $\vec{v} \times \vec{p} = 0$  poiché  $\vec{v}$  è parallelo a  $\vec{p}$ , e infine che  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$  la risultante delle forze agenti sul punto materiale, si ottiene:

$$\frac{d\vec{\ell}_o}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_o$$

La derivata del momento della quantità di moto rispetto al polo  $O$  è uguale al momento della risultante delle forze

applicate valutato sempre rispetto allo stesso polo O:

$$\frac{d\vec{l}_o}{dt} = \vec{M}_o$$

Per un punto materiale, l'equazione trovata è perfettamente equivalente alla seconda legge della dinamica: infatti l'abbiamo ricavata partendo proprio da questa legge. Ovviamente, in alcune situazioni particolari, ci permette di comprendere più facilmente certe caratteristiche del moto del punto materiale.

### **Forze centrali.**

Si definisce *forza centrale* una forza agente in una certa regione dello spazio con le seguenti proprietà: qualunque sia la posizione del punto materiale P che subisce la forza, la direzione della forza agente su P passa sempre per un punto fisso, detto *centro della forza centrale*, e il suo modulo è funzione soltanto della distanza del punto materiale P dal centro stesso.

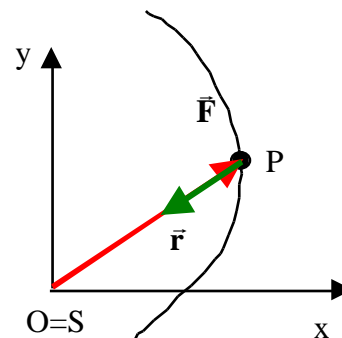
Un esempio di forza centrale è la forza gravitazionale.

Consideriamo un sistema di riferimento con origine nel centro della forza gravitazionale, per esempio nel Sole nel caso del moto di un pianeta del sistema solare, allora la forza di interazione gravitazionale agente sul pianeta, qualunque sia la posizione del pianeta, è sempre diretta verso l'origine del sistema di riferimento ed è data da:

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \vec{u}_r = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

con  $m$  la massa del pianeta,  $M$  la massa del sole,  $G$  la costante di gravitazione universale ed  $r$ , la distanza tra il sole ed il pianeta, coincidente con il modulo del vettore posizione  $\vec{r}$  del pianeta rispetto al sole.

Altro esempio di forza centrale è la forza di Coulomb, che come abbiamo già detto ha una legge molto simile a quella della forza di gravitazione universale.



Anche la forza elastica è una forza centrale.

Il momento della forza centrale rispetto al centro della forza è uguale a zero

$$\vec{M}_o = 0$$

dalla definizione di prodotto vettoriale tenendo conto che il vettore posizione  $\vec{r}$  e la forza centrale  $\vec{F}$  sono antiparalleli.

Se il sistema di riferimento con origine nel centro della forza è un sistema di riferimento inerziale, in cui cioè vale la seconda legge di Newton, e quindi quanto da essa è stato derivato, ossia  $\frac{d\vec{\ell}_o}{dt} = \vec{M}_o$ , si ottiene che

$$\frac{d\vec{\ell}_o}{dt} = 0 \quad \vec{\ell}_o = \text{costante}$$

il momento della quantità di moto valutato rispetto al centro della forza è costante (vettorialmente). Questo significa che è costante sia la sua direzione, sia il suo verso, sia il suo modulo.

Quali sono le conseguenze di questo fatto.

– Direzione costante:

Il vettore momento della quantità di moto, in base alla sua definizione  $\vec{\ell}_o = \vec{r} \times m\vec{v}$ , essendo il prodotto vettoriale del vettore posizione  $\vec{r}$  e della quantità di moto  $\vec{p} = m\vec{v}$ , è perpendicolare al piano definito dai vettori  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$ . Affinché la direzione di  $\vec{\ell}_o$  rimanga costante, tenendo anche conto che  $\vec{r}$  deve necessariamente partire dall'origine, occorre che il piano definito dai vettori  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$  sia sempre lo stesso, indipendente dal tempo. Questo vuol dire che il punto P, che in pratica coincide con il secondo estremo del vettore  $\vec{r}$ , deve sempre trovarsi nello stesso piano.

Dunque la traiettoria del punto P è una traiettoria piana.

Possiamo concludere che in un campo di forze centrali un punto materiale percorre una traiettoria piana.

– Verso costante

Il fatto che il verso del vettore momento della quantità di moto deve rimanere costante, vuol dire che il

verso (orario o antiorario) con cui viene percorsa la traiettoria risulta sempre lo stesso, il corpo non invertirà mai il moto sulla traiettoria.

– Modulo costante

Vogliamo mostrare che il fatto che il modulo del vettore momento della quantità di moto debba rimanere costante, significa che il corpo si muove sotto l'azione della forza centrale in maniera che sia costante la velocità areale.

Per velocità areale si intende l'area spazzata nell'unità di tempo dal segmento che congiunge il centro della forza centrale con il punto materiale P.

Occorre determinare l'espressione della velocità areale e confrontarla con quella del modulo del momento della quantità di moto.

Facendo riferimento alla figura, l'area  $A$  spazzata nell'intervallo di tempo  $t$  dal segmento che connette il centro della forza con il punto materiale P, è all'incirca uguale all'area del rettangolo avente per lati i vettori  $\vec{r}(t)$ ,  $\vec{r}$  e  $\vec{r}(t + \Delta t)$ . L'eguaglianza diventa perfetta per  $\Delta t$  che tende a zero.

L'area del triangolo per definizione è data dal prodotto della base per l'altezza diviso per due. L'altezza  $h$  del triangolo, corrispondente alla componente trasversa, cioè perpendicolare al vettore  $\vec{r}(t)$ , del vettore  $\vec{r}$ , può essere ottenuta come:

$$h = r(t + \Delta t) \sin(\Delta \theta)$$

Per cui l'area  $A$  varrà:

$$A = \frac{1}{2} r(t)h = \frac{1}{2} r(t)r(t + \Delta t) \sin(\Delta \theta)$$

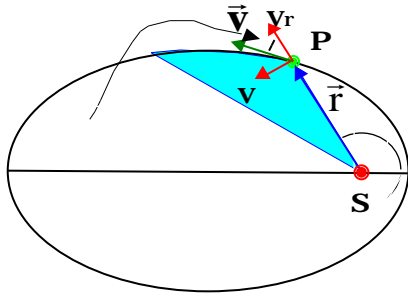
in cui  $r(t)$  è il modulo di  $\vec{r}(t)$ ,  $r(t + \Delta t)$  è il modulo di  $\vec{r}(t + \Delta t)$ .

La velocità areale si ottiene dividendo per l'intervallo di tempo e facendo il limite per  $\Delta t$  che tende a zero.

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} r(t)r(t + \Delta t) \frac{\sin(\Delta \theta)}{\Delta t}$$

Quando  $\Delta t$  tende a zero

- $r(t+\Delta t)$  tende a  $r(t)$
- $\Delta t$  tende a zero e quindi  $\sin(\Delta\theta)$  si può approssimare con



Pertanto:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r(t) \dot{r}(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

dove  $\dot{\theta}$  è la velocità angolare con cui il punto P si muove sulla sua traiettoria.

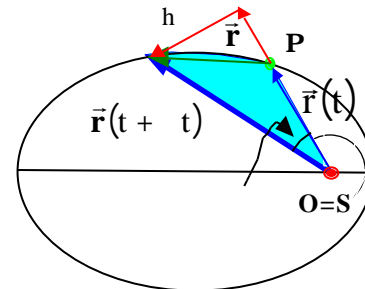
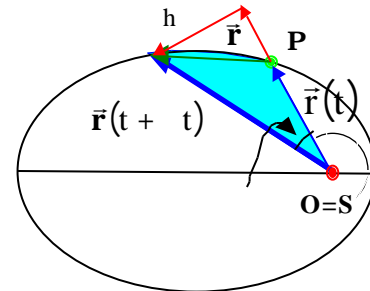
Calcoliamo ora il modulo del momento della quantità di moto rispetto al centro della forza  $\ell_o = r p \sin \alpha = r m v \sin \alpha$

in cui  $\alpha$  è l'angolo tra il vettore posizione  $\vec{r}$  e il vettore

velocità  $\vec{v}$ . Dalla figura si vede come  $v \sin \alpha = v_t$  la componente trasversa della velocità. Nel caso del moto circolare, quando cioè la velocità ha solo la componente trasversa, abbiamo già ricavato che  $v = r \dot{\theta}$ , espressione che possiamo estendere anche a questo caso. Possiamo però anche valutarla facendo ricorso alla definizione di velocità, cioè calcolando il limite per  $\Delta t$  della componente trasversa di  $\vec{r}$ , il cui modulo è stato chiamato  $h$  nella figura precedente, divisa per  $\Delta t$ . In altri termini:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t+\Delta t) \sin(\Delta\theta)}{\Delta t}$$

Osservando come nel caso precedente possiamo osservare che per  $\Delta t$  che tende a zero



- $r(t+\Delta t)$  tende a  $r(t)$
- $\Delta t$  tende a zero e quindi  $\sin(\Delta t)$  si può approssimare con  $\Delta t$  e pertanto:

$$v = r(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \dot{\theta} r$$

In definitiva  $\ell_o = rmv = r m r \dot{\theta} = m r^2 \dot{\theta}$ .

Confrontando l'espressione della velocità areale con quella del modulo del momento della quantità di moto si ottiene

$$\ell_o = m r^2 \dot{\theta} \quad \frac{dA}{dt} = \frac{\ell_o}{2m}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

In conclusione, il fatto che nel caso di forze centrali il modulo del momento della quantità di moto calcolato rispetto al centro della forza debba essere costante implica che il moto del punto materiale debba avvenire in modo che la velocità areale sia costante.

### **Derivazione delle leggi Keplero dalla 2<sup>nd</sup> legge della dinamica.**

La legge della gravitazione universale costituisce uno dei più grandi successi della meccanica newtoniana: la precisione con cui riesce a predire la posizione dei pianeti nel loro moto attorno al sole ha, per esempio, consentito la scoperta degli ultimi due pianeti del sistema solare.

Il fatto che una teoria riesca a predire l'esistenza di qualcosa precedentemente non nota è un'indicazione forte della bontà della teoria stessa.

Prima della formulazione della meccanica newtoniana e dell'introduzione della forza di gravitazione universale, il moto dei pianeti veniva descritto mediante tre semplici leggi empiriche determinate da Keplero studiando il moto del pianeta Marte rispetto al Sole.

Le leggi di Keplero affermano che:



1. Le orbite dei pianeti sono delle ellissi. Il sole occupa uno dei fuochi.
2. Il segmento che congiunge il pianeta con il sole, spazza aree uguali in tempi uguali: in altre parole la *velocità areale* (l'area spazzata nell'unità di tempo), è costante.
3. Il quadrato del tempo di rivoluzione ( $T^2$ ), è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'ellisse ( $a^3$ ). La costante di proporzionalità è la stessa per tutti i pianeti del sistema solare.

Sebbene queste tre leggi fornivano una descrizione abbastanza accurata del moto dei pianeti, esse non erano in grado di spiegare perché il moto dei pianeti dovesse essere di un certo tipo, né spiegare come mai le stesse leggi potessero essere estese anche al sistema dei satelliti di Giove.

La meccanica newtoniana fornisce gli strumenti per comprendere il moto dei pianeti, anzi consente addirittura di legare il moto dei pianeti a fenomeni che avvengono sulla terra, come per esempio la caduta dei gravi sotto l'azione della forza peso. E' possibile infatti mostrare che le leggi di Keplero possono essere dedotte dalle leggi della dinamica solo ipotizzando che la forza di interazione tra il sole e i pianeti sia la forza di gravitazione universale introdotta da Newton.

Supponiamo di usare un sistema di riferimento legato al sole per studiare il moto del pianeta. In questo sistema di riferimento la forza di gravitazione universale agente sul pianeta è sempre diretta verso il sole, inoltre la sua intensità dipende solo dalla distanza dal sole. Essa quindi è una forza centrale. Se quindi il sistema di riferimento legato al sole fosse inerziale, si potrebbero applicare le considerazioni svolte nel paragrafo precedente e concludere che, a causa delle proprietà delle forze centrali, la traiettoria del pianeta deve essere piana e il pianeta si deve muovere in modo che la velocità areale sia costante.

Avremmo così giustificato le prime due leggi di Keplero. In realtà la prima non completamente, essa richiede infatti che le traiettorie dei pianeti siano ellittiche, ma sicuramente abbiamo colto una caratteristica importante della traiettoria e cioè il fatto che è piana.

Sempre nella ipotesi che il sistema di riferimento legato al sole sia inerziale (daremo poi una giustificazione del fatto che è una buona approssimazione di un riferimento inerziale), cerchiamo di derivare la terza legge di Keplero assumendo, per semplificare il problema, che le orbite dei pianeti attorno al sole siano circolari anziché ellittiche. Questa semplificazione trova una sua giustificazione nel fatto che, per la maggior parte dei pianeti, il semiasse

maggiore e quello minore dell'orbita ellittica differiscono per molto poco.

Se l'orbita del pianeta attorno al sole è circolare, la forza agente sul pianeta, cioè la forza di gravitazione universale, essendo diretta lungo il raggio, non ha componenti tangenziali. Di conseguenza anche l'accelerazione tangenziale è nulla e quindi il modulo della velocità è costante. Il moto del pianeta è circolare uniforme.

Alla stessa conclusione si arriva osservando che dovendo essere la velocità areale costante, poiché il modulo del vettore posizione è costante per una traiettoria circolare, allora anche la velocità angolare è costante.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \quad r = \text{cost} \\ = \text{cost}$$

Il moto circolare uniforme è caratterizzato da una accelerazione centripeta  $a_n = \frac{v^2}{r}$ . La forza agente sul pianeta, la forza di gravitazione universale, deve quindi essere l'origine di tale accelerazione centripeta.

$$F_G = m a_n \quad G \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

da cui si ricava che  $v^2 = \frac{GM}{r}$ . D'altra parte se il moto del pianeta è circolare uniforme, il periodo di rivoluzione  $T$ , ossia il tempo per compiere un giro attorno al Sole, sarà dato dalla lunghezza della circonferenza diviso per il modulo, costante, della velocità:

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Elevando al quadrato e sostituendo il valore della velocità determinato precedentemente si ottiene:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{v^2} = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

da cui si vede che il quadrato del periodo di rivoluzione è proporzionale al cubo del raggio della traiettoria circolare. La costante di proporzionalità dipende dalla massa del sole per il sistema solare.

Risulta così verificata la terza legge di Keplero.

### **Studio del moto relativo.**

Nel paragrafo precedente abbiamo studiato il moto di un pianeta supponendo che il sistema di riferimento legato al sole fosse un sistema di riferimento inerziale. Vogliamo in questo paragrafo giustificare questa assunzione.

Ricordiamo un attimo quanto è stato fatto: abbiamo studiato il moto del pianeta di massa  $m$  supponendo che il Sole, di massa  $M$ , fosse fermo nell'origine del sistema di riferimento inerziale. La forza agente sul pianeta era la forza di gravitazione universale:

$$\vec{\mathbf{F}} = -G \frac{mM}{r^2} \vec{\mathbf{u}}_r$$

Abbiamo cioè studiato la seguente equazione:

$$m\vec{\mathbf{a}} = -G \frac{mM}{r^2} \vec{\mathbf{u}}_r \quad m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -G \frac{mM}{r^2} \vec{\mathbf{u}}_r \quad (1)$$

Naturalmente è facile convincersi che il sistema di riferimento usato, quello legato al Sole, non è un sistema di riferimento perfettamente inerziale.

Se ci mettiamo in un sistema inerziale, per esempio quello delle stelle fisse, sappiamo, dalla terza legge di Newton, che se il Sole esercita sul pianeta la forza di gravitazione universale, allora anche il pianeta eserciterà sul Sole una forza uguale e contraria. A causa di questa forza è lecito aspettarsi che il Sole subisca una accelerazione. Di conseguenza il suo moto, visto dal sistema di riferimento inerziale, non potrà essere rettilineo uniforme. Di conseguenza il sistema di riferimento legato al Sole non si muoverà di moto traslatorio uniforme rispetto al sistema di riferimento inerziale e quindi non potrà essere inerziale.

Come va impostato correttamente lo studio del moto in questi casi?

Supponiamo di avere due corpi, il primo di massa  $M$  e il secondo di massa  $m$ , che interagiscono solo tra di essi, non hanno nessun'altra interazione con il resto dell'universo. Chiameremo  $\vec{\mathbf{F}}_{12}$  la forza agente sul corpo 1 dovuta

al corpo 2 ed  $\bar{\mathbf{F}}_{21}$  la forza agente sul corpo 2 generata dal corpo 1. La terza legge di Newton ci dice che  $\bar{\mathbf{F}}_{12} = -\bar{\mathbf{F}}_{21}$ . In un sistema di riferimento inerziale, indicheremo con  $\bar{\mathbf{r}}_1$  il vettore posizione del corpo 1 e con  $\bar{\mathbf{r}}_2$  quello del corpo 2, invece con  $\bar{\mathbf{r}}_{21}$  indicheremo la posizione del corpo 2 rispetto al corpo 1. Dalla figura risulta che  $\bar{\mathbf{r}}_{21} = \bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{r}}_1$ . La seconda legge di Newton applicata ai due corpi ci da:

$$\begin{aligned} M\mathbf{a}_1 &= \bar{\mathbf{F}}_{12} & M \frac{d^2\bar{\mathbf{r}}_1}{dt^2} &= \bar{\mathbf{F}}_{12} \\ m\mathbf{a}_2 &= \bar{\mathbf{F}}_{21} & m \frac{d^2\bar{\mathbf{r}}_2}{dt^2} &= \bar{\mathbf{F}}_{21} \end{aligned}$$

Dividendo la prima delle due equazioni per M e la seconda per m e poi sottraendo la seconda dalla prima si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{\mathbf{r}}_1}{dt^2} &= \frac{\bar{\mathbf{F}}_{12}}{M} & \frac{d^2\bar{\mathbf{r}}_2}{dt^2} - \frac{d^2\bar{\mathbf{r}}_1}{dt^2} &= \frac{\bar{\mathbf{F}}_{21}}{m} - \frac{\bar{\mathbf{F}}_{12}}{M} \\ \frac{d^2\bar{\mathbf{r}}_2}{dt^2} &= \frac{\bar{\mathbf{F}}_{21}}{m} \end{aligned}$$

Sfruttando la proprietà distributiva rispetto alla somma della derivata e la relazione tra le forze agenti sui corpi m e M, cioè  $\bar{\mathbf{F}}_{12} = -\bar{\mathbf{F}}_{21}$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{r}}_1)}{dt^2} &= \frac{\bar{\mathbf{F}}_{21}}{m} + \frac{\bar{\mathbf{F}}_{21}}{M} & \frac{d^2\bar{\mathbf{r}}_{21}}{dt^2} &= \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \bar{\mathbf{F}}_{21} \\ \frac{d^2\bar{\mathbf{r}}_{21}}{dt^2} &= \frac{M+m}{mM} \bar{\mathbf{F}}_{21} & \frac{mM}{M+m} \frac{d^2\bar{\mathbf{r}}_{21}}{dt^2} &= \bar{\mathbf{F}}_{21} \end{aligned}$$

Il cui significato è il seguente: il moto relativo del corpo di massa m, su cui agisce la forza  $\bar{\mathbf{F}}_{21}$ , rispetto a quello di massa M è equivalente a quello di un punto materiale di massa pari a  $\frac{mM}{M+m}$  su cui agisce la stessa forza  $\bar{\mathbf{F}}_{21}$ .

La quantità  $\mu = \frac{mM}{M+m}$  si chiama massa ridotta. Essa è più piccola sia di  $m$  che di  $M$ . Infatti si può scrivere

$$\mu = m \frac{M}{M+m} = M \frac{m}{M+m} \text{ ed osservare che i coefficienti di } m \text{ ed } M \text{ sono entrambi più piccoli di } 1.$$

Nel caso in cui le due masse sono eguali,  $m=M$ , la massa ridotta è pari a:

$$\mu = \frac{mM}{M+m} \quad m = M \quad \mu = \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2}$$

In conclusione per studiare il moto della Terra rispetto al Sole posso usare l'equazione (1) purché sostituisco al posto della massa della Terra  $m$  la massa ridotta  $\mu = \frac{mM}{M+m}$ .

Considerando però i valori delle masse del Sole e della Terra, mi accorgo che l'aver approssimato la massa ridotta con quella della Terra è perfettamente plausibile.

$$\begin{array}{l} \text{massa del Sole } M = 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg} \\ \text{massa della Terra } m = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \end{array} \quad \mu = m \frac{M}{M+m} \approx m \frac{M}{M} = m$$

L'equazione del moto corretta, quella con la massa ridotta per intenderci, sulla base dell'ultima osservazione, è confondibile con quella da noi risolta supponendo che il sistema di riferimento con origine nel Sole fosse inerziale. Restano quindi giustificate tutto quanto è stato dedotto nel paragrafo precedente.

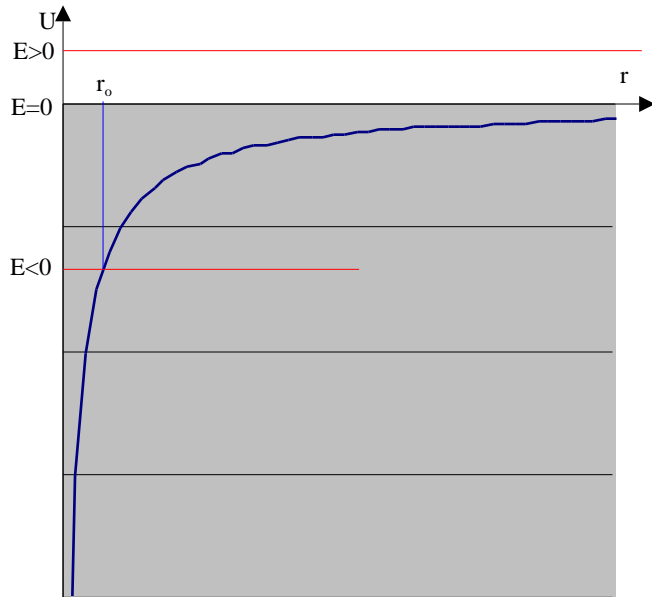
### **Diagramma dell'energia della forza gravitazionale.**

La forza di gravitazione universale, così come tutte le forze centrali, è una forza conservativa. L'espressione della sua energia potenziale è:

$$U(r) = -G \frac{mM}{r}$$

in cui  $r$  rappresenta la distanza del pianeta  $m$  dal sole  $M$ . Questa espressione si ottiene assegnando, arbitrariamente, energia potenziale zero ad un pianeta che si trova a distanza infinita dal centro di attrazione

gravitazionale. Come si può desumere dalla sua espressione, l'energia potenziale è sempre negativa per tutti i valori di  $r$  tra zero ed infinito. Tende a  $-\infty$  per  $r$  che tende a zero e tende a zero per  $r$  che tende ad infinito. L'andamento dell'energia potenziale della forza di gravitazione universale in funzione della distanza del pianeta dal centro di attrazione gravitazionale è mostrato in figura.



La curva è una iperbole.

Si osserva che quando un pianeta si muove sotto l'azione di questa forza se la sua energia meccanica totale è minore di zero allora c'è un punto di inversione del moto, cioè un punto in cui la curva dell'energia potenziale interseca la retta che rappresenta l'energia meccanica totale (costante) del pianeta. Se chiamiamo  $r_0$  la distanza del pianeta in cui si realizza la condizione  $E=U$ , allora dal diagramma dell'energia si vede che sono permessi tutti i valori di  $0 < r < r_0$  (solo per questi valori di  $r$  l'energia cinetica è positiva). I pianeti, che sono legati al centro di attrazione gravitazionale, hanno un'energia meccanica totale negativa.

Il valore di  $r_0$  in cui si realizza la condizione  $E=U$  aumenta all'aumentare dell'energia meccanica totale fino a diventare infinito per  $E=0$ .

Infatti quando  $E=0$ , non ci sono più intersezioni tra la retta che rappresenta l'energia meccanica totale e la curva dell'energia potenziale, quindi in questo caso non ci sono punti di inversione del moto, il corpo può quindi

allontanarsi dal centro di attrazione fino a raggiungere una distanza infinita, può cioè sfuggire al centro di attrazione. Naturalmente l'energia cinetica quando il corpo si porta ad una distanza infinita dal centro di attrazione sarà nulla e tale sarà anche la sua velocità.

Anche quando l'energia meccanica totale è maggiore di zero non ci sono intersezioni tra la retta che rappresenta l'energia meccanica totale e la curva dell'energia potenziale, significa che non ci sono punti di inversione. Quindi anche in questo caso il corpo può portarsi a distanza infinita dal centro di attrazione. Anzi in questo caso quando raggiunge la distanza infinita avrà ancora un residuo di energia cinetica e quindi la sua velocità non sarà nulla.

### **Velocità di fuga.**

Dato un centro di forza gravitazionale, per esempio la terra, qual è la più piccola velocità che deve avere un corpo per sfuggire alla sua attrazione? In altre parole qual è la minima velocità che deve avere un corpo per portarsi ad una distanza infinita dalla terra?

Dallo studio del diagramma dell'energia della forza gravitazionale abbiamo visto che la distanza infinita dal centro di forza gravitazionale può essere raggiunta se l'energia meccanica totale  $E$  è maggiore o uguale a zero. La minima velocità corrisponde ad energia totale nulla.

Un corpo che si trova sulla superficie terrestre ha una energia potenziale pari a:

$$U = -\frac{GmM_T}{R_T}$$

Indicando con  $v$  il modulo della sua velocità, la sua energia meccanica totale è data da:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_T}{R_T}$$

Imponendo che l'energia meccanica totale  $E$  sia uguale a zero, ricaviamo la velocità di fuga:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GmM_T}{R_T} = 0 \quad v_f = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

Ricordando che il peso di un corpo è all'incirca uguale alla forza gravitazionale esercitata dalla Terra su di esso, si ottiene:

$$mg = \frac{GmM_T}{R_T^2} \quad v_f = \sqrt{2gR_T} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 6.37 \cdot 10^6} = \sqrt{125.0 \cdot 10^6} = 11.2 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Se una particella viene lanciata con una velocità uguale alla velocità di fuga, raggiungerà l'infinito con velocità nulla; se viene lanciata con velocità maggiore della velocità di fuga, raggiungerà l'infinito con velocità diversa da zero; se infine viene lanciata con una velocità minore della velocità di fuga, ritornerà sulla terra, a meno che,

quando essa si trova a una certa distanza dalla terra, la direzione della velocità non venga cambiata e in tal caso il corpo entrerà in un'orbita chiusa.



# Sistemi di particelle.

Nelle precedenti lezioni ci siamo occupati di determinare le equazioni del moto di un punto materiale soggetto all'azione di alcune forze.

Ricordiamo che per punto materiale si intende un punto geometrico, quindi con dimensioni nulle, dotato di massa. Non sempre è possibile approssimare i corpi reali con un punto materiale. Nel caso di un corpo che ruota attorno ad un asse fisso, per esempio, approssimare il corpo con un punto materiale, cioè annullare le sue dimensioni, significa anche annullare il moto: non si può parlare di un punto che ruota su se stesso.

Bisogna perciò estendere i risultati ottenuti nello studio del moto di un punto materiale, anche al caso di sistemi più complessi.

Un corpo comunque complesso può essere sempre scomposto in tante parti ognuna delle quali sufficientemente piccola da poter essere assimilata ad un punto materiale. Possiamo immaginarlo cioè come un insieme di punti materiali. Studiare il suo comportamento significa studiare il comportamento di un sistema di punti materiali.

Consideriamo, dunque, un sistema costituito da  $n$  punti materiali (o particelle). Dobbiamo immaginare una superficie ideale chiusa che racchiuda tutti gli  $n$  punti materiali facenti parte del sistema e li isoli dall'ambiente esterno, cioè da tutti gli altri punti materiali presenti nell'universo ma che non fanno parte del sistema. Supponiamo inoltre di essere in grado di riconoscere ciascun punto del sistema di punti materiali e di etichettare ciascuno di essi con un numero da 1 a  $n$ .

Indicheremo quindi con  $m_i$  la massa dell' $i$ -esimo punto materiale, con  $\vec{r}_i$  la sua posizione, con  $\vec{a}_i = \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$  la sua accelerazione e con  $\vec{R}_i$  la risultante delle forze agenti su di esso.

Per descrivere il comportamento del sistema di punti materiali possiamo pensare di scrivere la seconda legge della dinamica per ciascuno dei punti del sistema.

$$\begin{array}{l}
m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \bar{\mathbf{R}}_1 \\
m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \bar{\mathbf{R}}_2 \\
\dots\dots\dots \\
m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \bar{\mathbf{R}}_i \\
\dots\dots\dots \\
m_n \frac{d^2 \mathbf{r}_n}{dt^2} = \bar{\mathbf{R}}_n
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{a}_i \\
\bar{\mathbf{R}}_i = \text{risultante delle forze agenti} \\
\text{sulla particella } i
\end{array}$$

Otteniamo così un sistema di n equazioni differenziali vettoriali (corrispondenti a 3n equazioni scalari). Risolvendo questo sistema di equazioni differenziali è possibile risalire alle leggi orarie di ciascun punto materiale e, quindi, descrivere l'evoluzione del sistema.

Ma tale sistema di equazioni differenziali è piuttosto complicato da risolvere, anche per via numerica, soprattutto quando il numero di particelle che costituiscono il sistema diventa grande.

Se le cose diventano così complicate, occorre semplificare il problema rinunciando ad una descrizione dettagliata dell'evoluzione del sistema ed accontentarsi di una descrizione più grossolana, ma in grado comunque di fornire un gran numero di informazioni sul moto del sistema nel suo insieme.

### **Centro di massa di un sistema di punti materiali**

Dato un sistema di n punti materiali che supponiamo di aver etichettato con un numeri da 1 a n. Indichiamo con  $m_i$  la massa dell'i-esimo punto materiale, con  $\mathbf{r}_i$  il suo vettore posizione, con  $\bar{\mathbf{v}}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$  la sua velocità e con  $\bar{\mathbf{a}}_i = \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2}$  la sua accelerazione.

Si definisce *centro di massa* del sistema di punti materiali il punto individuato dal seguente vettore posizione:

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{\mathbf{r}}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

In cui con il simbolo di sommatoria  $\sum_{i=1}^n m_i \vec{\mathbf{r}}_i$  si indica la seguente somma  $m_1 \vec{\mathbf{r}}_1 + m_2 \vec{\mathbf{r}}_2 + \dots + m_1 \vec{\mathbf{r}}_1 + \dots + m_n \vec{\mathbf{r}}_n$  e naturalmente con il simbolo  $\sum_{i=1}^n m_i$  si indica la seguente somma  $m_1 + m_2 + \dots + m_1 + \dots + m_n = M$  uguale alla massa totale del sistema.

Naturalmente si possono calcolare le componenti cartesiane del vettore  $\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}}$  che corrispondono alle coordinate cartesiane del centro di massa  $x_{\text{CM}}, y_{\text{CM}}, z_{\text{CM}}$ .

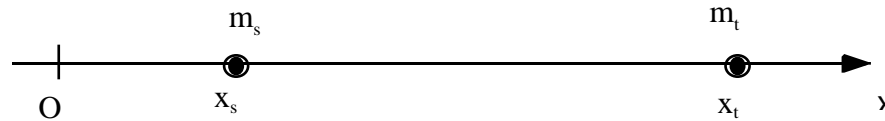
Ricordando dall'algebra vettoriale che la componente x del vettore somma si ottiene sommando tutte le componenti x dei vettori addendi, si ottiene:

$$\begin{aligned} \text{ponendo } M &= \sum_{i=1}^n m_i & x_{\text{CM}} &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M} \\ & & y_{\text{CM}} &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M} \\ \vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{\mathbf{r}}_i}{M} & z_{\text{CM}} &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{M} \end{aligned}$$

### Centro di massa del sistema Terra-Sole.

Introduciamo un sistema di riferimento con l'asse x passante per il centro del Sole e per il centro della Terra. Sia  $x_s$  la posizione del Sole e  $x_t$  quella della Terra e supponiamo che  $x_t > x_s$ . La distanza Terra-Sole è data da  $d_{ts} =$

$$x_t - x_s.$$



Il centro di massa del sistema terra sole si troverà sull'asse delle  $x$ , cioè sulla retta congiungente il sole con la terra: infatti le coordinate  $y$  e  $z$  sia della terra che del sole sono nulle, e tali devono anche essere, in base alle definizioni, le coordinate  $y$  e  $z$  del centro di massa.

La coordinata  $x$  del centro di massa è invece data da:

$$x_{CM} = \frac{m_s x_s + m_t x_t}{m_s + m_t} \quad \text{dove} \quad d_{ts} = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$m_s = 2 \cdot 10^{30} \text{ Kg}; \quad m_t = 6 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$$

La distanza del centro di massa dal centro del sole vale quindi:

$$d_{CM-S} = x_{CM} - x_S = \frac{m_S x_S + m_T x_T}{m_S + m_T} - x_S = \frac{m_S x_S + m_T x_T - m_S x_S - m_T x_S}{m_S + m_T} = \frac{m_T (x_T - x_S)}{m_S + m_T} = \frac{m_T}{m_S + m_T} d_{T-S}$$

Cioè:

$$d_{CM-S} = \frac{m_T}{m_S + m_T} d_{T-S}$$

Scambiando l'indice S con l'indice T, si ottiene anche che:

$$d_{CM-T} = \frac{m_S}{m_S + m_T} d_{T-S}$$

Da cui:

$$\frac{d_{\text{CM-S}}}{d_{\text{CM-T}}} = \frac{m_T}{m_S}$$

Le distanze del centro di massa dai due punti materiali sono inversamente proporzionali alle masse. Sostituendo i valori, si ottiene:

$$d_{\text{CM-S}} = \frac{6 \times 10^{24}}{2 \times 10^{30} + 6 \times 10^{24}} 1.5 \times 10^{11} = 4.5 \times 10^5 \text{ m}$$

Il centro di massa del sistema terra sole, si trova cioè solo a 450 Km dal centro del sole. Poiché questa distanza è piccola rispetto alla distanza media terra-sole, spesso viene trascurata e si assume che il centro di massa del sistema terra-sole coincida con il centro del sole.

### **Velocità ed accelerazione del centro di massa**

Se i punti che costituiscono il sistema si muovono e quindi i loro vettori posizione cambiano nel tempo, è possibile che anche il vettore posizione del centro di massa vari con il tempo. Ci possiamo allora calcolare la velocità del centro di massa utilizzando la definizione di velocità:

$$\underbrace{\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{d\vec{r}_{\text{CM}}}{dt}}_{\text{per definizione}} = \frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{M}}_{\text{perchè } \frac{1}{M} \text{ è costante}} = \frac{1}{M} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{M}}_{\text{perchè la derivata si può distribuire sulla somma e perchè } m_i \text{ è costante}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{M}$$

e la sua accelerazione da:

$$\underbrace{\bar{\mathbf{a}}_{\text{CM}} = \frac{d\mathbf{v}_{\text{CM}}}{dt}}_{\text{per definizione}} = \frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i}{M}}_{\text{perchè } \frac{1}{M} \text{ è costante}} = \frac{1}{M} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}}{M}}_{\text{perchè la derivata si può distribuire sulla somma e perchè } m_i \text{ è costante}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i}{M}$$

Riassumendo:

$$\bar{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{\mathbf{r}}_i}{M}$$

$$x_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M}$$

$$y_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M}$$

$$z_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{M}$$

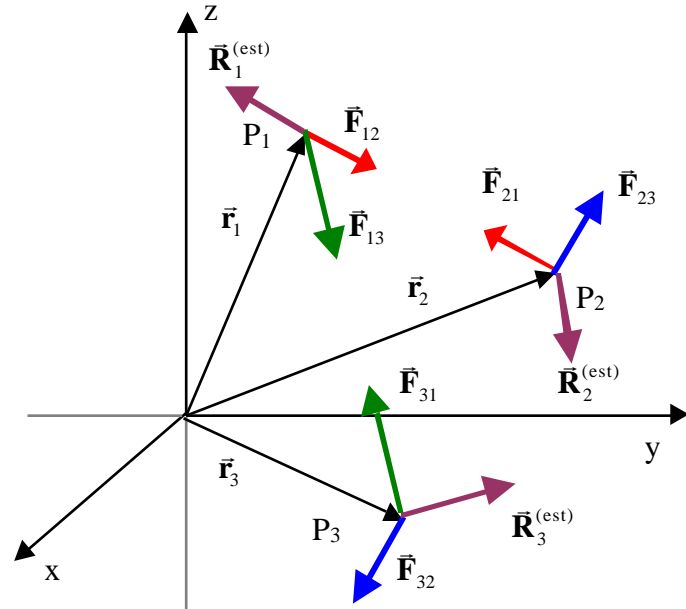
con  $M = \sum_{i=1}^n m_i$

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i}{M}$$

$$v_{x\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i v_{xi}}{M}$$

$$v_{y\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i v_{yi}}{M}$$

$$v_{z\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i v_{zi}}{M}$$



$$\bar{\mathbf{a}}_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{\mathbf{a}}_i}{M}$$

$$a_{x\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i a_{xi}}{M}$$

$$a_{y\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i a_{yi}}{M}$$

$$a_{z\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i a_{zi}}{M}$$

### **Teorema del centro di massa.**

Dall'espressione dell'accelerazione del centro di massa ricavata al paragrafo precedente otteniamo:

$$M\bar{\mathbf{a}}_{\text{CM}} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{\mathbf{a}}_i$$

D'altra parte per ciascuna delle  $n$  particelle che costituiscono il sistema si può scrivere la seconda legge di Newton:

$$m_i \bar{\mathbf{a}}_i = \bar{\mathbf{R}}_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

in cui  $\bar{\mathbf{R}}_i$  rappresenta la risultante di tutte le forze agenti sulla particella  $i$ -esima.

Ora queste forze si possono suddividere in

- a) Forze interne: sono quelle forze originate da altre particelle appartenenti al sistema.

Possiamo indicare con  $\bar{\mathbf{f}}_{ij}$  la forza agente sulla particella  $i$  generata dalla particella  $j$  (naturalmente con  $j$  diverso da  $i$ ). Ovviamente, per la terza legge di Newton, sulla particella  $j$  agirà la forza  $\bar{\mathbf{f}}_{ji}$  generata dalla particella  $i$ : queste due forze, in base alla terza legge di Newton, sono legate dalla relazione  $\bar{\mathbf{f}}_{ij} = -\bar{\mathbf{f}}_{ji}$ .

- Forze esterne: sono quelle forze originate da particelle non facenti parte del sistema.

Dunque possiamo scrivere:

$$\vec{\mathbf{R}}_i = \vec{\mathbf{R}}_i^{(est)} + \sum_{j \neq i} \vec{\mathbf{f}}_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Sostituendo nell'espressione precedente si ottiene:

$$\mathbf{M}\vec{\mathbf{a}}_{CM} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{\mathbf{a}}_i = \sum_{i=1}^n \underbrace{\vec{\mathbf{R}}_i^{(est)} + \sum_{j \neq i} \vec{\mathbf{f}}_{ij}}_{\text{perch\`e in una somma \`e possibile cambiare l'ordine degli addendi}} = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{R}}_i^{(est)} + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \vec{\mathbf{f}}_{ij}$$

In cui  $\sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{R}}_i^{(est)}$  \`e la somma di tutte le forze esterne agenti sui vari punti materiali facenti parte del sistema: essa \`e la

risultante delle forze esterne  $\vec{\mathbf{R}}^{(est)}$ . Mentre  $\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \vec{\mathbf{f}}_{ij}$  rappresenta la somma di tutte le forze interne che possiamo indicare con  $\vec{\mathbf{R}}^{(int)}$ .

Possiamo facilmente dimostrare che  $\vec{\mathbf{R}}^{(int)} = 0$ . Infatti, come abbiamo gi\`a osservato in precedenza le forze interne si presentano a coppia: se nella somma incontriamo la forza  $\vec{\mathbf{f}}_{ij}$ , allora ci sar\`a anche la forza  $\vec{\mathbf{f}}_{ji}$ . Poich\`e  $\vec{\mathbf{f}}_{ij} = -\vec{\mathbf{f}}_{ji}$ , il contributo di questa coppia alla risultante complessiva \`e nullo. La risultante delle forze interne altro non \`e che la somma dei contributi di tutte le coppie di forze presenti, e poich\`e ciascun contributo \`e nullo, anche il valore della risultante \`e nullo.

Consideriamo esplicitamente il caso di  $n=3$

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i} \vec{\mathbf{f}}_{ij} = \underbrace{\vec{\mathbf{f}}_{12} + \vec{\mathbf{f}}_{13}}_{i=1} + \underbrace{\vec{\mathbf{f}}_{21} + \vec{\mathbf{f}}_{23}}_{i=2} + \underbrace{\vec{\mathbf{f}}_{31} + \vec{\mathbf{f}}_{32}}_{i=3} = \underbrace{\vec{\mathbf{f}}_{12} + \vec{\mathbf{f}}_{21}}_{=0} + \underbrace{\vec{\mathbf{f}}_{13} + \vec{\mathbf{f}}_{31}}_{=0} + \underbrace{\vec{\mathbf{f}}_{23} + \vec{\mathbf{f}}_{32}}_{=0} = 0$$

Possiamo perci\`o concludere che:

$$\mathbf{M}\vec{\mathbf{a}}_{CM} = \vec{\mathbf{R}}^{(est)}$$

Questo significa che, durante l'evoluzione del sistema, *il centro di massa si muove come un punto*



*materiale, avente una massa pari alla massa totale del sistema, sottoposto all'azione della risultante delle sole forze esterne agenti sul sistema.*

Supponiamo, allora, di avere un sistema formato da due bocce connesse da una molla (la molla in questo caso schematizza le forze interne al sistema), e di lanciarlo per aria. Il moto di ciascuna delle due bocce sarà complesso, ma se ci limitiamo a considerare il moto del loro centro di massa, questo coinciderà col moto di un punto materiale sottoposto all'azione della risultante delle forze esterne: la forza peso. La traiettoria del centro di massa sarà dunque parabolica.

### **Quantità di moto di un sistema di punti materiali**

La quantità di moto totale di un sistema di punti materiali si ottiene sommando la quantità di moto dei singoli punti. Supponiamo quindi di avere un sistema composto da  $n$  punti materiali, se indichiamo con  $m_i$  e con  $\vec{v}_i$  rispettivamente la massa e la velocità dell' $i$ -esima particella, avremo che la quantità di moto totale del sistema si potrà scrivere:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$$

Ricordando la definizione della velocità del centro di massa, si ottiene:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{M_{tot}} \quad \vec{P} = M_{tot} \vec{v}_{CM}$$

Per quanto riguarda la quantità di moto, il centro di massa è rappresentativo di tutto il sistema, infatti la sua quantità di moto, quando si pensa al centro di massa come un punto materiale avente massa uguale alla massa totale del sistema e che si muove con la velocità del centro di massa, coincide con la quantità di moto totale del sistema.

Il fatto quindi che il centro di massa si sposti in una certa direzione, questo vuol dire che la quantità di moto totale del sistema ha la stessa direzione e quindi il sistema si sta spostando in media in quella direzione.

### **l equazione cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali.**

Utilizzando l'ultima espressione determinata, e tenendo conto del teorema del centro di massa, possiamo valutare

la derivata della quantità di moto totale del sistema di punti materiali:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(M_{\text{tot}} \vec{v}_{\text{CM}})}{dt} = M_{\text{tot}} \frac{d\vec{v}_{\text{CM}}}{dt} = \underbrace{M_{\text{tot}} \vec{a}_{\text{CM}}}_{\text{teorema del centro di massa}} = \vec{R}^{(e)}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{(e)}$$

La variazione della quantità di moto totale di un sistema di punti materiali è uguale alla risultante delle sole forze esterne agenti sul sistema.

Ovviamente la relazione trovata è del tutto equivalente al teorema del centro di massa. Essa è denominata “l’equazione cardinale della dinamica dei sistemi”.

Conseguenza immediata dell’ultima equazione determinata è che se la risultante delle forze esterne agenti sul sistema di particelle è nulla,  $\vec{R}^{(e)} = 0$ , la quantità di moto totale del sistema si conserva. Infatti:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \qquad \vec{P} = \text{costante}$$

Questa relazione esprime il principio di conservazione della quantità di moto: quando la risultante delle forze esterne agenti sul sistema è nulla, la quantità di moto delle singole particelle agenti sul sistema possono variare, ma la quantità di moto totale del sistema rimane costante in modulo, direzione e verso.

Un sistema isolato è un sistema molto lontano da altri corpi e quindi non soggetto a forze esterne: la quantità di moto di un sistema isolato si conserva.

Fu dalla osservazione della conservazione della quantità di moto di un sistema isolato che Newton si convinse della validità della terza legge della dinamica. Il principio di conservazione della quantità di moto, infatti, rappresenta una formulazione alternativa della III legge della dinamica.

Consideriamo un sistema isolato composto da due sole particelle. La quantità di moto  $\vec{P}$  è data da  $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ . Poiché il sistema è isolato,  $\vec{P}$  si conserva. Quindi:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0 \qquad \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \qquad \vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$$

Le quantità di moto delle singole particelle variano a causa delle forze di interazione tra le due particelle: poiché le variazioni di quantità di moto sono uguali ed opposte, anche le forze, che agiscono sulle due particelle, sono uguali ed opposte.

Il principio di conservazione della quantità di moto, che abbiamo ricavato partendo dalla tre leggi della dinamica, è valido anche al di fuori dell'ambito della meccanica classica: esso, infatti, continua a valere anche in fisica atomica e nucleare dove, invece, la meccanica classica non è più valida.

Esso rappresenta la seconda delle leggi di conservazione da noi studiate.

Abbiamo già visto che in presenza di forze conservative l'energia totale di un punto materiale si conserva:

$$E = K + U = \text{costante}$$

Il principio di conservazione della quantità di moto ha una validità più generale di quella del principio di conservazione dell'energia totale: infatti nel derivarlo, non abbiamo fatto alcuna ipotesi sulla natura delle forze interne, che possono essere conservative, ma anche, come spesso accade, non conservative. Inoltre, mentre la conservazione dell'energia si esprime con una relazione scalare, il principio di conservazione della quantità di moto è rappresentato da una relazione vettoriale, che equivale a tre equazioni scalari:

$$\vec{P} = \text{costante} \qquad \begin{aligned} P_x &= \text{costante} \\ P_y &= \text{costante} \\ P_z &= \text{costante} \end{aligned}$$

### **Conservazione parziale della quantità di moto.**

Se il sistema di particelle non è isolato, allora ci saranno delle forze esterne agenti sul sistema e, di conseguenza, può accadere che la risultante delle forze esterne non sia nulla. Allora la quantità di moto del sistema evolverà in accordo alla seguente equazione:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{(e)}$$

Se però qualcuna delle componenti della risultante delle forze esterne è nulla, allora si conserverà la corrispondente componente della quantità di moto. Infatti

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{(e)} \quad \begin{array}{l} \frac{dP_x}{dt} = R_x^{(e)} \\ \frac{dP_y}{dt} = R_y^{(e)} \\ \frac{dP_z}{dt} = R_z^{(e)} \end{array} \quad \begin{array}{l} R_x^{(e)} = 0 \\ R_y^{(e)} = 0 \\ R_z^{(e)} = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} P_x = \text{costante} \\ P_y = \text{costante} \\ P_z = \text{costante} \end{array}$$

Cioè le componenti della quantità di moto possono anche conservarsi separatamente.

### **Commento sui principi di conservazione**

I principi di conservazione, sia dell'energia totale che della quantità di moto, ma anche per quello del momento della quantità di moto che incontreremo tra poco, sono molto importanti in fisica.

Il loro significato è il seguente:

- mentre il sistema evolve, esiste un suo aspetto che si conserva. Questo vale per tutti gli osservatori inerziali. Naturalmente i diversi osservatori inerziali vedono l'evoluzione del sistema in modo completamente differente, tutti però concordano nell'applicare al sistema, che evolve, le stesse leggi di conservazione: essi quindi misurano un valore diverso per la grandezza che si conserva, ma concordano sul fatto che la grandezza si conserva durante il moto del sistema.

### **Energia cinetica di un sistema di particelle. Teorema di König.**

Anche l'energia cinetica di un sistema di punti materiali si ottiene sommando l'energia cinetica dei singoli punti. Supponiamo quindi di avere un sistema composto da  $n$  punti materiali, se indichiamo con  $m_i$  e con  $\vec{v}_i$  rispettivamente la massa e la velocità dell' $i$ -esima particella, avremo che l'energia cinetica totale del sistema si

potrà scrivere:

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Troviamo ora la relazione tra l'energia cinetica totale del sistema di punti materiali e quella del centro di massa quando immaginiamo il centro di massa come un punto materiale di massa pari alla massa totale del sistema e che si muove con la velocità del centro di massa,  $\vec{v}_{CM}$ . Introduciamo ora una seconda terna<sup>1</sup> con origine nel centro di massa ed assi costantemente paralleli a quelli della terna precedente. Indicheremo con un apice le quantità misurate in questo secondo sistema di riferimento. Le velocità della i-esima particella nei due sistemi di riferimento sono legate dalla relazione:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i$$

L'energia cinetica del sistema di particelle è data dalla somma delle rispettive energie cinetiche:

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Utilizzando la relazione tra  $\vec{v}_i$  e  $\vec{v}'_i$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i) \cdot (\vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (v_{CM}^2 + v_i'^2 + 2\vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}'_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}'_i = \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> Il sistema di riferimento così introdotto si chiama "sistema di riferimento del centro di massa": il "sistema di riferimento del centro di massa" ha come origine nel centro di massa del sistema di punti materiali ed assi costantemente paralleli a quelli della terna utilizzata per descrivere il moto dei punti materiali che costituiscono il sistema in osservazione.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i'^2 + \bar{\mathbf{v}}_{CM} \sum_{i=1}^n m_i \bar{\mathbf{v}}_i' = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i'^2 + \bar{\mathbf{v}}_{CM} \underset{=0}{M \bar{\mathbf{v}}_{CM}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i'^2 = \frac{1}{2} M_{tot} v_{CM}^2 + K'
\end{aligned}$$

Dove  $\bar{\mathbf{v}}_{CM}'$  è la velocità del centro di massa rispetto al centro di massa, pertanto essa è nulla.

In conclusione, l'energia cinetica di un sistema di particelle può sempre essere espressa come la somma dell'energia cinetica che spetterebbe al centro di massa,  $\frac{1}{2} M_{tot} v_{CM}^2$ , qualora ad esso fosse assegnata tutta la massa del sistema, e dell'energia cinetica dei punti materiali,  $K'$ , dovuta al loro moto relativo al centro di massa (riferito cioè ad un sistema di riferimento solidale con il centro di massa). Il primo termine corrisponde alla traslazione del sistema con velocità pari a quella del centro di massa, il secondo termine è l'energia cinetica che misurerebbe un osservatore che si muovesse con il centro di massa.

Il centro di massa non è rappresentativo del sistema per quanto riguarda l'energia cinetica, la sua energia cinetica infatti non coincide con l'energia cinetica totale del sistema.

Questo risultato va sotto il nome di I teorema di König.

### ***Estensione del teorema delle forze vive, o dell'energia cinetica, ad un sistema di punti materiali.***

A ciascun punto materiale del sistema possiamo applicare il teorema delle forze vive:

$$K_i = K_i^{fin} - K_i^{iniz} = W_{R_i} = \underbrace{W_{F_i}}_{\substack{\text{somma dei lavori compiuti} \\ \text{da tutte le forze, sia interne che} \\ \text{esterne, agenti sulla particella } i}} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

La variazione dell'energia cinetica della particella  $i$  è data dal lavoro della risultante delle forze agenti sulla particella  $i$ -esima, quindi è uguale alla somma dei lavori fatti sia dalle forze interne che dalle forze esterne agenti sulla particella  $i$ -esima.

Sommando su tutte le particelle si ottiene:

$$\sum_{i=1}^n K_i = \underbrace{\sum_{i=1}^n K_i^{\text{fin}} - \sum_{i=1}^n K_i^{\text{iniz}}}_{K^{\text{fin}} - K^{\text{iniz}} = K} = \sum_{i=1}^n W_{R_i} = \underbrace{\sum_{i=1}^n W_{F_i}}_{\text{somma dei lavori compiuti da tutte le forze, sia interne che esterne, agenti sulle } n \text{ particelle}}$$

La variazione dell'energia cinetica dell'intero sistema  $K$  è data dalla somma dei lavori compiuti da tutte le forze agenti sulle  $n$  particelle che costituiscono il sistema, siano esse interne o esterne.

### Lavoro effettuato dalle forze interne.

Vogliamo mostrare che il lavoro delle forze interne dipende solo dalla variazione delle distanze tra le particelle che costituiscono il sistema, pertanto se le distanze tra le particelle del sistema restano costanti, come accade per nel caso di un corpo rigido, allora il lavoro delle forze interne è nullo.

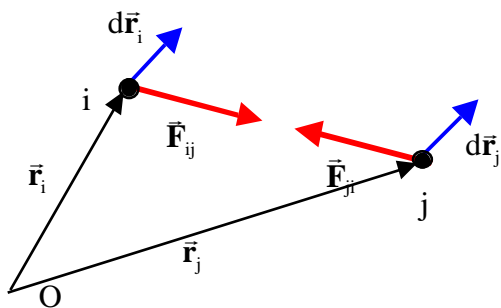
Consideriamo due generiche particelle del sistema, la particella  $i$  e la particella  $j$ . Vogliamo innanzitutto far vedere che se la distanza tra le due particelle non cambia, allora il lavoro delle forze interne è nullo. Esamineremo dapprima due casi particolari per poi generalizzare al caso generale.

I° caso particolare: la distanza tra le due particelle non cambia se le due particelle subiscono lo stesso spostamento

come mostrato in figura in cui è indicato con  $d\vec{r}_i$  lo spostamento infinitesimo subito dalla particella  $i$  e con  $d\vec{r}_j$  quello della particella  $j$ :

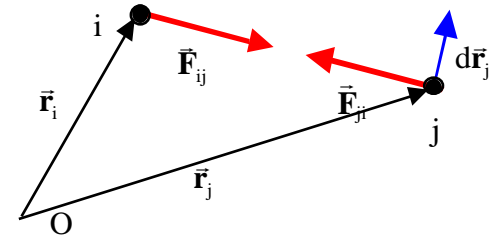
Il lavoro complessivo effettuato dalle due forze interne,  $\vec{F}_{ij}$  ed  $\vec{F}_{ji}$ , è dato da:

$$W_{ij} = \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_j = \underbrace{\vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i - \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i}_{\substack{d\vec{r}_j = d\vec{r}_i \\ \vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}}} = 0$$



Il caso particolare : la distanza rimane costante se una delle due particelle rimane fissa e l'altra si muove lungo una traiettoria circolare con il centro coincidente con la prima.

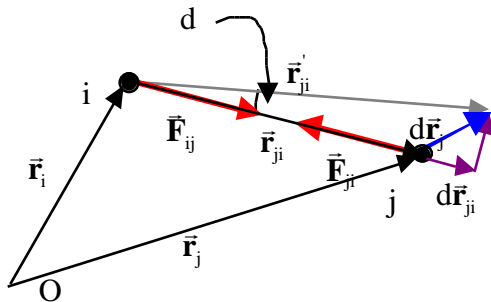
$d\vec{r}_j$ , lo spostamento infinitesimo della particella  $j$ , in questo caso è perpendicolare alla forza  $\vec{F}_{ji}$ : infatti  $d\vec{r}_j$  è tangente alla traiettoria circolare e pertanto perpendicolare al raggio della circonferenza, cioè alla direzione della retta congiungente  $i$  con  $j$ .



$$W_{ij} = \underbrace{\vec{F}_{ij} d\vec{r}_i}_{=0 \text{ perchè } d\vec{r}_i = 0} + \underbrace{\vec{F}_{ji} d\vec{r}_j}_{=0 \text{ perchè } d\vec{r}_j \text{ è perpendicolare a } \vec{F}_{ji}} = 0$$

Generalizzazione: un qualunque spostamento in cui la distanza tra le due particelle non cambia può essere sempre immaginato come la sovrapposizione di una traslazione, le due particelle subiscono lo stesso spostamento, più una rotazione di una particella rispetto all'altra. Resta quindi verificato che se non c'è variazione di distanza tra due particelle il lavoro complessivo delle forze di interazione tra le due particelle,  $\vec{F}_{ij}$  ed  $\vec{F}_{ji}$ , è nullo. Poiché tutte le forze interne si presentano a coppie, segue che se in un sistema di particelle tutte le distanze tra le particelle che lo costituiscono restano costanti il lavoro complessivo fatto dalle forze interne è nullo.

Per verificare che il lavoro delle forze interne dipende dalla variazione delle distanze tra le particelle, consideriamo ancora un caso particolare in cui una delle due particelle sia ferma e l'altra si muove in modo che la loro distanza vari. Questo significa che la traiettoria non può essere una circonferenza con il centro coincidente con la prima particella.



Facendo riferimento alla figura si osservi che la distanza tra le due particelle dopo lo spostamento, coincidente con il modulo del vettore posizione,  $\vec{r}'_{ji}$ , della particella  $j$  rispetto alla particella  $i$  dopo lo spostamento, può essere messa in relazione con la distanza tra le due particelle prima dello spostamento, coincidente con il modulo del vettore posizione prima dello spostamento,  $\vec{r}_{ji}$ . Infatti:



$$r'_{ji} \cos(d) = r_{ji} + dr_{ji} \quad \text{Poiché } d \ll 0 \quad \cos(d) \approx 1 \quad r'_{ji} - r_{ji} = dr_{ji}$$

Risulta quindi che la variazione della distanza tra le due particelle, nel caso di spostamenti infinitesimi, è proprio uguale alla componente dello spostamento lungo la retta passante per le due particelle,  $dr_{ji}$ , e quindi alla variazione della distanza tra le due particelle.

$$W_{ij} = \underbrace{\vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i}_{=0 \text{ perchè } d\vec{r}_i = 0} + \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_j = \underbrace{F_{ij} dr_{ji}}_{F_{ij} = F_{ji}}$$

$dr_{ji}$  = componente dello spostamento nella direzione di  $\vec{F}_{ji}$ , corrisponde alla variazione di lunghezza di  $r_{ji}$   
 Nel caso della figura (forze attrattive) il lavoro è negativo se la distanza tra le particelle aumenta

### **Estensione della legge di conservazione dell'energia meccanica totale ai sistemi di particelle.**

Se tutte le forze, sia interne che esterne, agenti su un sistema di particelle sono conservative allora si può applicare al sistema la conservazione dell'energia meccanica totale. Infatti per ciascuna particelle del sistema si può scrivere:

$$K_i = K_i^{fin} - K_i^{iniz} = W_{R_i} = \underbrace{W_{F_i}}_{\text{somma dei lavori compiuti da tutte le forze, sia interne che esterne, agenti sulla particella } i} = \underbrace{(U_{F_i}^{iniz} - U_{F_i}^{fin})}_{\text{somma dell'opposto della variazione dell'energia potenziale relativa a tutte le forze, sia interne che esterne, agenti sulla particella } i} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Sommando su tutte le particelle si ottiene:

$$\sum_{i=1}^n K_i = \underbrace{\sum_{i=1}^n K_i^{fin} - \sum_{i=1}^n K_i^{iniz}}_{K^{fin} - K^{iniz} = K} = \sum_{i=1}^n W_{R_i} = \underbrace{\sum_{i=1}^n W_{F_i}}_{\text{somma dei lavori compiuti da tutte le forze, sia interne che esterne, agenti sulle } n \text{ particelle}} = \underbrace{\sum_{i=1}^n (U_{F_i}^{iniz} - U_{F_i}^{fin})}_{\text{somma dell'opposto della variazione dell'energia potenziale relativa a tutte le forze, sia interne che esterne, agenti sulle } n \text{ particelle}} = U^{iniz} - U^{fin} = -\Delta U$$

Dove

$$U^{iniz} = \underbrace{\sum_{i=1}^n U_{F_i}^{iniz}}_{\text{somma dell'energia potenziale iniziale relativa a tutte le forze, sia interne che esterne, agenti sulle n particelle}}$$

$$U^{fin} = \underbrace{\sum_{i=1}^n U_{F_i}^{fin}}_{\text{somma dell'energia potenziale finale relativa a tutte le forze, sia interne che esterne, agenti sulle n particelle}}$$

L'energia potenziale dell'intero sistema si ottiene sommando le energie potenziali relative a tutte le forze, interne od esterne, supposte conservative, agenti su ciascuna particella del sistema.

Riprendendo l'equazione precedente, nell'ipotesi che tutte le forze agenti sulle varie particelle del sistema, sia quelle interne che quelle esterne, siano conservative, l'energia meccanica totale si conserva, infatti:

$$K + U = 0$$

$$K = -U$$

$$(K + U) = E = 0$$

Nel caso in cui alcune delle forze presenti, siano esse interne o esterne, sono non conservative, allora:

$$\sum_{i=1}^n K_i = \underbrace{\sum_{i=1}^n K_i^{fin} - \sum_{i=1}^n K_i^{iniz}}_{K^{fin} - K^{iniz} = K} = \underbrace{\sum_{i=1}^n W_{i,con}}_{\text{somma dei lavori compiuti da tutte le forze conservative, sia interne che esterne, agenti sulle n particelle}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n W_{i,non\ con}}_{\text{somma dei lavori compiuti da tutte le forze non conservative sia interne che esterne, agenti sulle n particelle}}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^n (U_{F_i}^{iniz} - U_{F_i}^{fin})}_{\text{somma dell'opposto della variazione dell'energia potenziale relativa a tutte le forze conservative, sia interne che esterne, agenti sulle n particelle}} + \underbrace{W_{nc}}_{\text{somma dei lavori compiuti da tutte le forze non conservative sia interne che esterne, agenti sulle n particelle}} = -U + W_{nc}$$

da cui si ottiene la relazione lavoro-energia che esprime l'estensione della conservazione dell'energia meccanica totale nel caso in cui sono presenti alcune forze non conservative:

$$K + U = W_{nc}$$

$$K = -U + W_{nc}$$

$$(K + U) = E = W_{nc}$$

La variazione dell'energia meccanica totale è uguale al lavoro delle forze non conservative (naturalmente va considerato il lavoro fatto da tutte le forze, sia quelle esterne che quelle interne. Val la pena di ricordare che se le distanze tra le particelle del sistema rimangono costanti, sistema rigido, il lavoro delle forze interne è nullo).

### **Energia potenziale di un sistema di particelle su cui agisce la forza peso.**

Consideriamo un sistema di punti materiali posto sulla superficie terrestre e avente un'estensione limitata, tale da poter considerare costante, all'interno del volume occupato dal sistema, l'accelerazione di gravità  $\vec{g}$ , sia in modulo che in direzione. Vogliamo determinare l'energia potenziale del sistema su cui, a causa dell'interazione con la terra, agisce la forza peso.

Si noti che, poiché la Terra non fa parte del sistema di punti materiali, la forza peso va considerata una forza esterna.

Abbiamo impropriamente parlato di forza peso agente sul sistema, sappiamo infatti che qualunque particella dotata di massa, posta nelle vicinanze della superficie terrestre, è soggetta alla forza peso. Quindi se indichiamo con  $m_i$  la massa dell' $i$ -esima particella del sistema, essa sarà soggetto ad una forza peso pari a

$$\vec{P}_i = m_i \vec{g} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

E l'energia potenziale corrispondente varrà

$$U_i = m_i g h_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

In cui  $h_i$  è la quota a cui si trova l' $i$ -esima particella al di sopra del piano orizzontale a cui (arbitrariamente) è stata assegnata energia potenziale nulla.

Abbiamo imparato nel capitolo precedente che per determinare l'energia potenziale di tutto il sistema dobbiamo sommare su tutte le particelle del sistema. Pertanto:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n m_i g h_i$$

Indicando con  $M$  la massa totale del sistema,  $M = \sum_{i=1}^n m_i$ , e mettendo in evidenza il fattore  $g$  che è comune a tutti gli addendi della sommatoria, si ottiene:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n m_i g h_i = g \sum_{i=1}^n m_i h_i = \underbrace{gM}_{\text{dalla definizione di Centro di Massa, la quota } h_{CM} \text{ sarà}} h_{CM}$$

$g$  compare in tutti i termini della sommatoria e si può mettere in evidenza

data da  $h_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i h_i}{M}$

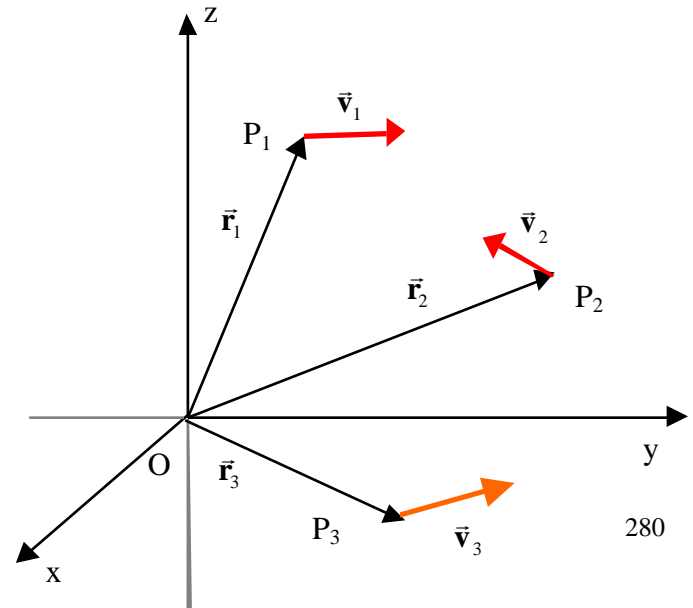
In conclusione:

$$U = Mgh_{CM}$$

L'energia potenziale totale del sistema si otterrà moltiplicando la massa totale del sistema,  $M$ , per l'accelerazione di gravità,  $g$ , per la quota del centro di massa del sistema misurata a partire dal piano orizzontale di riferimento, quello a cui arbitrariamente è stato fatto corrispondere un'energia potenziale nulla.

### **Momento angolare di un sistema di particelle.**

Nel caso del punto materiale, per trattare le forze centrali, abbiamo introdotto, il momento della quantità di moto. Ricordiamo infatti che per una particella di massa  $m$  in moto con velocità  $\vec{v}$ , il momento della quantità di moto rispetto al polo  $O$  coincidente con l'origine del sistema di riferimento si scrive:



$$\vec{l}_O = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Possiamo estendere la definizione del momento della quantità di moto, o momento angolare, ad un sistema di n particelle facendo semplicemente la somma dei momenti delle quantità di moto di ciascuna particelle del sistema, in maniera analoga a quanto è stato fatto per tutte le altre grandezze fin qui incontrate.

Per ciascuna particella del sistema, il momento della quantità di moto rispetto al polo O coincidente con l'origine del sistema di riferimento, si scriverà:

$$\vec{l}_{iO} = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

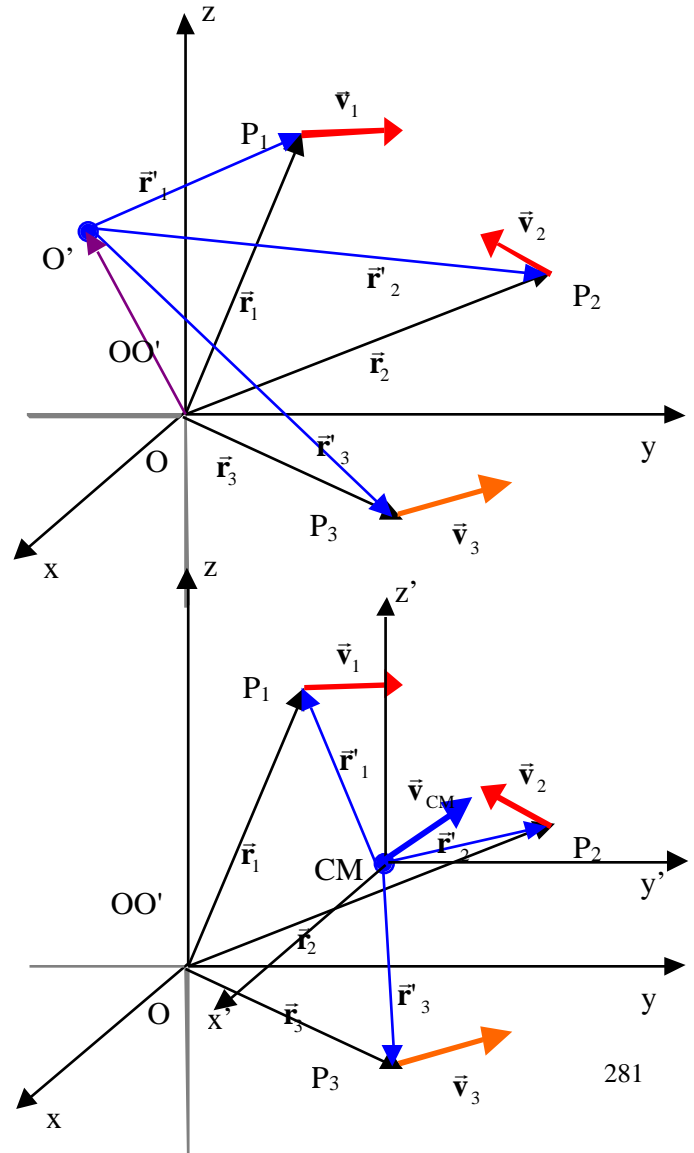
Il momento angolare totale del sistema rispetto al polo O, si otterrà:

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^n \vec{l}_{iO} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

Naturalmente il momento angolare di un sistema può essere calcolato anche rispetto ad un polo diverso dall'origine del sistema di riferimento, in questo caso il vettore posizione da usare sarà quello con origine nel nuovo polo.

$$\vec{L}_{O'} = \sum_{i=1}^n \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_i$$

Osservando che  $\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{OO}'$  si può dedurre la relazione che lega i due momenti, quello relativo al polo O e quello relativo al polo O':



$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{L}}_O &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i + O O' \times m_i \mathbf{v}_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \bar{\mathbf{v}}_i + O O' \times \sum_{i=1}^n m_i \bar{\mathbf{v}}_i = \bar{\mathbf{L}}_{O'} + O O' \times \bar{\mathbf{P}}\end{aligned}$$

Particolarmente interessante è il caso in cui il polo O' coincide con il centro di massa (CM):

$$\bar{\mathbf{L}}_{CM} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \bar{\mathbf{v}}_i$$

In questo caso, infatti, si può dimostrare<sup>2</sup> che il valore del momento angolare è lo stesso se calcolato utilizzando le velocità delle particelle determinate nel sistema di riferimento del Laboratorio,  $\bar{\mathbf{v}}_i$ , che utilizzando i valori delle velocità misurate nel sistema di riferimento del Centro di Massa,  $\bar{\mathbf{v}}'_i$ .

$$\bar{\mathbf{L}}_{CM} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \bar{\mathbf{v}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \bar{\mathbf{v}}'_i = \bar{\mathbf{L}}'_{CM}$$

### Secondo teorema di König.

Anche per quanto riguarda il momento angolare, così come avevamo già visto per l'energia cinetica (teorema di König), il centro di massa non rappresenta completamente il sistema.

Infatti, si può dimostrare il secondo teorema di König il quale afferma:

---

2

$$\bar{\mathbf{L}}_{CM} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \bar{\mathbf{v}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i (\bar{\mathbf{v}}_{CM} + \bar{\mathbf{v}}'_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \bar{\mathbf{v}}_{CM} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \bar{\mathbf{v}}'_i}_{\mathbf{L}'_{CM}} = \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i}_{\substack{\text{posizione del CM nel} \\ \text{sistema di riferimento del CM} \\ = \mathbf{r}'_{CM} = 0 \\ \text{Nel suo sistema di riferimento} \\ \text{il CM coincide con l'origine.}}} \times \bar{\mathbf{v}}_{CM} + \bar{\mathbf{L}}'_{CM} = \bar{\mathbf{L}}'_{CM}$$

Il momento angolare totale di un sistema di punti materiali rispetto al polo O è uguale al momento della quantità di moto del centro di massa rispetto al polo O, immaginando il centro di massa come un punto materiale di massa pari alla massa totale del sistema che si muove con la velocità del centro di massa, più il momento angolare del sistema di punti materiali valutato rispetto al centro di massa.

Cioè:

$$\vec{L}_O = \vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM} + \vec{L}'_{CM}$$

Per l'osservazione fatta precedentemente, il momento angolare del sistema rispetto al centro di massa si può valutare sia nel sistema di riferimento del laboratorio che in quello del centro di massa,  $\vec{L}_{CM} = \vec{L}'_{CM}$ .

Il termine  $\vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM}$  si chiama momento angolare orbitale, mentre il termine  $\vec{L}'_{CM}$  si chiama momento angolare di "spin" (rotazione).

Se per esempio volessimo calcolare il momento angolare della terra rispetto al sole, occorrerebbe tener conto, oltre al momento angolare della terra rispetto al sole dovuto al suo moto di insieme attorno al sole,  $\vec{r}_T \times M\vec{v}_T$ , il momento angolare orbitale, anche del fatto che la terra ruota su se stessa e per questo  $\vec{L}'_{CM}$ , il momento angolare di "spin", è diverso da zero.

Per la dimostrazione del secondo teorema di König basta far riferimento alla relazione che lega i momenti angolari calcolati rispetto a poli diversi e all'osservazione che il momento angolare rispetto al centro di massa può essere valutato sia nel sistema del laboratorio quanto in quello del centro di massa,  $\vec{L}_{CM} = \vec{L}'_{CM}$ . Partendo da

$\vec{L}_O = \vec{L}_{O'} + \vec{OO}' \times \vec{P}$  e facendo coincidere O' con il centro di massa, si ottiene:

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \vec{P} = \vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM} + \vec{L}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM} + \vec{L}'_{CM}$$

### ***Teorema del momento angolare. Il'equazione cardinale della dinamica dei sistemi.***

Nello studio della dinamica del punto materiale avevamo determinato una relazione tra la variazione del momento della quantità di moto e il momento delle forze applicate.

Una relazione dello stesso tipo vale anche per i sistemi di punti materiali. Si può dimostrare infatti che

La derivata rispetto al tempo del momento angolare di un sistema di punti materiali è uguale al momento risultante

delle sole forze esterni agenti sulle varie particelle costituenti il sistema calcolato rispetto allo stesso polo. Analiticamente:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{est}}$$

La relazione precedente vale se il polo O coincide con l'origine del sistema di riferimento del Laboratorio, oppure con un qualsiasi punto fermo in questo sistema di riferimento, oppure ancora se il polo coincide con il centro di massa, o con un punto la cui velocità è sempre parallela a quella del centro di massa.

Al contrario del punto materiale in cui la relazione corrispondente a quella scritta precedentemente è del tutto equivalente alla seconda legge di Newton e quindi non aggiunge informazioni rispetto questa, nel caso dei sistemi di punti materiali, la II equazione cardinale dei sistemi è del tutto indipendente dalla prima, il teorema del Centro di massa, e quindi può fornire ulteriori informazioni rispetto a quelle determinabili dal teorema del centro di massa.

Per rendersi conto di questo fatto possiamo far riferimento al seguente esempio. Consideriamo un disco omogeneo che è libero di ruotare, in un piano verticale, attorno ad un'asse orizzontale passante per il suo centro, che per ragioni di simmetria coincide anche con il centro di massa. Supponiamo di applicare al bordo del disco una forza tangente al disco stesso aiutandoci, per esempio, con una corda avvolta sul disco stesso.

Con questa forza noi riusciamo a mettere in rotazione il corpo attorno all'asse orizzontale mentre il centro di massa del disco rimane fermo.

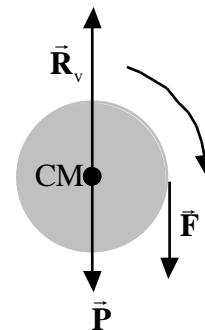
Il teorema del centro di massa ci permette di determinare il valore della reazione vincolare esercitata dall'asse orizzontale passante per il centro di massa del disco, ma non ci fornisce alcuna informazione sul moto del disco attorno all'asse. Infatti:

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{R}_v = M\vec{a}_{CM} = 0$$

Possiamo osservare invece che il momento delle forze esterne rispetto al centro di massa,  $\vec{M}_{CM}^{\text{est}}$ , è diverso da zero ( il suo modulo infatti è pari a  $FR$ , la direzione perpendicolare al piano della figura e verso entrante nella figura, la forza peso e la reazione vincolare essendo applicate al centro di massa hanno momento nullo rispetto ad esso). Ma anche il momento angolare  $\vec{L}_{CM}$  è non nullo dato che alcune dei punti del disco hanno una velocità diversa da zero.

In base a queste considerazioni, ci si può attendere che la seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi fornisca in questo caso informazioni utili alla descrizione del moto del disco.

Si intuisce infine, anche riferendosi all'esempio illustrato, come quest'ultima





equazione possa svolgere un ruolo determinante nello studio dei moti di rotazione.

### Dimostrazione del teorema del momento angolare.

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{d\vec{r}_i}{dt}}_{\vec{v}_i} \times m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i$$

Poichè  $\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$ , questo termine è nullo in quanto ciascun termine della somma è nullo poichè prodotto vettoriale di due vettori paralleli

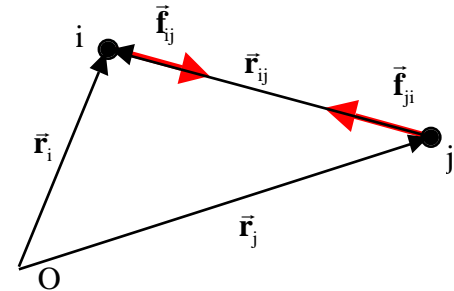
Per la seconda legge di Newton

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^{\text{est}} + \vec{F}_i^{\text{int}} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

in cui  $\vec{F}_i^{\text{est}}$  è la risultante delle forze esterne agenti sull'i-esima particella e  $\vec{F}_i^{\text{int}}$  è la risultante delle forze interne. Pertanto:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times (\vec{F}_i^{\text{est}} + \vec{F}_i^{\text{int}}) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{iO}^{\text{est}} + \sum_{i=1}^n \vec{M}_{iO}^{\text{int}} = \vec{M}_O^{\text{est}} + \vec{M}_O^{\text{int}}$$

Mostriamo ora che  $\vec{M}_O^{\text{int}}$  è nullo. Abbiamo già osservato che le forze interne si presentano in coppia. Consideriamo il contributo al momento risultante totale delle forze interne tra la particella i e la particella j.



$$\vec{M}_O^{\text{int}} = \dots + \underbrace{\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \dots + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji}}_{\vec{f}_{ji} = -\vec{f}_{ij}} + \dots = \dots + \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \dots - \vec{r}_j \times \vec{f}_{ij} + \dots = \dots + \underbrace{(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij}}_{=0 \text{ perchè } \vec{f}_{ij} \text{ é parallela a } \vec{r}_i - \vec{r}_j = \vec{r}_{ij}} + \dots = 0$$

# Urti.

Quando due particelle (o due sistemi di particelle) si avvicinano l'una all'altra, la loro mutua interazione produce un cambiamento nel loro stato di moto e, conseguentemente, uno scambio di quantità di moto e di energia cinetica. Quando la variazione di quantità di moto subita da ciascuna delle due particelle interagenti è notevole, mentre la durata dell'interazione è molto piccola, allora si dice che si è verificato un urto (o una collisione).

Si pensi per esempio ad una pallina da tennis, essa viaggia, muovendosi con una certa velocità verso la racchetta di uno dei due giocatori. Ad un certo punto la pallina viene colpita dalla racchetta, la sua velocità, e quindi anche la sua quantità di moto, cambia verso, si tratta quindi di una variazione consistente, finita, di quantità di moto (una variazione infinitesima di quantità di moto avrebbe comportato una lievissima variazione nella direzione della velocità e una piccolissima variazione del suo modulo, non è questo il caso per la pallina da tennis che addirittura torna indietro). Il tempo di interazione tra la racchetta e la pallina è brevissimo (si ode un colpo molto secco), soprattutto se confrontato con il tempo impiegato dalla pallina per spostarsi da una zona del campo all'altra (in generale si riesce a seguire con gli occhi il moto della pallina mentre si sposta da una zona all'altra del campo, ma non si riesce a percepire quello che succede al momento dell'urto con la racchetta).

Esempi di interazioni che producono variazioni consistenti della quantità di moto in tempi estremamente brevi sono diversi: la palla da baseball o da golf colpita dalla mazza, il chiodo colpito dal martello, due automobili che si scontrano, l'urto tra due palle di un biliardo(\*), o di una palla con la sponda del biliardo.

Esaminiamo in dettaglio il caso delle biglie di un biliardo. Supponiamo che una delle due biglie viaggi verso l'altra: fino a che esse sono distanti non c'è interazione tra esse. Ad un certo punto entrano in contatto e si produce una variazione del loro stato di moto (urto). Dopo l'urto le due biglie procedono senza che vi sia più alcuna influenza tra esse. Il tempo di contatto, ossia la durata della collisione, è piuttosto piccolo rispetto alla durata complessiva del fenomeno, il moto delle biglie, cosicché si può considerare l'urto istantaneo. A causa dell'urto c'è stata una variazione considerevole della quantità di moto e dell'energia cinetica di ciascuno dei due corpi collidenti. Cos'è accaduto durante l'urto? Quando le due biglie vengono a contatto, ciascuna di esse tende ad occupare lo

---

(\*) L'esempio delle due biglie che si urtano su un biliardo, sebbene sia abbastanza familiare, non è l'esempio più corretto. Le biglie, infatti, oltre a possedere un moto traslatorio possiedono anche un moto di rotazione, che complica le cose durante l'urto. In questo capitolo noi esamineremo solo urti tra punti materiali che, avendo dimensioni nulle, non hanno moti di rotazioni. Il caso di urto tra corpi rigidi estesi che possono quindi essere dotati anche di un moto di rotazione, potrà essere compreso una volta trovate le equazioni che regolano il moto dei corpi rigidi. Un urto in cui i corpi interagenti non hanno una moto di rotazione può essere ottenuto due pendoli di eguale lunghezza lanciati l'uno contro l'altro.

spazio occupato dall'altra, provocando così una deformazione nell'altra biglia. Come sappiamo tale deformazione dà origine ad una forza elastica che si oppone alla deformazione stessa e cerca di rimuovere la causa che l'ha prodotta: tende cioè ad allontanare la biglia che ha prodotto la deformazione. Ovviamente il discorso è simmetrico per le due biglie. Nell'urto si originano due forze elastiche che cambiano lo stato di moto delle due biglie provocando il loro allontanamento, quindi la scomparsa delle deformazioni e, di conseguenza, dell'interazione. Si può dire qualcosa circa l'intensità di queste forze? Sebbene sia complicato poterle valutare, tuttavia possiamo affermare che devono essere tanto più intense quanto più breve è l'intervallo di tempo in cui agiscono, cioè quanto più breve è l'intervallo di tempo in cui ciascuno dei corpi collidenti subisce una variazione di velocità. Abbiamo detto pocanzi che la durata dell'urto tra le due biglie ci sembra molto breve, frazioni di secondo, questo significa che le forze devono essere molto intense.

L'esempio precedente mostra che un fenomeno d'urto è caratterizzato da tre fasi:

- 1) fase iniziale prima dell'urto: in cui esiste un moto imperturbato.
- 2) fase dell'urto: in questa fase avviene l'interazione tra i due sistemi. La durata di questa fase è piuttosto piccola rispetto alla durata complessiva del moto ed è caratterizzata dalla presenza di forze molto intense. Si produce quindi una brusca variazione nel moto dei due sistemi interagenti.
- 3) fase successiva all'urto: dopo l'interazione, lo stato di moto continua ad essere di nuovo imperturbato.

E' bene osservare che, perché si possa parlare di processo d'urto, non è necessario il contatto tra le due particelle, ciò che è importante è che ci siano delle variazioni rapide e rilevanti del loro stato di moto.

Consideriamo per esempio il caso di una cometa (di quelle che compaiono una sola volta), che interagisce con il sistema solare. Una cometa di questo tipo passa a molti km dal sole e dai pianeti del sistema solare, ma il suo moto, la sua traiettoria viene variata bruscamente, rispetto ai tempi cosmici, dall'interazione con il sistema solare. Anche in laboratorio è possibile realizzare dispositivi che si urtano senza che vi sia contatto. Si possono montare due magneti con le polarità disposte nello stesso modo, su due carrelli. Se i due carrelli vengono lanciati uno contro l'altro, giunti ad una certa distanza i due magneti iniziano ad interagire: si genereranno delle forze repulsive che tendono dapprima a fermare i carrelli e successivamente ad allontanarli.

### **Impulso di una forza.**

In un processo d'urto tra due particelle si osserva una variazione consistente della quantità di moto di ciascuna delle due particelle in un tempo estremamente breve. Dalla seconda legge della dinamica sappiamo che la variazione della quantità di moto delle due particelle è causata dalle forze d'interazione che agiscono sulle due particelle durante l'urto. E' piuttosto difficile descrivere istante per istante la forza che agisce sui corpi interagenti; quello che però è importante è l'effetto complessivo prodotto: **l'impulso della forza**.

Questa nuova grandezza, l'impulso della forza, è proprio uguale alla variazione della quantità di moto subita dal corpo su cui la forza ha agito.

Consideriamo la prima delle due particelle che si urtano e supponiamo che non ci siano altre forze oltre a quelle di interazione tra le due particelle che agiscono su di esse. Indichiamo con  $\bar{\mathbf{P}}_{1i}$  la quantità di moto della particella prima dell'urto e con  $\bar{\mathbf{P}}_{1f}$  quella dopo l'urto. Si definisce **impulso della forza**,  $\bar{\mathbf{I}}_1$ , subito dalla particella 1 per l'azione della forza  $\bar{\mathbf{F}}_{12}$  che ha agito sulla particella 1 generata dall'urto con la particella 2, la quantità:

$$\bar{\mathbf{I}}_1 = \bar{\mathbf{P}}_1 = \bar{\mathbf{P}}_{1f} - \bar{\mathbf{P}}_{1i}$$

L'impulso della forza è un vettore e si misura nelle stesse unità di misura della quantità di moto.

Dalla seconda legge della dinamica noi sappiamo che la derivata rispetto al tempo della quantità di moto della particella 1 è legata alla forza agente sulla particella stessa:

$$\frac{d\bar{\mathbf{P}}_1}{dt} = \bar{\mathbf{F}}_{12}$$

Da cui possiamo ottenere la relazione tra l'impulso della forza è la forza stessa:

$$\begin{aligned} d\bar{\mathbf{P}}_1 &= \bar{\mathbf{F}}_{12} dt & \bar{\mathbf{P}}_1 &= \int_{t_1}^{t_2} d\bar{\mathbf{P}}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \bar{\mathbf{F}}_{12} dt \\ \bar{\mathbf{I}}_1 &= \int_{t_1}^{t_2} \bar{\mathbf{F}}_{12} dt \end{aligned}$$

In cui abbiamo indicato con  $t_1$  l'istante in cui ha inizio l'urto e con  $t_2$  l'istante in cui l'urto si esaurisce. Se indichiamo con  $\bar{\mathbf{F}}_{12m}$  la forza media che ha agito sulla particella 1 a causa dell'urto con la particella 2 nell'intervallo

di tempo tra l'istante  $t_1$  e l'istante  $t_2$ , possiamo anche scrivere:

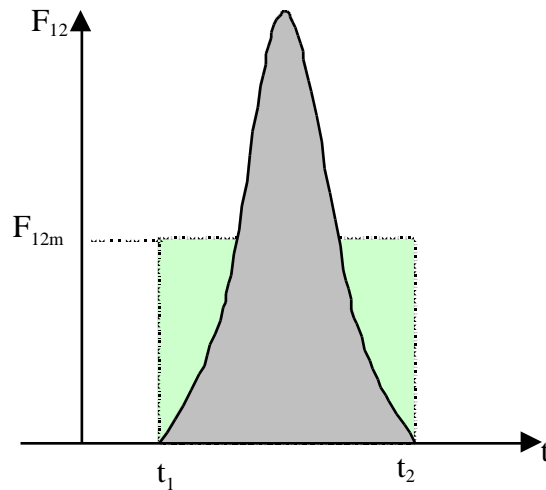
$$\bar{\mathbf{I}}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \bar{\mathbf{F}}_{12} dt = \bar{\mathbf{F}}_{12m} \Delta t$$

Come appare dall'ultima relazione l'impulso della forza è uguale alla forza media moltiplicata per l'intervallo di tempo in cui essa agisce. Uno stesso impulso, che corrisponde ad una data variazione della quantità di moto del punto materiale, su cui la forza ha agito, può essere ottenuto con una forza meno intensa che agisce per un intervallo più lungo oppure con una forza più intensa che agisce per un intervallo più breve.

Poiché abbiamo anche affermato che la durata di un urto è molto piccola, allora la forza media  $\bar{\mathbf{F}}_{12m}$  agente durante l'urto sulla particella 1 deve essere molto intensa: se  $\Delta t$  tende a zero, l'intensità della forza media,  $\bar{\mathbf{F}}_{12m}$ , e naturalmente anche quella di  $\bar{\mathbf{F}}_{12}$ , deve tendere all'infinito. Questo è il motivo per il quale le forze d'interazione che si generano nei processi d'urto si chiamano *forze impulsive*, intendendo con questo termine forze d'intensità elevatissima ma di brevissima durata.

La figura mostra un possibile andamento in funzione del tempo dell'intensità della forza  $\bar{\mathbf{F}}_{12}$ . Prima dell'istante  $t_1$  la forza è nulla e questo corrisponde al fatto che prima di  $t_1$  non c'è interazione tra le due particelle. L'interazione inizia all'istante  $t_1$ , l'intensità della forza cresce rapidamente fino al valore massimo e altrettanto rapidamente si riporta al valore zero che raggiunge all'istante di tempo  $t_2$ , istante in cui cessa l'interazione tra i due corpi.

Se la forza ha una direzione costante, dalla rappresentazione geometrica dell'integrale possiamo associare l'area al di sotto della curva al modulo dell'impulso subito dalla particella. Nello stesso grafico è mostrata la forza media che può essere valutata imponendo che l'area del rettangolo di base  $\Delta t = t_2 - t_1$  e altezza  $F_{12m}$ , sia proprio uguale a quella al di sotto del grafico della forza.



### **Intensità della forza nei processi d'urto.**

Per farsi un'idea dell'intensità delle forze che intervengono in un processo d'urto valuteremo la forza media che agisce su di una pallina da golf mentre viene colpita dalla mazza.

Ci servono un certo numero di dati.

Possiamo assumere che la massa della pallina sia di una cinquantina di grammi.

L'impulso trasferito dalla mazza alla pallina si può valutare stimando la velocità con cui la pallina schizza via dopo essere stata colpita dalla mazza e tenendo conto che, prima di essere colpita, la pallina era ferma (e quindi che la quantità di moto iniziale era nulla).

Possiamo valutare la velocità della pallina dopo l'interazione con la mazza, partendo dal fatto che un buon lancio può far viaggiare la pallina per 160 m. Dalla formula della gittata determinata dallo studio del moto del proiettile, facendo l'ipotesi che la gittata di 160 m sia stata ottenuta nella condizione di gittata massima, cioè per  $\theta = 45^\circ$ , si ottiene:

$$G = \frac{v_o^2}{g} \sin 2\theta \quad v_o^2 = Gg = 160 \cdot 9.8 \cdot 1600 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \quad v_o = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$\theta = 45^\circ$

L'impulso è:

$$\bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{P}}_f - \bar{\mathbf{P}}_i = \bar{\mathbf{P}}_f \quad I = mv_o = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 40 = 2.0 \frac{\text{kgm}}{\text{s}}$$

Dal teorema delle forze vive sappiamo che il lavoro compiuto dalla forza, dato dalla forza per lo spostamento, è uguale alla variazione di energia cinetica. Ma qual'è lo spostamento su cui ha agito la forza?

La forza è presente mentre la pallina è deformata.

Di quanto si è deformata la pallina?

Dobbiamo fare un'ipotesi ragionevole: la deformazione è sicuramente più piccola del diametro della pallina, possiamo allora supporre che essa sia dell'ordine del raggio. Questo significa che anche lo spostamento da usare nel calcolare il lavoro fatto dalla forza è dell'ordine del raggio della pallina, 2 cm.

$$F_{\text{media}} \cdot s = K = \frac{1}{2} mv_o^2 \quad F_{\text{media}} = \frac{\frac{1}{2} mv_o^2}{s} = \frac{1}{2} \frac{50 \cdot 10^{-3} \cdot 1600}{2 \cdot 10^{-2}} = 2000 \text{N}$$

La durata dell'interazione può essere calcolata dall'impulso della forza:

$$\bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{F}}_{\text{media}} t \quad t = \frac{I}{F_{\text{media}}} = \frac{2}{2000} = 10^{-3} \text{ s}$$

E' utile confrontare la forza media agente durante l'interazione pallina mazza con il peso della pallina:

$$\frac{F_{\text{media}}}{mg} = \frac{2000}{50 \cdot 10^{-3} \cdot 9.81} = \frac{2000}{.5} = 4000$$

Nell'esempio considerato la forza media tra la mazza e la pallina da golf è circa 4000 volte la forza peso, mentre la durata dell'interazione è dell'ordine del millisecondo.

### ***Risoluzione dei problemi d'urto.***

La risoluzione di un problema d'urto in generale consiste nel determinare le grandezze dello stato finale partendo dalla conoscenza di quelle dello stato iniziale.

Poniamo la nostra attenzione sull'urto tra due particelle, la particella 1 e la particella 2.

Supporremo di conoscere le masse delle due particelle,  $m_1$  ed  $m_2$ , nonché le velocità delle due particelle prima dell'urto,  $\bar{\mathbf{v}}_{1i}$  e  $\bar{\mathbf{v}}_{2i}$ . Risolvere l'urto significa determinare le velocità delle due particelle dopo l'urto,  $\bar{\mathbf{v}}_{1f}$  e  $\bar{\mathbf{v}}_{2f}$ .

Per risolvere un problema d'urto si parte dal considerare il ***sistema di punti materiali*** costituito dalle due particelle (o dai due corpi) che subiscono l'urto.

Possono accadere due cose:

a) il ***sistema di punti materiali*** costituito dai due corpi che si urtano è **isolato**.

Questo significa che non ci sono corpi esterni al ***sistema di punti materiali*** che possano esercitare delle forze sui corpi facenti parte del ***sistema***.

Vuol dire che non ci sono **forze esterne** agenti sui due corpi facenti parte del ***sistema di punti materiali***.

Di conseguenza la risultante delle forze esterne agenti sul sistema è sempre nulla.

Il teorema della quantità di moto applicato al ***sistema di punti materiali*** che si urtano ci dice che la quantità di moto del ***sistema di punti materiali*** si conserva:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{P}} &= \bar{\mathbf{P}}_1 + \bar{\mathbf{P}}_2 \\ \frac{d\bar{\mathbf{P}}}{dt} &= \mathbf{R}^{\text{est}} & \bar{\mathbf{P}}_1 + \bar{\mathbf{P}}_2 &= \text{cost} \\ \bar{\mathbf{R}}^{\text{est}} &= 0\end{aligned}$$

Se guardiamo separatamente a ciascuno dei due corpi che si urtano, avremo che durante l'urto sul corpo 1 agirà la forza  $\bar{\mathbf{F}}_{12}$  dovuta al corpo 2, mentre su quest'ultimo corpo agirà la forza  $\bar{\mathbf{F}}_{21}$ , dovuta al corpo 1. Queste due forze obbediscono alla terza legge di Newton e pertanto vale la seguente eguaglianza:  $\bar{\mathbf{F}}_{12} = -\bar{\mathbf{F}}_{21}$ .

Poiché il sistema è isolato non ci sono altre forze, oltre quelle di interazione già citate.

A seguito dell'urto i corpi subiranno un impulso dato rispettivamente da:

$$\bar{\mathbf{I}}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \bar{\mathbf{F}}_{12} dt \quad \bar{\mathbf{I}}_2 = \int_{t_1}^{t_2} \bar{\mathbf{F}}_{21} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \bar{\mathbf{F}}_{12} dt = -\bar{\mathbf{I}}_1$$

La variazione della quantità di moto per i due corpi sarà rispettivamente:

$$\mathbf{P}_1 = \bar{\mathbf{I}}_1 \quad \mathbf{P}_2 = \bar{\mathbf{I}}_2 = -\mathbf{P}_1$$

Mentre la variazione della quantità di moto totale del sistema varrà:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{1f} + \mathbf{P}_{2f} - \mathbf{P}_{1i} - \mathbf{P}_{2i} = (\mathbf{P}_{1f} - \mathbf{P}_{1i}) + (\mathbf{P}_{2f} - \mathbf{P}_{2i}) = \mathbf{P}_1 + \underbrace{\mathbf{P}_2}_{=-\mathbf{P}_1} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_1 = 0$$

come del resto avevamo già determinato ricorrendo al teorema della quantità di moto.

b) il *sistema di punti materiali* costituito dai due corpi che si urtano **non è isolato**.

Questo significa che ci sono corpi esterni al *sistema di punti materiali* che esercitano delle forze sui corpi facenti parte del *sistema*.

Vuol dire che sono presenti delle **forze esterne** agenti sui due corpi facenti parte del *sistema di punti materiali*.

Di conseguenza la risultante delle forze esterne agenti sul sistema al momento dell'urto potrebbe essere non



nulla: di conseguenza non si può far ricorso in questo caso al teorema della quantità di moto per stabilire la conservazione della quantità di moto.

Però, se esaminiamo separatamente i due corpi, ci accorgiamo che nell'intervallo di tempo in cui avviene l'urto, tra gli istanti  $t_1$  e  $t_2$ , sul corpo 1 agisce sia la forza  $\vec{F}_{12}$  di interazione con il corpo 2 più tutte le forze esterne, dovute ai corpi non facenti parte del sistema, che avranno una risultante che indicheremo con  $\vec{F}_1^{est}$ . Parimenti sul corpo 2 agirà sia la forza di interazione con il corpo 1,  $\vec{F}_{21}$ , nonché tutte le forze esterne la cui risultante sarà indicata con  $\vec{F}_2^{est}$ .

La variazione della quantità di moto subita dai due corpi tra gli istanti  $t_1$  e  $t_2$ , ovvero sull'intervallo di tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$ , vale:

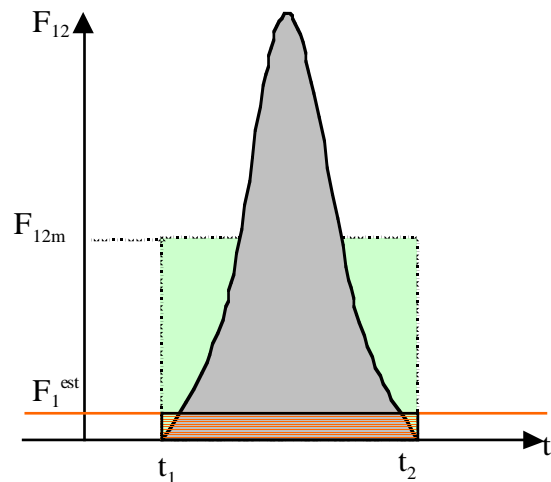
$$\vec{P}_1 = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_{12} + \vec{F}_1^{est}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{12} dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_1^{est} dt = \vec{P}_1^{int} + \vec{P}_1^{est}$$

$$\vec{P}_2 = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_{21} + \vec{F}_2^{est}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{21} dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_2^{est} dt = \vec{P}_2^{int} + \vec{P}_2^{est}$$

Durante l'urto la forza di interazione tra le due particelle che si urtano è impulsiva, tale cioè che la sua intensità tende all'infinito. Se la risultante delle forze esterne, durante l'urto, non ha un carattere impulsivo e pertanto la sua intensità rimane piccola mentre avviene l'urto, allora la variazione della quantità di moto prodotta dalle forze esterne può essere trascurata rispetto a quella derivante dalla forza di interazione impulsiva. La variazione della quantità di moto delle due particelle diventa dunque:

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_1^{int} + \underbrace{\vec{P}_1^{est}}_{\text{trascurabile}} \quad \vec{P}_1^{int} = \vec{F}_{12m} \Delta t$$

$$\vec{P}_2 = \vec{P}_2^{int} + \underbrace{\vec{P}_2^{est}}_{\text{trascurabile}} \quad \vec{P}_2^{int} = \vec{F}_{21m} \Delta t = -\vec{F}_{12m} \Delta t = -\vec{P}_1$$



Quindi anche in questo caso la variazione della quantità di moto totale del sistema è all'incirca uguale a zero e pertanto si ha anche in questo caso la conservazione della quantità di moto totale del sistema.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \underbrace{\mathbf{P}_2}_{=-\mathbf{P}_1} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_1 = 0$$

Se invece la risultante delle forze esterne agenti su una delle due particelle ha anch'essa un carattere impulsivo, perché per esempio qualcuna delle forze esterne ha un carattere impulsivo, nel senso che la sua intensità durante l'urto diventa molto grande, allora in questo caso la variazione della quantità di moto prodotta dalle forze esterne non può essere trascurata rispetto a quella prodotta dalle forze di interazione e quindi non si ha la conservazione della quantità di moto.

Quali forze, tra quelle esterne, potrebbero presentare un carattere impulsivo?

Sono quelle per le quali non siamo stati in grado di fornire un'espressione, una legge della forza.

Per esempio la tensione in una fune, la reazione vincolare (sia per quanto riguarda la componente normale e di conseguenza per le eventuali forze di attrito), ecc. Queste le forze, al momento dell'urto, potrebbero aumentare la loro intensità a valori tali da non poter più trascurare i loro effetti rispetto a quelli prodotti dalle forze interne. Invece forze come quella "peso", che vale  $mg$ , non diventeranno mai impulsive perché sia la massa della particella che l'accelerazione di gravità  $g$  rimangono costanti durante l'urto.

Anche la forza elastica,  $-kx$ , si comporterà bene. Essa, infatti, dipende dalla posizione occupata dal punto materiale. Poiché noi sappiamo che l'urto dura molto poco, è lecito attendersi che la posizione della particella non sia cambiata apprezzabilmente durante l'urto, anzi per  $t$  che tende a zero possiamo affermare che la particella è rimasta ferma nella posizione occupata al momento dell'urto ( $x=v t=0$ ).

In conclusione, se il sistema dei due corpi che si urtano è isolato o se le forze esterne agenti su di esso non hanno un carattere impulsivo, allora si conserva la quantità di moto del sistema:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}} &= 0 & \bar{\mathbf{P}}_i &= \bar{\mathbf{P}}_f \\ & \Downarrow & & \\ \bar{\mathbf{P}}_{1i} + \bar{\mathbf{P}}_{2i} &= \bar{\mathbf{P}}_{1f} + \bar{\mathbf{P}}_{2f} \end{aligned}$$

Relazione che si può anche scrivere nel seguente modo:

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}$$

Questa è un'equazione vettoriale che corrisponde quindi a tre equazioni scalari che si ottengono proiettando l'equazione vettoriale lungo tre direzioni mutuamente ortogonali, per esempio lungo gli assi del sistema di riferimento:

$$m_1 v_{1xi} + m_2 v_{2xi} = m_1 v_{1xf} + m_2 v_{2xf}$$

$$m_1 v_{1yi} + m_2 v_{2yi} = m_1 v_{1yf} + m_2 v_{2yf}$$

$$m_1 v_{1zi} + m_2 v_{2zi} = m_1 v_{1zf} + m_2 v_{2zf}$$

Per un urto generico le incognite da determinare sono 6, le tre componenti della velocità finale della particella 1 e le analoghe per la particella 2. Quindi in generale la sola conservazione della quantità di moto non ci consente di risolvere completamente l'urto. Occorre conoscere alcune delle grandezze dello stato finale per determinare le restanti oppure far ricorso ad eventuali ulteriori condizioni relative al particolare problema d'urto in esame.

Osservazione 1: come si scelgono l'istante iniziale e quello finale da utilizzare per effettuare il confronto della quantità di moto?

Dalla trattazione precedente abbiamo visto che nei problemi d'urto utili informazioni possono venire dalla conservazione della quantità di moto:

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f}$$

in cui gli indici i ed f si riferiscono rispettivamente ad uno stato iniziale prima dell'urto e allo stato finale dopo l'urto.

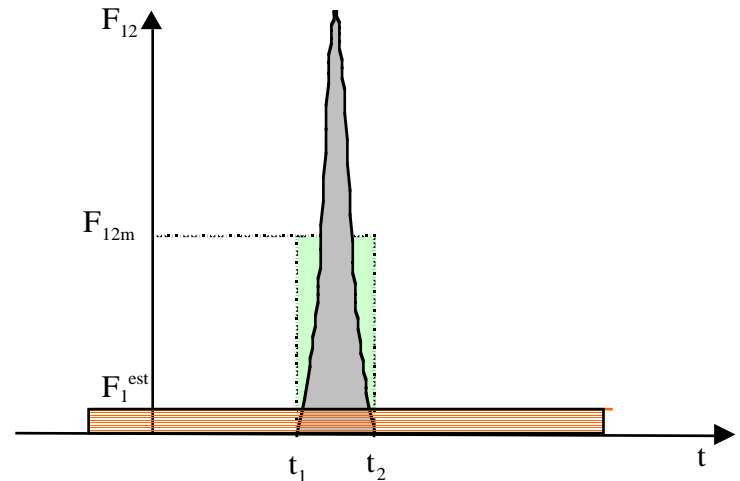
Per fissare lo stato iniziale e quello finale in cui va valutata la quantità di moto per effettuarne il confronto ed imporre la conservazione, si può fare le seguenti osservazioni:

- se le forze esterne sono assenti, allora prima dell'urto, le due particelle non subiscono alcuna forza, quindi la loro velocità è costante (I legge di Newton o principio di inerzia) e di conseguenza lo è anche la quantità di moto. La stessa cosa accade per le quantità di moto delle due particelle nello stato finale. In questo caso, dunque, per valutare la quantità di moto iniziale si può scegliere un qualunque istante prima dell'urto e, per valutare quella finale, un qualunque istante dopo l'urto.

- Se sono presenti delle forze esterne, allora la quantità di moto delle due particelle cambia sotto l'azione delle forze esterne sia prima dell'urto che dopo l'urto. In questo caso quindi il confronto va dunque effettuato tra la quantità di moto posseduta dai due corpi nel momento in cui inizia l'urto, l'istante  $t_1$  della figura, e quella posseduta all'istante in cui termina l'urto, l'istante  $t_2$  della figura. Noi abbiamo potuto trascurare l'effetto delle forze esterne durante l'urto proprio sfruttando il fatto che la durata dell'urto è brevissima,  $\Delta t$  tende a zero.

L'impulso dovuto alla forza esterna in questo intervallo di tempo,  $F^{est} \Delta t$ , tende anch'esso a zero quando  $\Delta t$  tende a zero.

Se noi invece allunghiamo l'intervallo di tempo sul quale valutiamo la variazione della quantità di moto totale, ci accorgiamo che il contributo delle forze esterne alla variazione della quantità di moto delle singole particelle potrebbe essere non più trascurabile rispetto a alla variazione di quantità di moto prodotta dalle forze interne durante l'urto. Questa situazione è illustrata nella figura al lato: si confronti l'area tratteggiata in rosso, pari alla variazione della quantità di moto della particella dovuta alla forza esterna nell'intervallo di tempo considerato, con l'area in grigio che corrisponde alla variazione della quantità di moto prodotta sulla stessa particella durante l'urto dalla forza impulsiva di interazione.



Questa situazione è illustrata nella figura al lato: si confronti l'area tratteggiata in rosso, pari alla variazione della quantità di moto della particella dovuta alla forza esterna nell'intervallo di tempo considerato, con l'area in grigio che corrisponde alla variazione della quantità di moto prodotta sulla stessa particella durante l'urto dalla forza impulsiva di interazione.

Osservazione 2: moto del centro di massa in un processo d'urto.

Se in un processo d'urto si conserva la quantità di moto, come per esempio accade in assenza di forze esterne, questo vuol dire che il centro di massa si muove con velocità costante. Infatti la quantità di moto totale di un sistema di particelle è data dalla massa totale del sistema per la velocità del centro di massa e quindi:

$$\bar{\mathbf{P}} = \text{costante}$$

$$\bar{\mathbf{P}} = M\bar{\mathbf{v}}_{\text{CM}}$$

$$\bar{\mathbf{v}}_{\text{CM}} = \text{costante}$$

In un processo d'urto di questo tipo il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme.

Ne deriva che il sistema di riferimento del centro di massa, si muove rispetto al sistema del Laboratorio di moto traslatorio uniforme: infatti la sua origine, il centro di massa, si muove di moto rettilineo uniforme, mentre gli assi, secondo la definizione di sistema di riferimento del centro di massa, restano sempre paralleli a quelli corrispondenti del sistema del Laboratorio. Quindi, per questo processo, il sistema di riferimento del centro di massa è un sistema di riferimento inerziale. Può quindi essere usato per lo studio dell'urto. Anzi in alcuni è particolarmente conveniente (noi comunque studieremo gli urti solo utilizzando il sistema del Laboratorio).

Si osservi inoltre che, poiché il centro di massa si trova sempre sul segmento che congiunge le due particelle, nel momento dell'urto, quando cioè le due particelle sono a contatto (se l'urto avviene per contatto), le due particelle tendono ad occupare la stessa posizione che coincide anche con quella del centro di massa.

### **Conservazione parziale della quantità di moto.**

Nel caso in cui le forze esterne sono presenti ed esiste il sospetto che qualcuna di esse possa avere, durante l'urto, un comportamento di tipo impulsivo, non siamo più autorizzati ad utilizzare la conservazione della quantità di moto per risolvere l'urto.

Può comunque succedere, in alcuni casi particolari, che si riesca a stabilire a priori la direzione assunta, durante l'urto, della forza esterna sospetta di un comportamento di tipo impulsivo (si veda a questo proposito il caso del pendolo balistico discusso nel seguito).

Supponiamo per esempio che questa direzione sia quella dell'asse x. In questo caso solo la componente x della risultante delle forze esterne può avere un carattere impulsivo e quindi il suo effetto non può essere trascurato rispetto alle forze interne. Le altre componenti, non avendo un carattere impulsivo, possono invece essere trascurate rispetto alle forze interne.

$$R_x^{\text{est}} = \text{impulsiva} \quad R_y^{\text{est}} = 0 \quad R_z^{\text{est}} = 0$$

Utilizzando il teorema della quantità di moto, e osservando che esso consiste in una relazione vettoriale, corrispondente a tre equazioni scalari indipendenti tra loro, si potrà stabilire la conservazione della quantità di moto lungo qualunque direzione perpendicolare a quella della forza esterna sospetta di comportamento di tipo

impulsivo. Formalmente:

$$\frac{d\bar{\mathbf{P}}}{dt} = \bar{\mathbf{R}}^{\text{est}}$$

$\frac{dP_x}{dt} = R_x^{\text{est}}$	(impulsiva)	$P_x$ potrebbe non conservarsi
$\frac{dP_y}{dt} = R_y^{\text{est}}$	0	$P_y$ si conserva
$\frac{dP_z}{dt} = R_z^{\text{est}}$	0	$P_z$ si conserva

**Urti elastici ed anelastici.**

Negli urti, oltre alla quantità di moto, i due corpi interagenti si scambiano anche energia.

Dal punto di vista dell'energia gli urti si possono classificare in:

elastici: se l'energia meccanica del sistema formato dalle due particelle si conserva.

anelastici: se l'energia meccanica del sistema formato dalle due particelle non si conserva.

In realtà in un processo d'urto cambia solo l'energia cinetica dei punti materiali.

Infatti se il sistema è isolato, allora vuol dire che non ci sono forze esterne e quindi neppure energie potenziali. Se invece ci sono delle forze esterne si può osservare che la posizione delle particelle durante l'urto cambia di pochissimo proprio perché l'intervallo di tempo in cui si verifica l'urto è breve. Poiché l'energia potenziale dipende dalla posizione delle particelle, essa non può variare apprezzabilmente durante il processo d'urto.

Quindi un urto l'energia potenziale dei due corpi, se esiste, non varia, pertanto i due corpi si possono scambiare solo energia cinetica.

Di conseguenza un urto si dirà:

elastico: se si conserva l'energia cinetica delle particelle interagenti.

anelastico: se l'energia cinetica del sistema dopo l'urto risulta diversa dall'energia cinetica iniziale.

In un urto anelastico si possono verificare entrambi i casi:

- a) l'energia cinetica finale è più piccola dell'energia cinetica iniziale, e quindi una parte dell'energia meccanica iniziale si è trasformata in energia interna dei corpi che hanno interagito o dispersa nell'ambiente sotto forma di onde, per esempio onde acustiche. Il processo in questo caso si dice

*endoenergetico.*

b) l'energia cinetica finale risulta più grande dell'energia cinetica iniziale, e quindi dell'energia interna è stata trasformata in energia cinetica. Questo tipo di processo viene detto *esoenergetico*. Questo è quello che accade nelle esplosioni (per es. proiettile sparato da un cannone) o nei decadimenti di particelle, in cui l'energia cinetica delle particelle emergenti dal decadimento è ottenuta a spese della massa della particella iniziale.

Tranne che in alcuni tipi di urti tra particelle elementari, i processi d'urto non sono mai perfettamente elastici, ma una piccola parte di energia cinetica viene trasformata in altri tipi di energia, in energia non meccanica. Quando questa perdita di energia può essere trascurata rispetto all'energia cinetica totale del sistema, allora l'urto si può considerare elastico.

In un urto anelastico non tutta l'energia cinetica può essere trasformata in energia non meccanica, ma solo la parte compatibile con la conservazione della quantità di moto totale. Il teorema di Konig ci dice che l'energia cinetica di un sistema di particelle può essere espressa come somma dell'energia cinetica del centro di massa più l'energia cinetica delle particelle determinata dal loro moto rispetto al centro di massa.

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{P}} &= \text{cost} \\ \bar{\mathbf{P}} &= M\bar{\mathbf{v}}_{\text{CM}} \\ \bar{\mathbf{v}}_{\text{CM}} &= \text{cost}\end{aligned}$$

Per il teorema di Konig  
$$K = \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2 + K'$$
dove  $K'$  è l'energia cinetica  
misurata nel sistema del CM

se  $v_{\text{CM}} = \text{cost}$   
al più  $K'$  può annullarsi  
$$K' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

In un urto (sia esso elastico o anelastico) in cui si conserva la quantità di moto del sistema formato dalle due particelle interagenti, il centro di massa continua a muoversi con la stessa velocità che aveva prima dell'urto, cosicché la sua energia cinetica non varia durante l'urto. Ciò che può variare è l'energia cinetica legata al moto rispetto al centro di massa.

In un urto **completamente anelastico**, tutta l'energia cinetica del moto rispetto al centro di massa viene persa. Ma  $K'$  si può annullare se e solo se le velocità di entrambe le particelle rispetto al centro di massa,  $v_1'$  e  $v_2'$ , sono nulle. Perciò le due particelle dopo un urto completamente anelastico restano unite e si muovono con la velocità

del centro di massa(\*)).

$$K' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad v_1' = 0$$

$$K' = 0 \quad v_2' = 0$$

Nota Bene: non c'è alcuna relazione tra la conservazione dell'energia cinetica e quella della quantità di moto. Ovviamente ci sono degli urti elastici in cui si conserva anche la quantità di moto, ma ci sono anche degli urti elastici in cui non si conserva la quantità di moto (per esempio l'urto di una palla contro una parete), come pure ci sono urti in cui si conserva la quantità di moto e non l'energia cinetica (tipico è il caso degli urti anelastici, vedi per esempio il caso del pendolo balistico), così come ci possono essere urti in cui non si conserva né la quantità di moto né l'energia cinetica (è quello che succede in un pendolo balistico quando il proiettile viene sparato verticalmente dall'altro verso il basso).

### ***Urto completamente anelastico.***

In un urto completamente anelastico in cui si conserva la quantità di moto, le due particelle emergono dall'urto con la stessa velocità.

L'ulteriore condizione da utilizzare in questo caso è la seguente:

$$\vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2f} = \vec{v}_f$$

L'equazione che esprime la conservazione della quantità di moto diventa perciò:

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2) \vec{v}_f$$

Le incognite si sono ridotte a tre, le tre componenti della velocità  $\vec{v}_f$  che, avendo a disposizione tre equazioni, è

---

(\*) Si osservi che il centro di massa si trova sempre tra le due particelle sulla loro congiungente. Se nel momento dell'urto le due particelle vengono a contatto, la loro posizione coincide anche con la posizione del centro di massa. Se l'urto è completamente anelastico e quindi si annulla il moto rispetto al centro di massa, le due particelle restano attaccate e si muovono insieme al centro di massa.



possibile determinare in ogni caso. Un urto completamente anelastico in cui si conserva la quantità di moto è sempre risolvibile.

Dall'equazione precedente possiamo determinare la velocità  $\bar{\mathbf{v}}_f$ :

$$\bar{\mathbf{v}}_f = \frac{m_1 \mathbf{v}_{1i} + m_2 \mathbf{v}_{2i}}{m_1 + m_2}$$

la velocità finale delle due particelle che dopo l'urto si muovono attaccate, e quindi con la velocità del centro di massa, coincide proprio con la velocità che il centro di massa aveva prima dell'urto.

### **Il pendolo balistico**

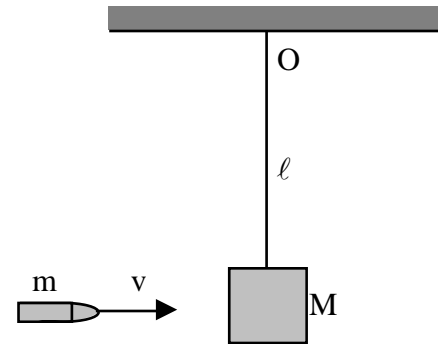
Un esempio di urto completamente anelastico è dato dal pendolo balistico, strumento che veniva usato per misurare la velocità di uscita di un proiettile da un'arma da fuoco.

Il pendolo balistico è costituito da un corpo facilmente deformabile, un pezzo di legno o un sacchetto pieno di sabbia, di massa  $M$ , molto più grande rispetto alla massa  $m$  del proiettile, sospeso ad un punto  $O$  mediante una corda di lunghezza  $\ell$ .

Inizialmente il blocco di massa  $M$  è fermo nella sua posizione di equilibrio. Il proiettile di massa  $m$  viene sparato orizzontalmente contro il blocco di massa  $M$ .

Quando il proiettile urta con il blocco di massa  $M$ , penetra in esso, e, nel penetrare, riduce la sua velocità rispetto al blocco fino ad annullarla. Dopo l'urto, proiettile e blocco si muovono con la stessa velocità.

A seguito dell'urto, il pendolo comincia ad oscillare. Se si misura l'ampiezza delle oscillazioni, se si conoscono gli altri parametri del problema, la massa  $M$  del blocco, la massa  $m$  del proiettile, la lunghezza  $\ell$  del pendolo, e si trascura la resistenza dell'aria, allora è possibile determinare la velocità iniziale del proiettile.



### Risoluzione.

Innanzitutto bisogna suddividere il problema in due fasi distinte e separate: la prima è la fase dell'urto, la seconda riguarda l'oscillazione del pendolo. Queste due fasi vanno risolte separatamente utilizzando in ciascuna fase le opportune leggi del moto.

Fase 1: l'urto.

Cerchiamo di caratterizzare l'urto.

L'osservazione che dopo l'urto il proiettile di massa  $m$  e il blocco di massa  $M$  si muovono con la stessa velocità ci fa capire che, dal punto di vista dell'energia, l'urto è completamente anelastico.

Per stabilire il comportamento della quantità di moto, dobbiamo determinare e analizzare le forze esterne agenti sul sistema di punti materiali (corpi) che subiscono il processo d'urto.

Per prima cosa va definito il sistema di punti materiali che subiscono il processo d'urto: sono il proiettile di massa  $m$  e il blocco di massa  $M$ .

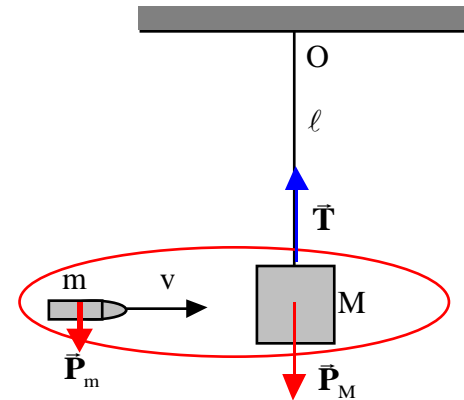
Quindi, le forze esercitate al momento dell'urto dal proiettile sul blocco e quella del blocco sul proiettile rappresentano le forze interne, tutte le altre forze agenti o sul proiettile o sul blocco costituiranno invece le forze esterne, in quanto generate da corpi non facenti parte del sistema di punti materiali precedentemente definito.

Le forze esterne saranno quindi:

- La forza peso agente sul proiettile (dovuta alla terra)
- La forza peso agente sul blocco (dovuta alla terra)
- La tensione  $T$  agente sul blocco (dovuta alla corda)

Le due forze peso non avranno durante l'urto un comportamento impulsivo. Le loro intensità, infatti, saranno rispettivamente sempre uguali a  $mg$  ed  $Mg$  sia prima, che durante, ma anche dopo l'urto.

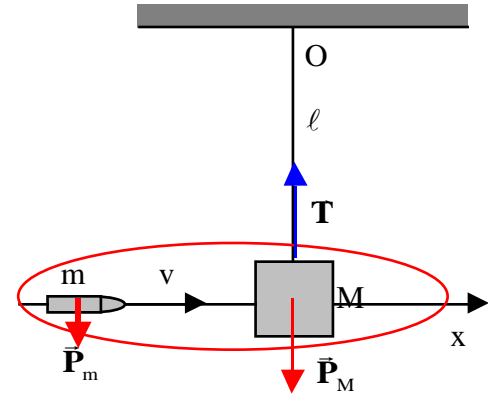
Per quanto riguarda invece la tensione esercitata dalla corda, poiché non siamo in grado di valutare a priori la sua intensità durante l'urto, ci potremmo attendere un comportamento di tipo impulsivo. Non sono dunque verificate le condizioni per applicare la conservazione della quantità di moto.



In questo caso però possiamo stabilire a priori la direzione della tensione durante l'urto. In base all'osservazione che l'urto dura pochissimo, sappiamo che durante l'urto il blocco di massa  $M$  praticamente non si sposta dalla posizione occupata prima dell'urto e, quindi, anche la corda resta verticale durante l'urto.

Ci troviamo perciò nelle condizioni di poter applicare la conservazione parziale della quantità di moto. In questo caso avremo la conservazione della quantità di moto orizzontale, perpendicolarmente alla tensione che è verticale, ed in particolare quella lungo l'asse  $x$  avente la stessa direzione e verso della velocità del proiettile:

$$P_{1xi} + P_{2xi} = P_{1xf} + P_{2xf}$$



Dobbiamo infine fare attenzione a quali istanti si riferiscono gli indici  $i$  ed  $f$  della relazione precedente. Essendo in presenza di forze esterne, allora la quantità di moto iniziale sarà quella valutata proprio all'inizio dell'urto, mentre la quantità di moto finale sarà quella valutata immediatamente dopo l'urto. Si osservi che, nell'ipotesi in cui ci siamo messi di trascurare la resistenza dell'aria, la forza peso agente sul proiettile prima dell'urto, essendo verticale, non fa variare la quantità di moto orizzontale del proiettile, che quindi si mantiene costante dal momento dello sparo fino all'urto con il blocco. Si osservi inoltre che durante l'urto, a causa della sua brevissima durata il blocco di massa  $M$  rimane nella sua posizione e quindi la corda resta verticale. Indicando con  $V_x$  la componente lungo l'asse  $x$  della velocità comune del blocco più proiettile subito dopo l'urto, la relazione che esprime la conservazione della quantità di moto lungo l'asse  $x$  si può scrivere:

$$mv = (M + m)V_x$$

da cui la velocità comune dopo l'urto è data da:

$$V_x = \frac{mv}{M + m}$$

La componente  $x$  della velocità finale  $V_x$  è positiva, il che vuol dire che il blocco più il proiettile si muovono nel verso positivo dell'asse  $x$ , cioè nello stesso verso della velocità iniziale  $v$ .

Dopo l'urto, l'oggetto costituito dal pendolo e dal proiettile possiede una energia cinetica data da:

$$K_f = \frac{1}{2} (M + m) V_x^2 = \frac{1}{2} (M + m) \frac{mv^2}{M + m} = \frac{1}{2} \frac{m^2 v^2}{M + m}$$

Se confrontiamo energia cinetica finale con quella posseduta dai due corpi prima dell'urto,  $K_i = \frac{1}{2} mv^2$  (3), ci accorgiamo che è diminuita:

$$K_f = \frac{1}{2} mv^2 \frac{m}{M + m} = K_i \underbrace{\frac{m}{M + m}}_{\text{minore di 1}}$$

L'energia cinetica persa nell'urto si ottiene attraverso la relazione:

$$K_{\text{persa}} = K_i - K_f = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv^2 \frac{m}{M + m} = \frac{1}{2} mv^2 \left( 1 - \frac{m}{M + m} \right) = \frac{1}{2} mv^2 \underbrace{\frac{M}{M + m}}_{\substack{\text{se } m \ll M \text{ questo} \\ \text{termine è } 1}}$$

Da cui si vede che, se la massa del proiettile è molto più piccola della massa del blocco, quasi tutta l'energia cinetica iniziale viene dissipata durante l'urto.

Poiché sappiamo che anche per i sistemi di punti materiali vale il teorema delle forze vive, la variazione dell'energia cinetica è dovuta in questo caso al lavoro fatto dalle forze interne mentre il proiettile penetra nel blocco (si osservi che le forze esterne sono tutte perpendicolari agli spostamenti per cui il loro lavoro è nullo). Le forze interne di interazione tra il proiettile ed il blocco al momento dell'urto possono essere identificate come forze di attrito dinamico che si oppongono alla penetrazione del proiettile nel blocco. Poiché il lavoro delle forze interne è dato dal prodotto dell'intensità di una delle due forze per la penetrazione del proiettile nel blocco di legno, utilizzando questa espressione e conoscendo la penetrazione del proiettile si può stimare l'intensità della forza di interazione.

---

<sup>3</sup> Abbiamo trascurato in questo caso la componente verticale della velocità dovuta all'azione della forza peso sul proiettile dal momento dello sparo al momento dell'impatto sul blocco di massa M.

Fase 2: L'oscillazione del pendolo.

Dopo l'urto, il pendolo comincia ad oscillare. In questo caso il moto avviene sotto l'azione della forza peso, che è conservativa, e della tensione  $T$  che non lo è.

In questa seconda fase possiamo studiare il moto con la conservazione dell'energia. Poiché sono presenti forze non conservative avremo che:

$$E = W_{nc} = W_T$$

Il lavoro fatto dalla tensione è nullo, perché come mostrato nella figura, la tensione, diretta lungo il raggio, è sempre perpendicolare allo spostamento che invece è tangente alla traiettoria circolare di raggio e centro in  $O$ .

Pertanto, durante il moto del pendolo si conserva l'energia meccanica totale.

Imponiamo quindi la conservazione dell'energia per determinare l'ampiezza delle oscillazioni del pendolo, ossia l'angolo  $\theta$ , rispetto alla verticale, che la corda raggiunge prima di invertire il moto.

$$E_i = E_f$$

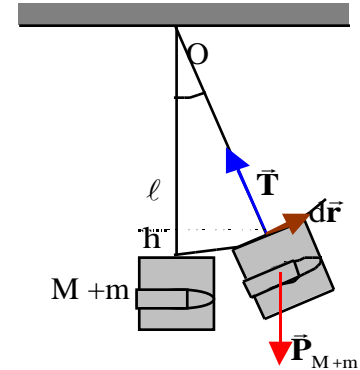
Si ponga estrema attenzione al fatto che nella formula precedente gli indici  $i$  (iniziale) ed  $f$  (finale) individuano due stati completamente diversi da quelli considerati nella risoluzione dell'urto. In questo caso infatti lo stato iniziale coincide con la stato immediatamente successivo all'urto, quando la corda è ancora verticale,  $\theta = 0$ , e il corpo di massa  $M+m$  si muove con la velocità  $V_x$ , la velocità subito dopo l'urto, determinata precedentemente. Lo stato finale coincide con la posizione estrema raggiunta dal pendolo prima di invertire il suo moto. In questa posizione, la velocità del pendolo è nulla.

La variazione di quota subita dal pendolo, rispetto alla posizione di equilibrio, supponendo trascurabili le dimensioni del blocco rispetto alla lunghezza della corda, è data da  $h = \ell(1 - \cos \theta)$ .

Se si assume uguale a zero l'energia potenziale del pendolo quando la corda è verticale,  $\theta = 0$ , l'energia potenziale quando la corda forma l'angolo  $\theta$  con la verticale è data da:

$$U_f = (M + m)gh = (M + m)g\ell(1 - \cos \theta)$$

La legge di conservazione dell'energia meccanica diventa:



$$E_i = E_f$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$\frac{1}{2}(M + m)V_x^2 + 0 = 0 + (M + m)g\ell(1 - \cos \theta)$$

che, sostituendo l'espressione di  $V_x$  determinata risolvendo l'urto, diventa:

$$\frac{1}{2} \frac{m^2 v^2}{M + m} = (M + m)g\ell(1 - \cos \theta)$$

da cui possiamo ricavare la relazione che lega la velocità del proiettile all'ampiezza delle oscillazioni del pendolo.

$$v = \frac{M + m}{m} \sqrt{2g\ell(1 - \cos \theta)}$$

Se si misura l'angolo  $\theta$ , cioè l'ampiezza delle oscillazioni del pendolo, e conoscendo tutte le altre quantità, si può risalire alla velocità del proiettile.

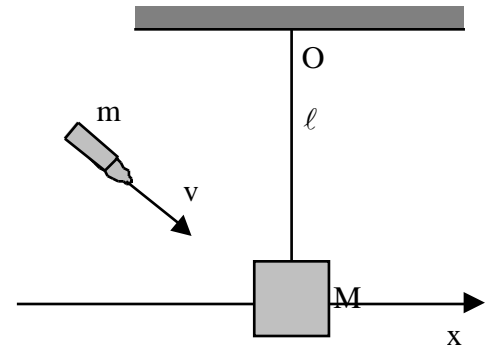
### **Ulteriori considerazioni sul pendolo balistico.**

Dalla discussione fatta nel paragrafo precedente, appare che nel caso del pendolo balistico, si ha la conservazione della quantità di moto. Infatti se si trascura la piccola componente verticale della quantità di moto acquisita dal proiettile per l'azione della forza peso nel tragitto tra la canna dell'arma da fuoco e il punto di impatto con il blocco, la quantità di moto iniziale è puramente orizzontale che, come già discusso, si conserva.

Ma cambiando leggermente la geometria del problema si passa da una situazione in cui si conserva la quantità di moto ad una in cui non si conserva.

E' sufficiente, infatti, sparare il proiettile contro il blocco non orizzontalmente, ma con un'inclinazione dall'alto verso il basso.

Noi esamineremo in dettaglio il caso estremo in cui il proiettile viene sparato verticalmente dall'alto verso il basso. Prima dell'urto la quantità di moto iniziale è diversa da zero, e diretta verticalmente verso il basso. Dopo l'urto o la



corda si spezza, oppure, se la corda resiste, il proiettile si ferma all'interno del blocco che resta fermo nella posizione che aveva prima dell'urto.

La quantità di moto finale è dunque nulla. non si ha la conservazione della quantità di moto

Ma anche l'energia cinetica finale è nulla. Quindi in quest'urto non si conserva né la quantità di moto, né l'energia cinetica.

Il fatto che la quantità di moto non si conservi si può far risalire alla presenza di una forza esterna impulsiva durante l'urto.

Abbiamo già osservato che un possibile esito dell'urto è la rottura della corda. Una corda si rompe se la tensione al suo interno supera un valore critico caratteristico della corda stessa. Quindi il fatto che la corda a seguito dell'urto può rompersi è un indizio del fatto che durante l'urto la tensione si comporta come una forza impulsiva con un'intensità che diventa molto grande tale da superare la tensione di rottura.

Cerchiamo di capire, con l'aiuto delle leggi di Newton, cosa succede alla corda durante l'urto.

Consideriamo il blocco di massa  $M$ .

Durante l'urto, sul blocco di massa  $M$  agiscono la forza peso, la tensione  $\mathbf{T}$  e la forza di interazione  $\mathbf{F}_{Mm}$  esercitata dal proiettile. Quest'ultima è una forza impulsiva.

Se la corda è ideale, allora la sua lunghezza deve restare costante e, di conseguenza, il blocco di massa  $M$  rimanere fermo (quindi la sua accelerazione sarà nulla).

$$\vec{\mathbf{T}} + \vec{\mathbf{P}}_M + \vec{\mathbf{F}}_{Mm} = M\vec{\mathbf{a}} = 0$$

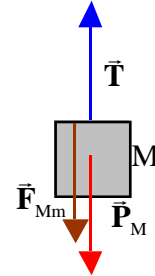
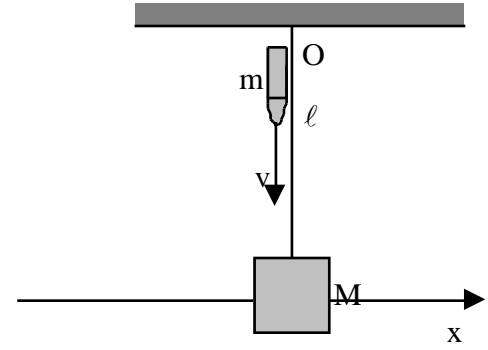
Proiettando su un asse verticale si ottiene:

$$T - Mg - F_{Mm} = 0 \quad T = Mg + F_{Mm}$$

Da cui appare che l'intensità della tensione  $T$  durante l'urto è uguale all'intensità della forza di interazione tra il proiettile e il blocco. Poiché questa forza è impulsiva, anche la tensione  $T$  durante l'urto ha un carattere impulsivo.

La quantità di moto non si conserva.

Concludendo queste considerazioni osserviamo che se il proiettile viene sparato lungo una direzione inclinata



rispetto all'orizzontale, dall'alto verso il basso, si conserverà solo la componente orizzontale della quantità di moto.

**Calcolo della tensione nella corda di un pendolo balistico.**

Tornando al problema del pendolo balistico classico, quando cioè il proiettile viene sparato orizzontalmente, vale la pena di valutare il valore della tensione nella corda subito prima e subito dopo l'urto.

Subito prima dell'urto, il blocco di massa  $M$  si trova, fermo, nella sua posizione di equilibrio. Su di esso agiscono il peso e la tensione.

La seconda legge di Newton, vale:

$$\vec{T} + \vec{P}_M = M\vec{a}$$

Dato che il corpo è fermo nella sua posizione di equilibrio, l'accelerazione è nulla e l'equazione precedente diventa:

$$\vec{T} + \vec{P}_M = 0$$

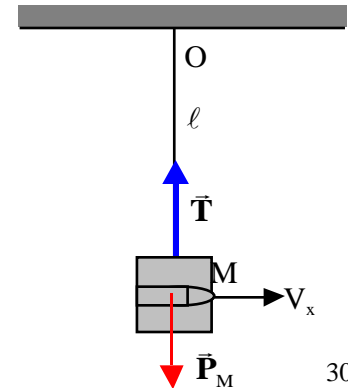
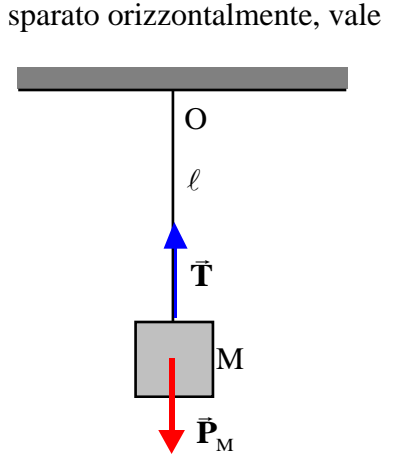
Proiettando lungo la direzione verticale otteniamo:

$$T - Mg = 0 \quad T = Mg$$

In questo caso la tensione  $T$  è pari al peso del corpo.

Subito dopo l'urto il pendolo si trova ancora nella stessa posizione, perché data la brevissima durata dell'urto, non ha avuto modo di spostarsi dalla posizione in cui si trovava prima dell'urto. L'unica differenza rispetto al caso precedente è che il blocco più il proiettile sono in moto con la velocità  $V_x$ , velocità che abbiamo già determinato risolvendo l'urto.

Essendo il corpo in moto, non possiamo più affermare che la sua accelerazione è nulla. In effetti, osservando che la traiettoria del blocco è una traiettoria circolare con centro in  $O$ , di certo ci sarà una accelerazione centripeta diretta verso il centro della traiettoria  $O$ . Nella posizione in cui noi vogliamo calcolare la tensione, per





=0, essa sarà diretta verticalmente verso l'alto e varrà

$$a_c = a_y = \frac{V_x^2}{\ell} = \frac{m^2 v^2}{\ell(M+m)^2}$$

La seconda legge di Newton in questo caso vale:

$$\vec{T} + \vec{P}_M = (M+m)\vec{a}$$

Proiettando lungo la verticale possiamo calcolare il valore della tensione T:

$$T - (M+m)g = (M+m)a_y \quad T = (M+m)g + (M+m)\frac{m^2 v^2}{\ell(M+m)^2}$$

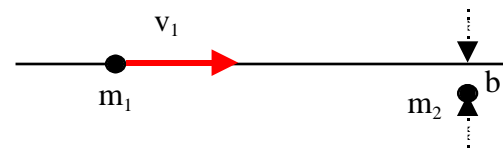
### **Urti in due dimensioni.**

Consideriamo, come caso particolare di un processo d'urto in due dimensioni, il caso in cui una particella, detta proiettile, si avvicina ad un'altra particella ferma, che viene chiamata bersaglio. Supporremo inoltre che non ci siano forze esterne agenti sulle particelle.

Quando la distanza tra le due particelle è molto grande non c'è interazione tra di esse, e quindi il proiettile, non essendoci forze agenti su di esso, si muove di moto rettilineo uniforme. Normalmente la retta su cui si muove la particella proiettile non passa per la posizione occupata dalla particella bersaglio. In questo caso si può individuare il piano che contiene la traiettoria della particella proiettile e la particella bersaglio. Il piano in questione corrisponde al piano della figura a lato.

La distanza della particella bersaglio dalla linea di volo (traiettoria) del proiettile viene chiamata parametro d'urto e si indica con la lettera b.

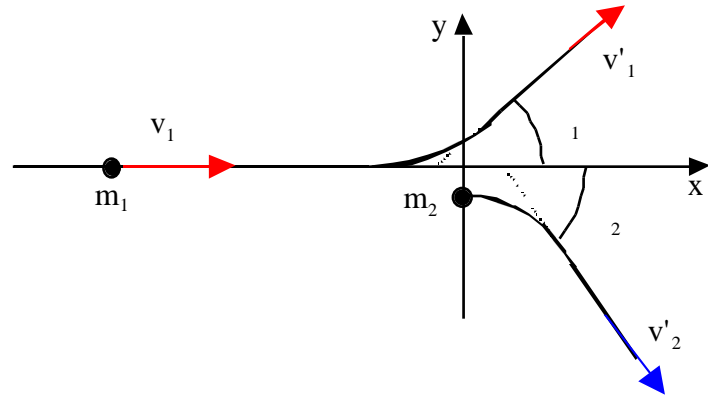
Quando la particella proiettile arriva nelle vicinanze del bersaglio, si ha l'interazione. Le forze di interazione tra le due particelle sono dirette lungo la congiungente le due particelle, quindi esse sono nel piano della figura. Le accelerazioni prodotte saranno anch'esse contenute nel piano della figura. Non ci sono componenti



dell'accelerazione perpendicolari al piano della figura e, dato che inizialmente non c'era moto delle due particelle perpendicolarmente al piano della figura, le due particelle, anche durante e dopo l'interazione, si muoveranno nello stesso piano.

A causa dell'interazione la particella proiettile devia dalla propria traiettoria, mentre quella bersaglio si mette in moto. Quando la distanza tra le due particelle diventa nuovamente abbastanza grande l'interazione si spegne: a quel punto le due particelle si muoveranno di moto rettilineo uniforme in due direzioni diverse nel piano della figura.

In questo urto, non essendoci forze esterne, si conserva la quantità di moto:



$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f}$$

Introducendo un sistema di riferimento nel piano del moto, che come abbiamo già osservato coincide con il piano della figura, con l'asse delle x parallelo e l'asse y perpendicolare alla traiettoria della particella incidente, indicando con  $v_1$  il modulo della velocità del proiettile e con  $v'_1$  e  $v'_2$  i moduli delle velocità delle due particelle dopo l'urto e con  $\theta_1$  e  $\theta_2$  gli angoli formati rispettivamente dalle traiettorie della particella 1 e 2 con la traiettoria della particella incidente così come mostrato in figura, le equazioni che rappresentano la conservazione della quantità di moto si possono scrivere nel seguente modo:

$$m_1 v_1 = m_1 v'_1 \cos \theta_1 + m_2 v'_2 \cos \theta_2$$

$$0 = m_1 v'_1 \sin \theta_1 - m_2 v'_2 \sin \theta_2$$

Rispetto all'asse y le due particelle vanno da parti opposte per garantire la conservazione della quantità di moto.

Le grandezze da determinare sono  $v'_1$ ,  $v'_2$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , avendo a disposizione solo due equazioni. A queste, se l'urto è elastico, si aggiunge la relazione:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

Quindi anche in questo caso, non è possibile determinare tutte le grandezze dello stato finale con le equazioni a disposizione: almeno una delle quattro grandezze dello stato finale va determinata sperimentalmente se l'urto è elastico, due se l'urto non è né elastico né completamente anelastico.

### **Urto centrale**

Se la traiettoria della particella proiettile passa per la particella bersaglio, il parametro d'urto  $b$  è uguale a zero. Le forze d'interazione, sempre dirette lungo la congiungente le due particelle, in questo caso avranno la direzione della traiettoria della particella proiettile.

Anche le accelerazioni avranno la stessa direzione, quella della traiettoria della particella proiettile.

Non ci saranno dunque accelerazioni perpendicolari alla direzione della traiettoria della particella proiettile. Poiché inizialmente non c'era moto trasversalmente alla traiettoria della particella proiettile, ne deriva che sia durante che dopo l'interazione non ci sarà moto trasversalmente alla traiettoria della particella proiettile: le due particelle, dopo l'interazione, si muoveranno lungo la retta coincidente con la traiettoria della particella proiettile.

Si tratta dunque di un urto unidimensionale.

In assenza di forze esterne si conserverà la quantità di moto totale del sistema:

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f}$$

Studieremo quest'urto nel sistema del Laboratorio, avente l'asse  $x$  coincidente con la retta con la traiettoria della particella proiettile. Siano  $m_1$  ed  $m_2$  le masse delle due particelle,  $v_{1x}$  la componente sull'asse delle  $x$  della velocità del proiettile, peraltro coincidente con il modulo  $v_1$ ,  $v'_{1x}$  e  $v'_{2x}$  le componenti sull'asse delle  $x$  delle velocità finali per le due particelle.

La relazione che esprime la conservazione della quantità di moto diventa:

$$m_1 v_{1x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}$$

Abbiamo in questo caso a disposizione una sola equazione e due incognite da ricavare, le componenti lungo l'asse

delle x delle velocità finali per le due particelle,  $v'_{1x}$  e  $v'_{2x}$ .

Per risolvere l'urto dobbiamo conoscere una delle due quantità dello stato finale, o in alternativa dobbiamo avere la possibilità di imporre qualche ulteriore condizione.

### Urto centrale elastico con particella 2 ferma.

Se l'urto è elastico, l'ulteriore condizione necessaria per la soluzione dell'urto centrale viene dalla conservazione dell'energia cinetica.

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1x}^2 = \frac{1}{2} m_1 v'_{1x}{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v'_{2x}{}^2$$

Le velocità possiedono solo la componente x, pertanto il quadrato modulo è in questo caso uguale al quadrato della componente.

Nel caso dell'urto centrale elastico con particella 2 ferma, sono disponibili due equazioni con due incognite, per cui è possibile determinare le grandezze dello stato finale una volta note quelle dello stato iniziale.

$$m_1 v_{1x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} \qquad \frac{1}{2} m_1 v_{1x}^2 = \frac{1}{2} m_1 v'_{1x}{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v'_{2x}{}^2$$

per arrivare alla soluzione, conviene innanzitutto semplificare  $\frac{1}{2}$  nella seconda equazione, e poi riscriverle nella seguente forma:

$$m_1 (v_{1x} - v'_{1x}) = m_2 v'_{2x} \qquad \text{da cui, dividendo la seconda per la prima, si ottiene} \qquad m_1 (v_{1x} - v'_{1x}) = m_2 v'_{2x}$$

$$m_1 (v_{1x}^2 - v'_{1x}{}^2) = m_2 v'_{2x}{}^2 \qquad v_{1x} + v'_{1x} = v'_{2x}$$

Sostituendo l'espressione di  $v'_{2x}$  fornito dalla seconda equazione nella prima, possiamo ricavare  $v'_{1x}$  in funzione di  $v_{1x}$ :

$$m_1 (v_{1x} - v'_{1x}) = m_2 v'_{2x} \qquad m_1 (v_{1x} - v'_{1x}) = m_2 (v_{1x} + v'_{1x}) \qquad m_1 v_{1x} - m_2 v_{1x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{1x}$$

$$v_{1x} + v'_{1x} = v'_{2x}$$

$$v'_{1x} = v_{1x} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

Usando il valore appena determinato per  $v'_{1x}$ , possiamo determinare quello di  $v'_{2x}$ , infatti:

$$v'_{2x} = v_{1x} + v'_{1x} = v_{1x} + v_{1x} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = v_{1x} \frac{m_1 + m_2 + m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = v_{1x} \frac{2m_1}{m_1 + m_2}$$

Riassumendo:

$$v'_{1x} = v_{1x} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \qquad v'_{2x} = v_{1x} \frac{2m_1}{m_1 + m_2}$$

$v'_{2x}$  ha lo stesso segno di  $v_{1x}$ , la particella bersaglio dopo l'urto si muove nello stesso verso della particella proiettile.

Se la massa del proiettile è maggiore di quella del bersaglio,  $m_1 > m_2$ , il segno di  $v'_{1x}$  è lo stesso di quello di  $v_{1x}$ : la particella proiettile prosegue il suo moto nello stesso verso che aveva prima dell'urto.

Se la massa del proiettile è minore di quella del bersaglio,  $m_1 < m_2$ , il segno di  $v'_{1x}$  è opposto a quello di  $v_{1x}$ : la particella proiettile dopo l'urto inverte il suo moto e procede in verso opposto a quello che aveva prima dell'urto.

Se infine la massa del proiettile è proprio uguale alla massa del bersaglio, il proiettile si ferma mentre la particella bersaglio parte con la velocità che il proiettile aveva prima dell'urto (le due particelle, identiche, si scambiano le velocità)

Riassumendo, si può affermare che la particella proiettile dopo l'urto:

$$\begin{array}{ll} \text{procede nello stesso verso che aveva prima dell' urto} & \text{se } m_1 > m_2 \\ \text{procede in verso opposto a quello che aveva prima dell' urto} & \text{se } m_1 < m_2 \\ \text{si ferma} & \text{se } m_1 = m_2 \end{array}$$

Nei casi estremi quando per esempio la massa del proiettile è molto maggiore di quella del bersaglio,  $m_1 \gg m_2$ , la velocità del proiettile dopo l'urto è quasi uguale a quella del proiettile prima dell'urto, è come se il proiettile proseguisse nel suo moto indisturbato; la particella 2 invece schizza via con una velocità doppia di quella che

aveva il proiettile prima dell'urto.

$$m_1 \gg m_2 \quad v'_{1x} = v_{1x} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \quad v_{1x} \frac{m_1}{m_1} = v_{1x} \quad v'_{2x} = v_{1x} \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \quad v_{1x} \frac{2m_1}{m_1} = 2v_{1x}$$

Se invece la massa del proiettile è molto minore di quella del bersaglio, il proiettile ritorna indietro con una velocità in modulo uguale a quella che aveva prima dell'urto, mentre la particella bersaglio resta ferma, praticamente indisturbata.

$$m_1 \ll m_2 \quad v'_{1x} = v_{1x} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \quad v_{1x} \frac{-m_2}{m_2} = -v_{1x} \quad v'_{2x} = v_{1x} \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \quad v_{1x} \frac{2m_1}{m_2} \approx 0$$

Questo è il caso di una molecola di gas che urta contro una parete del recipiente, o il caso di una palla che cade sul pavimento.

Da queste considerazioni appare che, se si vuol far perdere energia cinetica ad una particella, bisogna farla urtare contro un'altra particella avente all'incirca la sua stessa massa: abbiamo visto infatti che se le due particelle hanno esattamente la stessa massa e l'urto è centrale elastico, nell'urto le due particelle si scambiano le velocità. Pertanto, se la velocità della seconda particella era inizialmente nulla, si riesce a far perdere in un solo urto tutta l'energia cinetica alla particella incidente(\*). Quando invece la differenza di massa è notevole, l'energia cinetica trasferita dalla particella incidente alla particella bersaglio è sempre trascurabile sia se la particella incidente ha una massa maggiore di quella bersaglio che nel caso contrario.

Queste considerazioni sono quelle che guidano nella scelta della sostanza da usare come moderatore nei reattori nucleari. In un reattore avviene la fissione dell'uranio, cioè la scissione del nucleo dell' $^{235}\text{U}$  in due nuclei più leggeri provocata dall'interazione con un neutrone. A seguito della scissione vengono emessi dei neutroni che potrebbero essere usati a loro volta per produrre la rottura di ulteriori nuclei di uranio e dar luogo così alla reazione a catena. Si osserva sperimentalmente i neutroni più efficaci a produrre la rottura dei nuclei di uranio sono quelli cosiddetti termici, aventi cioè una bassa energia cinetica. I neutroni prodotti durante la fissione, invece, hanno un'energia cinetica piuttosto elevata e quindi risultano poco efficaci per dar luogo alla reazione a catena. Occorre

---

(\*) Se però le due particelle interagenti sono identiche e perciò indistinguibili e l'urto è centrale, neppure questo metodo è efficace nel degradare l'energia della particella incidente.

far perdere energia a questi neutroni: questo viene ottenuto facendoli urtare con i nuclei di una sostanza detta moderatore. Come moderatore viene usato il nucleo del carbonio, C, che ha una massa pari circa a 12 volte la massa del neutrone o l'acqua pesante con il deuterio al posto dell'idrogeno. La massa del nucleo del deuterio è circa due volte la massa del neutrone mentre quella del nucleo dell'ossigeno è pari a circa 16 volte la massa del neutrone.

### Generalizzazione dell'urto centrale elastico.

Le stesse considerazioni svolte nel paragrafo precedente circa la direzione delle forze di interazione tra le due particelle in un urto centrale con la particella 2 ferma, valgono anche quando entrambe le particelle si muovono con una velocità diretta lungo la retta congiungente la posizione della particella 1 e quella della particella 2. Anche in questo caso, dopo l'urto, le due particelle continueranno a muoversi lungo la traiettoria iniziale.

Consideriamo quindi un urto centrale elastico, che avviene in assenza di forze esterne, tra la particella 1 e 2 in cui entrambe le particelle si muovono inizialmente lungo la retta congiungente le loro posizioni. Facciamo coincidere questa retta con l'asse delle x e indichiamo con  $v_{1x}$  e  $v_{2x}$  le componenti lungo l'asse delle x delle velocità delle due particelle prima dell'urto e con  $v'_{1x}$  e  $v'_{2x}$  le corrispondenti quantità dopo l'urto.

Essendo assenti le forze esterne si conserverà la quantità di moto, ed essendo l'urto elastico si conserverà anche l'energia cinetica.

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} \qquad \frac{1}{2} m_1 v_{1x}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2x}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1x}'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2x}'^2$$

Per arrivare alla soluzione, conviene innanzitutto semplificare  $\frac{1}{2}$  nella seconda equazione, e poi riscriverle nella seguente forma:

$$\begin{aligned} m_1(v_{1x} - v'_{1x}) &= m_2(v'_{2x} - v_{2x}) & \text{oppure} & & m_1(v_{1x} - v'_{1x}) &= m_2(v'_{2x} - v_{2x}) \\ m_1(v_{1x}^2 - v_{1x}'^2) &= m_2(v_{2x}'^2 - v_{2x}^2) & & & m_1(v_{1x} - v'_{1x})(v_{1x} + v'_{1x}) &= m_2(v'_{2x} - v_{2x})(v'_{2x} + v_{2x}) \end{aligned}$$

da cui, dividendo la seconda per la prima, si ottiene

$$m_1(v_{1x} - v'_{1x}) = m_2(v'_{2x} - v_{2x})$$

$$v_{1x} + v'_{1x} = v'_{2x} + v_{2x}$$

La seconda può essere riscritta nella forma:

$$v_{1x} - v_{2x} = v'_{2x} - v'_{1x}$$

espressione che ci dice che la velocità con cui le particelle si avvicinavano prima dell'urto, è uguale alla velocità con cui si allontanano dopo l'urto.

Da questa espressione ricaviamo una delle due velocità finali per esempio  $v'_{1x}$ , e la sostituiamo nell'espressione della conservazione della quantità di moto:

$$m_1(v_{1x} - v'_{1x}) = m_2(v'_{2x} - v_{2x}) \quad m_1(v_{1x} - v'_{2x} - v_{2x} + v_{1x}) = m_2(v'_{2x} - v_{2x})$$

$$v'_{1x} = v'_{2x} + v_{2x} - v_{1x}$$

$$m_1 v'_{2x} + m_2 v'_{2x} = m_2 v_{2x} - m_1 v_{2x} + 2m_1 v_{1x}$$

$$v'_{2x} = v_{1x} \frac{2m_1}{m_1 + m_2} + v_{2x} \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$$

da cui possiamo ricavare la velocità finale della particella 2,  $v'_{2x}$ :

$$v'_{2x} = v_{1x} \frac{2m_1}{m_1 + m_2} + v_{2x} \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$$

Sostituendo nell'espressione per  $v'_{1x}$ , si ottiene:



$$v'_{1x} = v'_{2x} + v_{2x} - v_{1x}$$

$$v'_{1x} = v_{1x} \frac{2m_1}{m_1 + m_2} + v_{2x} \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} + v_{2x} - v_{1x}$$

$$v'_{1x} = \frac{2m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} - m_1 v_{2x} + m_1 v_{2x} + m_2 v_{2x} - m_1 v_{1x} - m_2 v_{1x}}{m_1 + m_2}$$

$$v'_{1x} = v_{1x} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + v_{2x} \frac{2m_2}{m_1 + m_2}$$

Se le particelle hanno la stessa massa, nell'urto si scambiano le velocità:

$$m_1 = m_2 \quad \begin{array}{l} v'_{1x} = v_{2x} \\ v'_{2x} = v_{1x} \end{array}$$

Pertanto, se la particella 2 inizialmente era ferma, la particella 1 dopo l'urto si ferma, mentre la particella 2 schizza via con la stessa velocità che aveva la particella 1, come abbiamo già visto nel paragrafo precedente.

# Corpi rigidi.

## **Introduzione.**

Per corpo rigido s'intende un particolare sistema di punti materiali in cui le distanze, tra due qualunque dei suoi punti, non variano nel tempo indipendentemente dalle condizioni in cui il corpo rigido si viene a trovare, in altri termini un corpo rigido non subisce alcuna deformazione anche se sottoposto a sollecitazioni estremamente elevate.

Si noti che un corpo rigido non può essere soggetto a moti che contemplino espansioni o compressioni del corpo stesso (per esempio maree, vibrazioni, ecc).

Il corpo rigido è chiaramente un'astrazione. Esistono in natura diversi corpi che in molte situazioni subiscono deformazioni trascurabili: si può, per esempio, far riferimento ai corpi solidi: una ruota, una sbarretta, un tavolo, l'anta di una porta, l'elica di un aereo o di una nave, un edificio, ecc.. Questi corpi, infatti, possono essere considerati, con buona approssimazione, rigidi.

In questi corpi la massa non sembra concentrata in un numero finito di punti, al contrario sembrano composti da un numero così grande di punti materiali, da poterlo considerare infinito. Peraltro, i diversi punti materiali sono così vicini uno all'altro che il corpo rigido può essere immaginato come una distribuzione continua di massa. Questo tipo di corpo rigido si indicherà perciò con l'aggettivo "continuo" per distinguerlo dai corpi rigidi costituiti da un numero finito di punti materiali per i quali si userà l'aggettivo 'discreti'.

La differenza tra i due tipi è che, nel caso di un corpo rigido discreto, per trovare i valori delle grandezze relativi all'intero corpo rigido, occorre fare delle sommatorie su un numero finito di termini, nel caso di un corpo rigido continuo, bisogna sommare su un numero infinito di termini (infinitesimi), il che equivale a fare un'operazione di integrazione. Nella nostra trattazione quindi faremo riferimento ai corpi rigidi discreti, formati in pratica da un numero finito di punti materiali, in quanto è più semplice trattare con sommatorie di un numero finito di termini: gli argomenti che tratteremo si applicano in ogni caso anche ai corpi rigidi continui a patto di sostituire le sommatorie con gli opportuni integrali.

Cominciamo con l'osservare, che ai corpi rigidi, così come a tutti i sistemi di punti materiali, si applicano la prima e la seconda equazione cardinale dei sistemi di punti materiali:

$$\frac{d\bar{\mathbf{P}}}{dt} = \bar{\mathbf{R}}^{\text{est}} \qquad \frac{d\bar{\mathbf{L}}}{dt} = \bar{\mathbf{M}}^{\text{est}}$$

Naturalmente il momento angolare e i momenti delle forze esterne vanno calcolati rispetto ad un punto fermo nel sistema di riferimento usato per descrivere il moto del corpo rigido (per esempio l'origine O del sistema di riferimento) oppure rispetto al centro di massa del corpo rigido.

Conviene osservare subito che, nel caso dei corpi rigidi, le forze interne non compiono lavoro: infatti, dalla definizione di corpo rigido deriva che le distanze tra due punti qualsiasi del corpo stesso rimangono invariate nel tempo, mentre il lavoro delle forze interne è proprio direttamente legato alle variazioni di tale distanza. Nel caso dei corpi rigidi dunque, solo le forze esterne compiono lavoro.

Accanto alle equazioni cardinali, per i corpi rigidi possiamo anche scrivere il teorema delle forze vive nella seguente forma:

$$K = W^{\text{est}}$$

Le due equazioni cardinali sono equazioni vettoriali e corrispondono quindi a sei equazioni scalari. Si noti che non vi compaiono le forze interne, ma soltanto la risultante delle forze esterne e il momento risultante delle forze esterne.

Abbiamo già osservato in precedenza che mentre nel caso del singolo punto materiale la relazione tra i momenti era equivalente alla seconda legge della dinamica, nel caso dei sistemi di punti materiali, ed in particolare dei corpi rigidi, le sei equazioni precedenti sono indipendenti tra loro.

Ciò può essere meglio compreso se si assume come polo il centro di massa. In tal caso la prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi consente di determinare la velocità del centro di massa. Nella seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi compaiono le velocità delle particelle rispetto al centro di massa, che non sono determinabili con la prima. Risolvendo la seconda equazione cardinale si ottengono delle informazioni in più che non sono ottenibili con la prima equazione.

In conclusione per studiare il moto dei corpi rigidi abbiamo a disposizione le due equazioni cardinali, corrispondenti a sei equazioni scalari.

Quante variabili, quante coordinate ci servono descrivere il moto di un corpo rigido nello spazio?

Noi sappiamo che per descrivere il moto nello spazio di un punto materiale servono tre coordinate: per un corpo

rigido composto da  $n$  punti materiali serviranno quindi  $3n$  coordinate (che diventano infinite se il corpo rigido è continuo e pertanto formato da un numero infinito di punti materiali).

Il problema non è risolvibile se  $n$  diventa grande? Osserviamo che le  $3n$  coordinate necessarie per descrivere il moto dei singoli punti del corpo rigido non sono tutte indipendenti: esistono delle relazioni tra esse proprio perché le distanze tra le coppie di punti del corpo rigido devono restare costanti. Queste relazioni riducono il numero delle coordinate necessarie per la descrizione del moto del corpo rigido.

Per determinare il numero di coordinate effettivamente necessario per descrivere il moto di un corpo rigido, vediamo prima come possiamo descriverlo.

Conviene introdurre la terna cartesiana solidale: essa ha l'origine coincidente con un punto particolare del corpo rigido, per esempio il centro di massa, e gli assi che passano, costantemente, per altri tre punti particolari, di riferimento, del corpo<sup>1</sup>, uno per ciascun asse. Se ad un certo istante si vuole sapere dove si trova l'asse  $x$  della terna solidale, basterà tracciare la retta che congiunge la posizione in quell'istante dell'origine della terna con la posizione del punto di riferimento sull'asse delle  $x$ . In maniera analoga si opera per gli altri assi.

Dalla definizione di corpo rigido deriva che la posizione di ogni punto del corpo rimane invariata in questa terna. Da questo discende che per descrivere il moto del corpo rigido è sufficiente descrivere il moto della terna solidale.

In realtà, per descrivere il moto di una terna basta descrivere il moto di tre punti: l'origine della terna, un punto sull'asse  $x$  e un punto sull'asse  $y$ . Se conosciamo la posizione di questi tre punti ad ogni istante di tempo allora potremo sempre ricostruire sia gli assi  $x$  e  $y$  della terna, ma anche l'asse  $z$ , in quanto resta univocamente determinato dalla regola della mano destra una volta specificato l'origine e il piano  $xy$ .

Se dunque noi siamo capaci di ricostruire, istante per istante, la posizione della terna solidale nello spazio, sfruttando il fatto che ogni punto del corpo rigido ha una posizione fissa nella terna solidale, dalla conoscenza della posizione di ciascun punto del corpo rigido rispetto alla terna solidale ad un particolare istante di tempo, per esempio all'istante  $t=0$ , potremmo determinare la sua posizione ad un qualunque istante successivo.

---

<sup>1</sup> La terna solidale non va confusa con il sistema di riferimento del centro di massa. Ricordiamo che il sistema di riferimento del centro di massa ha l'origine coincidente con il centro di massa del corpo rigido e gli assi costantemente paralleli a quelli del sistema del laboratorio. La terna solidale, per effetto del moto del corpo rigido, può cambiare l'orientazione dei propri assi rispetto a quelli della sistema del Laboratorio.

Appare quindi che descrivere il moto della terna solidale, e quindi dell'intero corpo rigido sia necessario descrivere come variano nel tempo la posizione di tre particolari punti del corpo rigido, l'origine della terna solidale, un punto di riferimento sull'asse delle  $x$  ed un punto sull'asse delle  $y$ . Abbiamo quindi bisogno di nove coordinate. In realtà, non tutte e nove sono indipendenti. Infatti, le distanze relative tra i tre punti devono restare costanti nel tempo come deriva dalla definizione di corpo rigido. Cioè:

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 &= d_{12}^2 \\(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 &= d_{13}^2 \\(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 &= d_{23}^2\end{aligned}$$

In definitiva, le coordinate effettivamente necessarie sono solo sei (nove coordinate meno tre relazioni): sono sufficienti sei quantità per descrivere il moto di un corpo rigido. Si dice in questo caso che il corpo rigido ha sei gradi di libertà<sup>2</sup>.

Noi abbiamo a disposizione le due equazioni cardinali della dinamica dei sistemi che sono equivalenti a sei equazioni scalari: ne deriva che il moto di un corpo rigido può essere determinato completamente.

### ***Moti di un corpo rigido.***

Cominciamo ad esaminare i casi particolari:

- 1) Moto di pura traslazione: tutte le particelle che costituiscono il corpo rigido subiscono lo stesso spostamento nello stesso intervallo di tempo. In altre parole, tutti i punti del corpo rigido si muovono con la stessa velocità, che è anche la velocità del centro di massa. La velocità dei vari punti del corpo rigido rispetto al centro di massa è nulla.

---

<sup>2</sup> Il numero di gradi di libertà di un sistema è uguale al numero di coordinate necessarie per descrivere il suo moto. Un punto materiale che si muove nello spazio ha tre gradi di libertà, un punto materiale che è costretto a muoversi in un piano, ha solo due gradi di libertà (sono sufficienti due coordinate per descrivere la sua posizione), un punto materiale che è costretto a muoversi lungo una retta, ha solo un grado di libertà (è sufficiente una sola coordinata per descrivere la sua posizione). Un corpo rigido libero di muoversi nello spazio ha sei gradi di libertà, un corpo rigido libero di ruotare attorno ad un asse fisso ha un solo grado di libertà (è sufficiente una sola coordinata, l'angolo di rotazione, per descrivere la sua posizione).

$$\vec{v}_i = \vec{v} = \vec{v}_{CM} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \vec{L}_{CM} = \sum_{i=1}^n \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_i = 0$$

In questo caso il momento angolare del corpo rigido rispetto al centro di massa è costantemente uguale a zero. La seconda legge cardinale della dinamica è quindi banalmente soddisfatta: non c'è moto attorno al centro di massa. Ci dice solo che il momento delle forze esterne rispetto al centro di massa è nullo.

Per descrivere il moto del corpo rigido è sufficiente descrivere il moto di un suo punto per esempio il moto del centro di massa, che può essere determinato dalla prima delle leggi cardinali della dinamica dei sistemi.

- 2) moto di pura rotazione attorno ad un asse fisso: tutti i punti del corpo rigido che si trovano sull'asse di rotazione hanno velocità nulla, sono fermi. Gli altri punti si muovono su piani perpendicolari all'asse di rotazione percorrendo traiettorie circolari con centro sull'asse di rotazione. La posizione del corpo rigido è descritta dall'angolo  $\theta(t)$ . Un solo angolo è sufficiente per determinare la posizione del corpo rigido. Infatti, in un fissato intervallo di tempo, tutti i punti devono essersi spostati dello stesso angolo rispetto alla posizione iniziale: è sufficiente dunque specificare la posizione angolare di un solo punto per rappresentare la posizione di tutti i punti. La velocità angolare

$$= \frac{d}{dt}$$

che dà la rapidità con cui l'angolo  $\theta(t)$  varia in funzione del tempo, e l'accelerazione angolare:

$$= \frac{d}{dt}$$

hanno lo stesso valore per tutti i punti del corpo rigido.

La velocità lineare invece dipende dalla posizione del punto considerato, essa è tangente alla traiettoria circolare percorsa dal punto considerato e il suo modulo può essere ottenuto moltiplicando il valore assoluto di  $\omega$  per il raggio della traiettoria circolare percorsa attorno all'asse di rotazione:

$$v = |\omega| R$$

Anche l'accelerazione lineare varia da punto a punto; essa ha due componenti:  
la componente tangenziale:

$$a_t = R$$

la componente radiale (centripeta) diretta verso l'asse di rotazione:

$$a_c = \omega^2 R$$

le quali sono entrambe proporzionali ad R, la distanza del punto considerato dall'asse di rotazione.

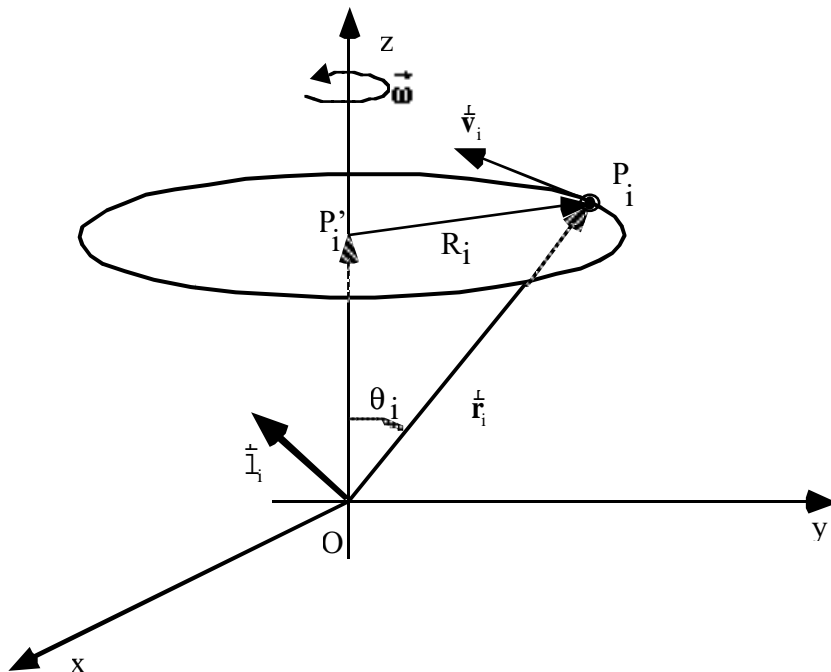
3) moto rototraslatorio: in generale il moto di un corpo rigido si potrà considerare come la sovrapposizione di un moto di traslazione, o moto del centro di massa, e di un moto di rotazione attorno al centro di massa.

### **Energia cinetica rotazionale e momento di inerzia.**

Consideriamo un sistema rigido composto da n particelle, ruotante attorno ad un asse fisso con velocità  $\omega$ . Indichiamo con  $\vec{r}_i$  il vettore posizione della i esima particella rispetto ad un'origine posta sull'asse di rotazione, mentre indichiamo con  $R_i$  la distanza della i esima particella dall'asse di rotazione e con  $m_i$  la sua massa. Il modulo della velocità della i esima particella è data da:

$$v_i = \omega R_i$$

La sua energia cinetica è data da:



$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2$$

L'energia cinetica totale del sistema rigido si ottiene sommando l'energia cinetica delle singole particelle:

$$K = \sum_{i=1}^n K_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \omega^2$$

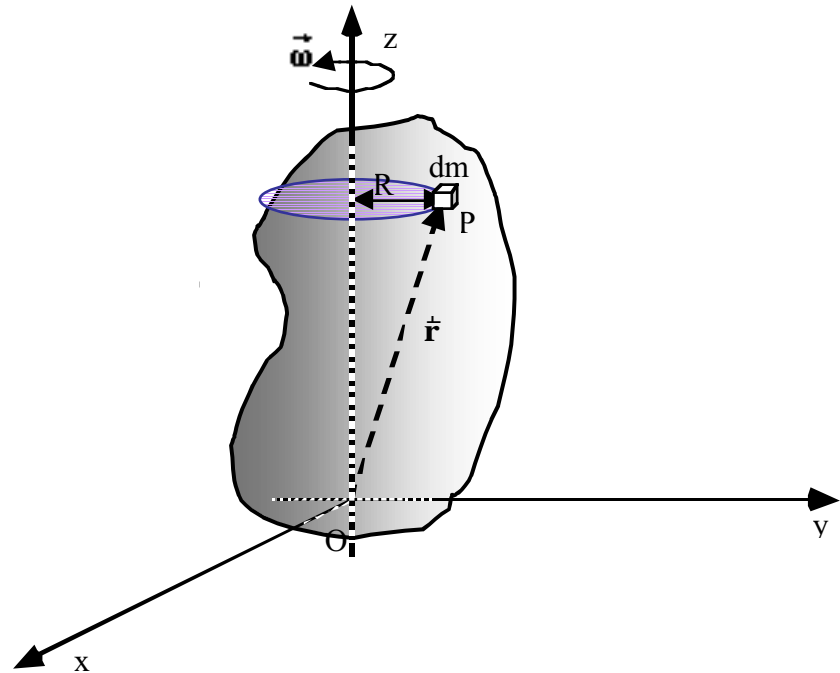
La quantità  $I = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2$  è detta **momento di inerzia** del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione. Il momento di inerzia  $I$  dipende dalla distribuzione della massa attorno all'asse di rotazione. La sue dimensioni sono:

$$[I] = [ML^2]$$

Nel SI le sue unità di misura sono  $\text{Kg m}^2$ .

Poiché in un corpo rigido le distanze dai vari punti materiali dall'asse di rotazione non variano col tempo, se l'asse di rotazione è fisso,  $I$  risulta costante.

Se la distribuzione di massa in un corpo rigido è





continua, per calcolare il momento di inerzia possiamo suddividere il corpo in elementi infinitesimi di volume  $dV$ , cui corrisponde una massa  $dm = \rho dV$ , dove  $\rho$  è la densità nel punto considerato. Indichiamo con  $R$  la distanza dell'elemento considerato dall'asse di rotazione. Il momento di inerzia del corpo rigido è dato da:

$$I = \int_{\text{tutto il corpo}} dm R^2$$

definizione che si ottiene dalla definizione del momento d'inerzia per i sistemi discreti sostituendo la sommatoria di un numero  $n$  termini con l'integrale, la somma sugli infiniti elementi (infinitesimi) in cui si pensa di suddividere l'intero corpo rigido continuo; alla massa  $m_i$  dell' $i$  esimo punto materiale, la massa  $dm$  contenuta nell'elemento considerato; alla distanza  $R_i$  dell' $i$  esimo punto materiale dall'asse di rotazione, la distanza  $R$  dell'elemento considerato dall'asse di rotazione.

$$I = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \quad \text{corpo rigido discreto}$$

$$I = \int_{\text{tutto il corpo}} dm R^2 \quad \text{corpo rigido continuo}$$

Confrontando l'espressione dell'energia cinetica di un corpo rigido in moto rotatorio attorno ad un asse fisso con quella dell'energia cinetica di un punto materiale in moto traslatorio:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{punto materiale}$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \text{corpo rigido}$$

ci rendiamo conto che, nei moti di rotazione, il momento di inerzia e la velocità angolare giocano lo stesso ruolo che avevano rispettivamente la massa  $m$  e la velocità lineare nel moto di traslazione di un punto materiale.

In un moto di rotazione l'energia cinetica dipende non soltanto dalla massa totale del corpo, ma anche da come questa massa è distribuita attorno all'asse di rotazione. Supponiamo per esempio di avere una sbarretta rigida di massa  $m$ : ci accorgiamo che occorre eseguire poco lavoro per portare la sbarretta in rotazione con velocità angolare

attorno ad un asse di rotazione coincidente con l'asse della barretta, mentre occorre molto più lavoro per farle acquistare la stessa velocità angolare quando l'asse di rotazione è perpendicolare all'asse della sbarretta e passa, per esempio, per il suo punto di mezzo: a parità di velocità angolare l'energia cinetica nel secondo caso è più grande dell'energia cinetica del primo. Infatti, nel primo caso la distanza media degli elementi di massa  $dm$  dall'asse di rotazione è piccola e questo corrisponde ad un piccolo momento di inerzia. Nel secondo caso invece la distanza degli elementi di massa dall'asse di rotazione è in media più grande e questo corrisponde ad un momento di inerzia più grande e quindi, a parità di velocità angolare, ad un'energia cinetica maggiore.

***Momento di inerzia di alcuni corpi rigidi omogenei.***

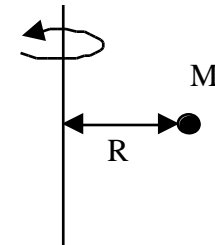
Momento di inerzia di un corpo rigido costituito da un unico punto materiale di massa  $M$  posto a distanza  $R$  dell'asse di rotazione.

Si tratta di un corpo rigido discreto costituito da un unico punto materiale,  $n=1$ .

Basta applicare la definizione b

del momento di inerzia per un corpo rigido discreto:

$$I = \sum_{i=1}^1 m_i R_i^2 = MR^2$$

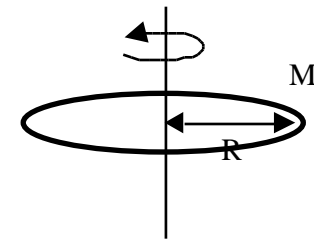


Anello omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R$ .

Calcolare il momento di inerzia di un anello omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R$  rispetto al suo asse.

Poiché l'anello è omogeneo, la densità lineare di massa è data dal rapporto tra la massa totale e la lunghezza della circonferenza.

$$= \frac{M}{2 R}$$



Consideriamo un tratto di anello di lunghezza  $d\ell$ , cui corrisponde un angolo al centro  $d$ , secondo la relazione  $d\ell = R d$ . La massa  $dm$  di quest'elemento vale:

$$dm = \frac{M}{2\pi R} R d = \frac{M}{2\pi} d$$

Il momento di inerzia  $I$  dell'anello rispetto al suo asse, è dato da:

$$I = \int_{\text{anello}} dm R^2 = \int_0^{2\pi} \frac{M}{2\pi} d R^2$$

in cui l'integrazione è fatta sull'angolo  $d$ . I limiti di integrazione per integrare su tutto l'anello sono 0 e  $2\pi$ . La quantità  $\frac{M}{2\pi} R^2$  non dipende da  $d$ , pertanto può essere portata fuori del segno di integrale:

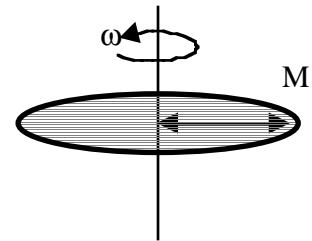
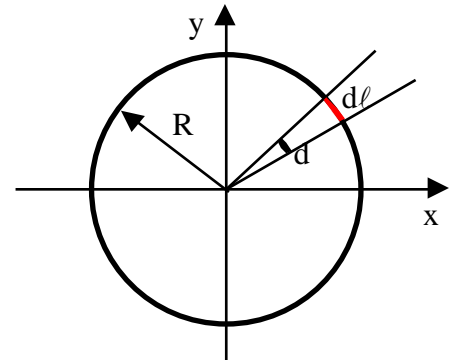
$$I = \frac{M}{2\pi} R^2 \int_0^{2\pi} d = \frac{M}{2\pi} R^2 [d]_0^{2\pi} = \frac{M}{2\pi} R^2 (2\pi - 0) = MR^2$$

Il momento di inerzia di un anello è uguale a quello di un punto materiale avente massa uguale alla massa totale dell'anello e posto ad una distanza dall'asse di rotazione pari al raggio dell'anello.

### Disco sottile omogeneo di massa $M$ e raggio $R$

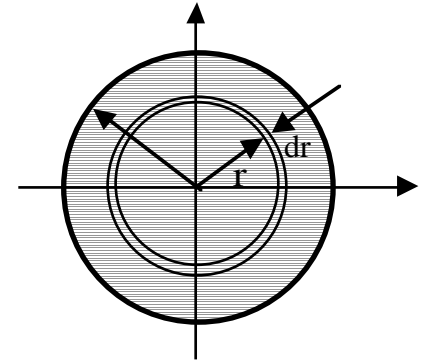
Calcolare il momento di inerzia di un disco sottile omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R$  rispetto al suo asse.

La densità superficiale del disco è costante e vale:



$$= \frac{M}{R^2}$$

Suddividiamo il disco in corone circolari infinitesime concentriche di spessore  $dr$ . Ogni corona circolare può essere considerata come un anello di massa  $dm = 2\pi r dr$  (l'area della corona circolare infinitesima, compresa tra i raggi  $r$  ed  $r+dr$ , può essere calcolata come l'area di un rettangolo avente base uguale alla circonferenza,  $2\pi r$ , ed altezza pari a  $dr$ ). Il momento di inerzia rispetto all'asse di quest'anillo infinitesimo,  $dI$ , è dato da:  $dI = 2\pi r dr r^2$ . Poiché gli assi dei vari anelli coincidono, il momento di inerzia del disco si ottiene sommando i contributi infinitesimi di tutte le corone circolari, cioè calcolando l'integrale tra 0 ed  $R$  di  $dI$ :



$$I = \int_0^R 2\pi r dr r^2 = 2\pi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \frac{M}{R^2} \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = 2\pi \frac{M}{R^2} \frac{R^4}{4} - 0 = \frac{1}{2}MR^2$$

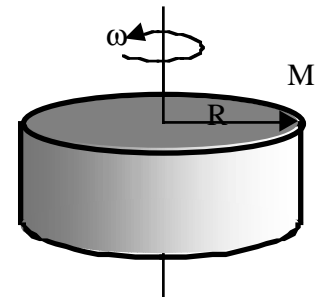
Cilindro omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R$  e altezza  $h$

Calcolare il momento di inerzia di un cilindro omogeneo rispetto al proprio asse.

La densità di massa è data da:

$$= \frac{M}{R^2 h}$$

Consideriamo un sistema di riferimento avente l'asse  $z$  coincidente con l'asse del cilindro e l'origine posta su una delle due basi. Suddividiamo il sistema in strati di spessore  $dz$  con piani perpendicolari all'asse del cilindro. Ogni



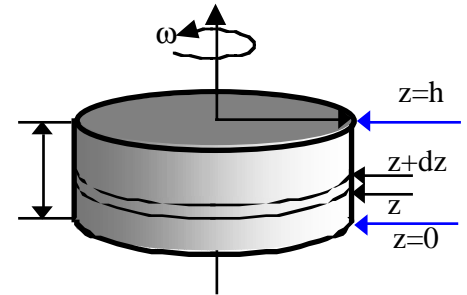
strato può essere considerato come un disco di massa  $dm = 2 R^2 dz$ .  
 Dall'esempio precedente sappiamo che il suo momento di inerzia è dato da:

$$dI = \frac{1}{2} dm R^2 = \frac{1}{2} dV R^2 = \frac{1}{2} \frac{M}{R^2 h} R^2 dz R^2 = \frac{1}{2} \frac{MR^2}{h} dz$$

Il momento di inerzia di tutto il cilindro si ottiene sommando su tutti gli strati infinitesimi, e cioè integrando su  $z$  da 0 ad  $h$ :

$$I = \underset{\text{cilindro}}{dI} = \int_0^h \frac{1}{2} \frac{MR^2}{h} dz = \frac{1}{2} \frac{MR^2}{h} \int_0^h dz = \frac{1}{2} \frac{MR^2}{h} [z]_0^h =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{MR^2}{h} (h - 0) = \frac{1}{2} MR^2$$



### Sfera omogenea di massa $M$ e raggio $R$

Calcolare il momento di inerzia di una sfera omogenea di massa  $M$  e raggio  $R$  rispetto ad un suo diametro, che assumiamo come asse  $z$  di un sistema di riferimento avente l'origine nel centro della sfera.

La densità è data da:

$$= \frac{M}{\frac{4}{3} R^3}$$

Possiamo dividere la sfera in strati di spessore infinitesimo  $dz$ . Ciascuno di essi si può considerare come un disco di raggio  $r = R \sin \theta$  e massa

$$dm = r^2 dz = R^2 \sin^2 \theta dz$$

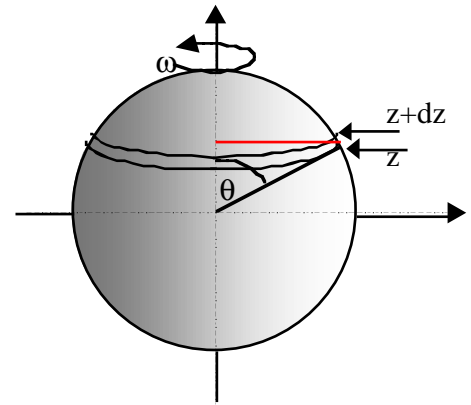
Il momento di inerzia di questo disco infinitesimo è dato da:

$$dI = \frac{dm r^2}{2} = \frac{(r^2 dz)(r^2)}{2} = \frac{(R^2 \sin^2 dz)(R^2 \sin^2)}{2} = \frac{R^4 \sin^4 dz}{2}$$

Osservando che  $\sin^2 = 1 - \cos^2$  e che  $\cos = \frac{z}{R}$ , si ottiene

$\sin^2 = 1 - \frac{z^2}{R^2}$ . Pertanto:

$$I = \int_{-R}^R \frac{R^4 \sin^4 dz}{2} = \int_{-R}^R \frac{R^4}{2} \left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right)^2 dz = \int_{-R}^R \frac{R^4}{2} \left(1 - \frac{2z^2}{R^2} + \frac{z^4}{R^4}\right) dz =$$



da cui:

$$\begin{aligned} &= \frac{R^4}{2} \int_{-R}^R \left( z - \frac{2z^3}{3R^2} + \frac{z^5}{5R^4} \right) dz = \frac{R^4}{2} \left[ R - \frac{2R^3}{3R^2} + \frac{R^5}{5R^4} - (-R) - \frac{2(-R)^3}{3R^2} + \frac{(-R)^5}{5R^4} \right] = \\ &= \frac{R^4}{2} \left[ 2R - \frac{2R^3}{3R^2} + \frac{R^5}{5R^4} \right] = R^5 \frac{15 - 10 + 3}{15} = \frac{8}{15} R^5 = \frac{8}{15} \frac{M}{\frac{4}{3} R^3} R^5 = \\ &= \frac{2}{5} MR^2 \end{aligned}$$

Concludendo il momento di inerzia di una sfera omogenea rispetto ad un suo diametro è dato da:

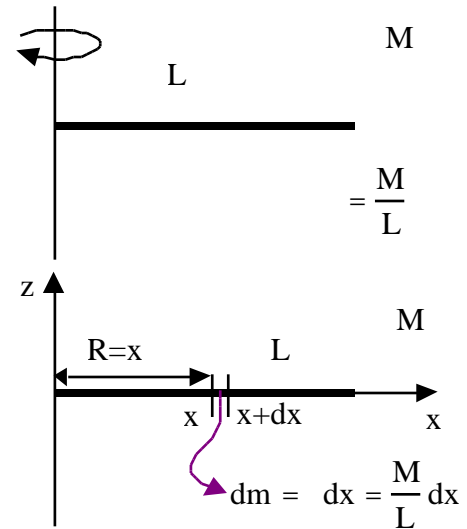
$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

Sbarra di massa M e lunghezza L (asse passante per l'estremo)

Calcoliamo il momento di inerzia di una sbarra omogenea di lunghezza L e massa M rispetto ad un asse passante per un estremo.

La densità lineare di massa è data da  $\lambda = \frac{M}{L}$ .

Per calcolare il momento di inerzia rispetto a un asse passante per un estremo della sbarra conviene scegliere un sistema di riferimento avente l'asse z coincidente con l'asse di rotazione e l'asse x coincidente con la sbarra: l'origine coincide pertanto con l'estremo della sbarra per il quale passa l'asse di rotazione. La coordinata x del generico punto della sbarra rappresenta la distanza dall'asse di rotazione. Consideriamo un tratto di sbarra tra x e x+dx, la sua massa è  $dm = \lambda dx$ , ed il corrispondente momento di inerzia è



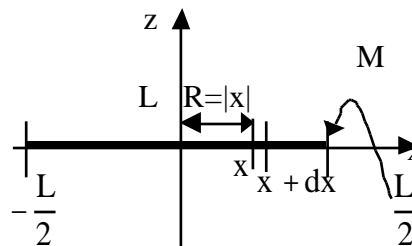
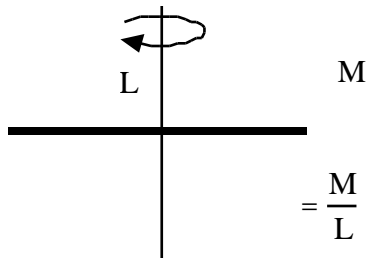
$$I = \int_{\text{sbarra}} dm R^2 = \int_0^L dx x^2 = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{M}{L} \frac{x^3}{3} \Big|_0^L = \frac{M}{L} \frac{L^3}{3} - 0 = \frac{1}{3} ML^2$$

Sbarra di massa M e lunghezza L (asse passante per il centro)

Per calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse passante per il centro della sbarra conviene scegliere la posizione dell'origine del sistema di riferimento coincidente con il centro della sbarra. In questo caso è il valore assoluto di x che rappresenta la distanza del generico punto della sbarra dall'asse di rotazione e per considerare

tutta la sbarra l'integrazione va fatta tra  $-\frac{L}{2}$  ed  $\frac{L}{2}$ .

$$I^* = \int_{\text{sbarra}} dm R^2 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx x^2 = \frac{M}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx = \frac{M}{L} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{M}{L} \left( \frac{L^3}{24} - \left(-\frac{L^3}{24}\right) \right) = \frac{M}{L} \frac{L^3}{12} = \frac{1}{12} ML^2$$



### **Teorema di Steiner.**

Il teorema di Steiner afferma che *il momento di inerzia di un corpo rispetto ad un asse qualunque è uguale alla somma del momento di inerzia rispetto ad un asse parallelo al primo ma passante per il centro di massa e di un termine pari al prodotto della massa totale del corpo per la distanza al quadrato tra i due assi:*

$$I = I^* + Mh^2$$

Verifichiamo il teorema di Steiner nel caso della sbarra di massa  $M$  e lunghezza  $L$  confrontando i momenti di inerzia valutati precedentemente, ossia quello rispetto ad un asse passante per l'estremo,  $I$ , e quello rispetto all'asse passante per il centro della sbarra,  $I^*$ .

Per il teorema di Steiner dovrebbe essere  $I = I^* + Mh^2 = I^* + M \frac{L}{2}^2$ , infatti:

$$I = I^* + Mh^2 = I^* + M \frac{L}{2}^2 = \frac{1}{12} ML^2 + \frac{1}{4} ML^2 = ML^2 \frac{1+3}{12} = \frac{1}{3} ML^2$$



Come si vede il teorema di Steiner è soddisfatto.

### ***Rotazione di un corpo rigido attorno ad un asse fisso.***

Prima di avventurarci nella ricerca dell'equazione o delle equazioni con cui studiare il moto di rotazione di un corpo rigido attorno ad un asse fisso, facciamo qualche considerazione per cercare di inquadrare il problema.

Innanzitutto noi non vogliamo affrontare il problema dei moti di rotazione del corpo rigido in generale, ma limitarci a considerare quei casi in cui l'asse di rotazione rimane fisso, in posizione e in direzione, nel sistema di riferimento utilizzato per descrivere il moto del corpo rigido, per esempio il sistema di riferimento del Laboratorio. Bisogna immaginare quindi che ci siano dei vincoli in grado di esercitare delle forze sull'asse di rotazione per garantire la sua staticità.

L'obiettivo che ci poniamo è quello di trovare una o più relazioni che, in maniera analoga a quanto è stato fatto nel caso del moto del punto materiale in cui la seconda legge di Newton lega le forze applicate (la causa) all'accelerazione del punto materiale (l'effetto), leghino le cause che producono il moto di rotazione (presumibilmente le forze applicate al corpo rigido) e l'effetto (la rotazione, presumibilmente l'accelerazione angolare che, come abbiamo già osservato, è un parametro comune a tutti i punti del corpo rigido).

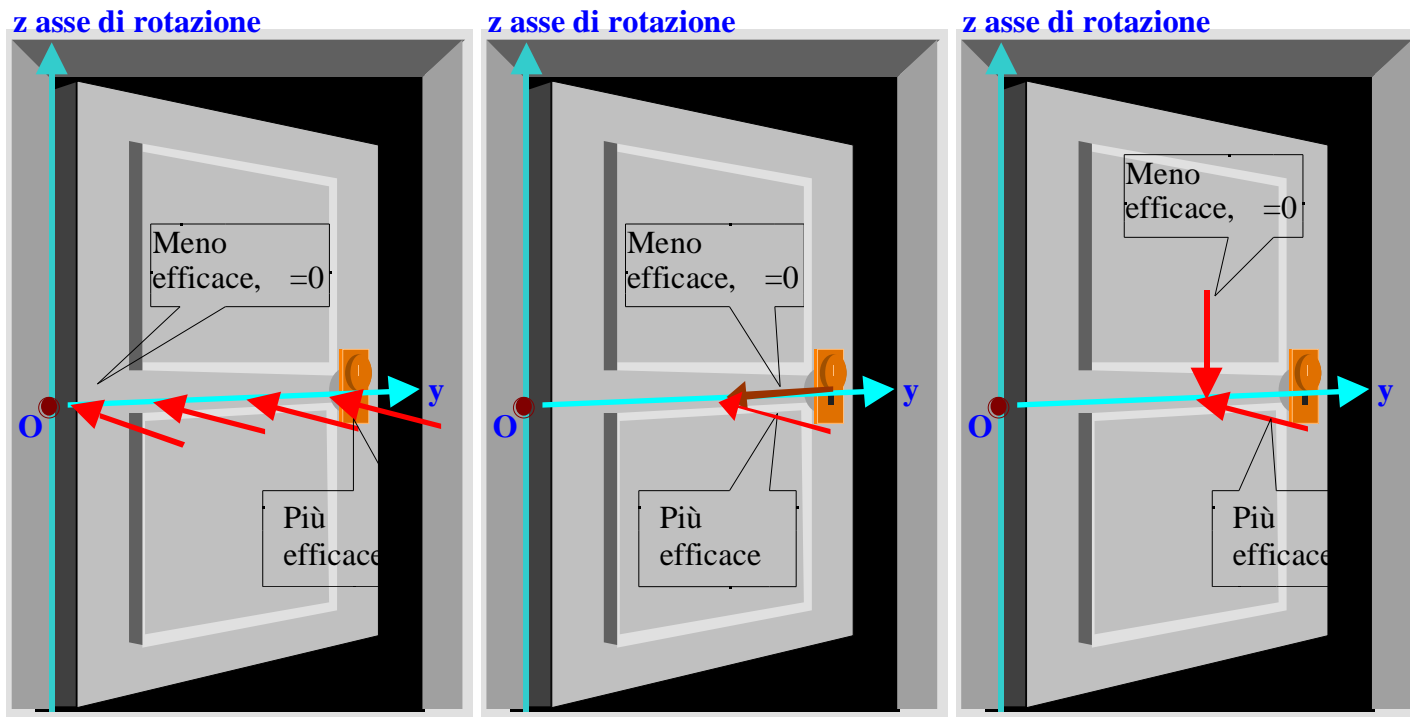
Quante equazioni ci servono per descrivere un moto di rotazione di un corpo rigido attorno ad un'asse fisso?

Sappiamo già che in un moto di rotazione di un corpo rigido attorno ad un asse fisso, la posizione del corpo consiste nella posizione angolare di uno qualsiasi dei suoi punti. Conoscendo, infatti, la posizione di uno qualsiasi dei punti del corpo rigido che non si trovi sull'asse di rotazione e sfruttando la condizione che il corpo è rigido è possibile determinare in qualsiasi istante la posizione di tutti i punti del corpo rigido.

Per dare concretezza a queste affermazioni possiamo immaginare di riferirci all'anta di una porta: questa, infatti, può essere immaginata come un corpo rigido libero di ruotare attorno ad un asse verticale fisso, i cardini. In questo caso è sufficiente dare, istante per istante, la posizione angolare della maniglia per sapere, istante per istante, la posizione, nello spazio, di ciascuno dei punti dell'anta.

In altri termini, un corpo rigido in rotazione attorno ad un asse fisso ha un solo grado di libertà.

E' sufficiente, pertanto, una sola equazione per determinare l'unica coordinata necessaria per descrivere il moto di rotazione del corpo rigido attorno all'asse fisso.



Se proviamo ad applicare delle forze all'anta della porta, limitandoci per il momento a considerare solo forze orizzontali, vale a dire perpendicolari all'asse di rotazione, ci accorgiamo che la forza non è la causa diretta dell'effetto prodotto: la rotazione dell'anta della porta. A parità d'intensità, possiamo notare che quando applichiamo la forza a punti dell'asse di rotazione, l'effetto prodotto è nullo: la porta non si sposta.

Per ottenere la rotazione dell'anta dobbiamo applicare la forza a punti che non si trovano sull'asse di rotazione. Inoltre, fissata l'angolo della forza con il piano della porta (per esempio supponiamo di applicare forze perpendicolari al piano della porta), l'effetto è tanto maggiore quanto più ci allontaniamo dall'asse di rotazione.

Una volta fissato il punto d'applicazione della forza, se facciamo variare l'angolo formato dalla forza con il piano dell'anta, in ogni caso sempre mantenendo la forza orizzontale e quindi perpendicolare all'asse di rotazione, ci accorgiamo che l'effetto della forza è nullo se la forza è contenuta nel piano dell'anta, è invece massimo se la forza è perpendicolare al piano dell'anta.

Possiamo quindi concludere due cose:

1. In un corpo rigido, la forza produce i suoi effetti su tutti i punti del corpo rigido e non solo sul particolare punto su cui è applicata.
2. Nel caso di un corpo rigido in rotazione attorno ad un asse fisso, gli effetti prodotti dalla forza sembrano legati al momento della forza rispetto ad un polo preso sull'asse di rotazione piuttosto che alla forza stessa. Infatti, il modulo del momento della forza calcolato rispetto al polo O è dato da:

$$M = rF\sin$$

che è nullo quando il punto di applicazione della forza si trova sull'asse di rotazione, diventa più grande quando aumenta la distanza del punto di applicazione dal polo O e quindi dall'asse di rotazione, è nullo se la forza è allineata con il segmento che congiunge il polo O con il punto di applicazione della forza, diventa più grande man mano che l'angolo formato dalla forza con questo segmento si avvicina a  $90^\circ$ .

Osserviamo infine che nei casi considerati il momento della forza è sempre diretto parallelamente all'asse di rotazione.

Finora abbiamo sempre considerato forze perpendicolari all'asse di rotazione. Se togliamo questa limitazione ed applichiamo, nel punto di applicazione prescelto, sempre la stessa forza ma variando l'angolo che essa forma con l'asse di rotazione facendo comunque in modo che l'angolo tra la forza e il segmento congiungente il polo O con il punto di applicazione della forza sia sempre di  $90^\circ$ . In questo modo il modulo del momento della forza rimane costante. Ci accorgiamo che l'effetto prodotto dalla forza dipende anche dall'angolo che forma con l'asse di rotazione: infatti, la forza non produce nessun effetto, nessuna rotazione, se è diretta verticalmente parallelamente all'asse di rotazione, mentre l'effetto è massimo quando la forza è orizzontale e quindi perpendicolare all'asse di rotazione.

Osserviamo che avendo preso la precauzione di applicare solo forze perpendicolari al segmento che congiunge il punto di applicazione della forza con il polo O, il modulo del momento è sempre lo stesso indipendentemente dall'angolo che la forza forma con l'asse di rotazione: ciò che cambia al variare di quest'angolo è la direzione del momento della forza e, di conseguenza la componente del momento della forza sull'asse di rotazione. Questa componente, infatti, è nulla quando la forza è parallela all'asse di rotazione ed è invece massima quando la forza è

perpendicolare all'asse di rotazione.

Possiamo a questo punto tirare le somme:

in un moto di rotazione di un corpo rigido attorno ad un asse fisso, l'effetto prodotto, cioè la rotazione, dipende non direttamente dalla forza applicata, ma **dalla componente lungo l'asse di rotazione del momento della forza calcolato rispetto ad un polo appartenente all'asse di rotazione.**

La componente lungo l'asse di rotazione del momento della forza, si chiama **momento assiale** o **momento torcente**.

Essa gode di una proprietà molto importante: si può dimostrare che essa è indipendente dal particolare punto dell'asse di rotazione scelto come polo per il calcolo dei momenti.

### **Momento assiale, o momento torcente, di una forza.**

Nel paragrafo precedente abbiamo definito momento assiale, o momento torcente, di una forza come la componente lungo l'asse di rotazione del vettore momento della forza calcolato rispetto ad un polo appartenente all'asse di rotazione.

Essendo quindi la componente di un vettore, il momento assiale è uno scalare.

Come si fa a calcolare il momento assiale o momento torcente di una forza?

Ci sono due metodi:

- a) Applicare la definizione precedente: si sceglie arbitrariamente un polo sull'asse di rotazione, tanto il momento assiale non dipende dal particolare polo scelto; si calcola il momento della forza rispetto a questo polo, in modulo, direzione e verso. Infine si determina la componente proiettando il vettore del momento della forza sull'asse di rotazione.
- b) In maniera alternativa si può procedere nel seguente modo:
  - a) si prende il modulo del vettore componente della forza,  $\vec{F}$ , perpendicolare all'asse di rotazione.
  - b) Si moltiplica tale modulo per il braccio della forza (la distanza tra la retta di azione del vettore componente della forza perpendicolare all'asse di rotazione e l'asse di rotazione, vedi la figura)

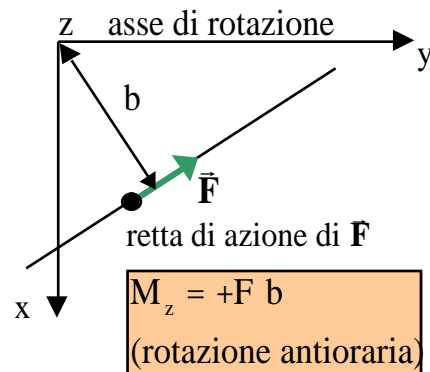
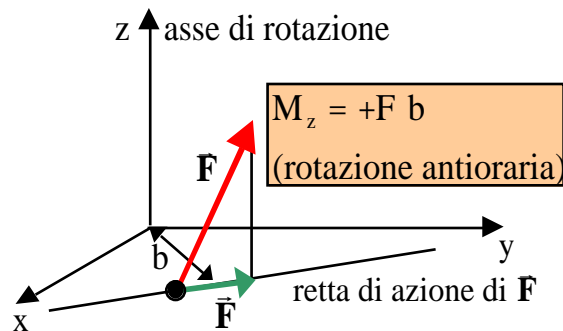
- c) Si assegna a questo prodotto il segno positivo se la forza produce una rotazione antioraria, negativo se la rotazione prodotta è oraria.

$$M_z = \begin{array}{ll} +F b & \text{rotazione antioraria} \\ -F b & \text{rotazione oraria} \end{array}$$

Come appare da quest'ultima espressione il momento assiale non dipende dal polo O, usato per calcolare il momento della forza, ma solo dall'asse di rotazione.

Se sul sistema rigido agiscono più forze aventi punti diversi di applicazione, il momento assiale complessivo si ottiene sommando scalarmente i momenti assiali corrispondenti alle singole forze presi con il segno positivo o negativo a seconda che tendano a provocare una rotazione del corpo rigido rispettivamente in senso antiorario o in senso orario.

$$M_z = \sum_{i=1}^n M_{iz}$$



### **Equazione del moto di rotazione di un corpo rigido attorno ad un asse fisso.**

Dalle considerazioni svolte nei paragrafi precedenti abbiamo imparato che per studiare il moto di un corpo rigido attorno ad un asse fisso è sufficiente una sola equazione scalare.

Questa equazione deve fornire il legame tra le cause del moto di rotazione attorno all'asse fisso, che abbiamo individuato nella componente del momento delle forze lungo l'asse di rotazione, il momento assiale o momento torcente, e grandezze caratteristiche della rotazione, l'effetto, come per esempio l'accelerazione angolare.

Per individuare questa equazione studiamo il moto di un sistema semplice che sappiamo anche studiare attraverso

l'applicazione delle leggi di Newton.

Consideriamo due particelle aventi la stessa massa  $m$  disposte simmetricamente rispetto all'asse di rotazione ad una distanza  $R$  da esso, come mostrato in figura. Costringiamo le due particelle a muoversi su di una traiettoria circolare di raggio  $R$  e, al tempo stesso, ad aumentare la velocità angolare con cui si muovono attorno all'asse di rotazione.

Perché il sistema si comporti come un sistema rigido, le due particelle si devono muovere con la stessa velocità angolare e la stessa accelerazione angolare.

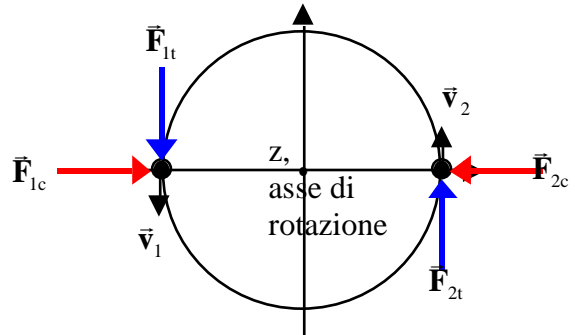
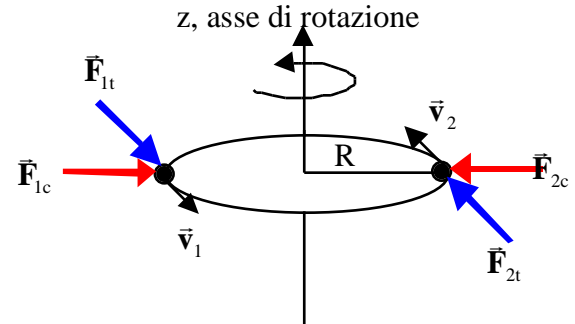
Per costringere le due particelle a muoversi di moto circolare allora dobbiamo applicare a ciascuna di esse una forza centripeta, diretta in ogni istante verso l'asse di rotazione, di intensità pari a:

$$F = m \omega^2 R$$

in cui  $\omega$  è la velocità angolare posseduta dalle due particelle nell'istante considerato. Facendo riferimento alla figura si vede che due forze centripete richieste sono due forze uguali ed opposte, la cui retta di azione passa per l'asse di rotazione.

Se inoltre vogliamo far aumentare il modulo della velocità delle due particelle, dobbiamo applicare a ciascuna di esse una forza tangente alla traiettoria diretta nel verso del moto. Per conservare la rigidità del sistema, data la sua simmetria, le due forze devono essere uguali in modulo e dirette come mostrato in figura. Si tratta di due forze parallele le cui rette di azione distano  $2R$ , di uguale intensità ma dirette in verso opposto. Costituiscono cioè quello che si chiama una **coppia di forze**.

La risultante delle forze applicate è nulla, le forze sono a due a due uguali ed opposte. In base alla prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi il centro di massa ha accelerazione nulla. Così infatti deve essere perché il centro di massa si trova sull'asse di rotazione e, pertanto, deve essere sempre fermo.



Scriviamo la seconda legge di Newton per le due particelle:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \vec{F}_{1t} + \vec{F}_{1c} = m_1 \vec{a}_1 \\ 2) \quad & \vec{F}_{2t} + \vec{F}_{2c} = m_2 \vec{a}_2 \end{aligned}$$

Queste equazioni, proiettate nella direzione radiale e in quella tangente, danno:

$$\begin{aligned} 1) \quad & F_{1t} = m_1 a_{1t} = mR \\ & F_{1c} = m_1 a_{1c} = mR^2 \\ 2) \quad & F_{2t} = m_2 a_{2t} = mR \\ & F_{2c} = m_2 a_{2c} = mR^2 \end{aligned}$$

Prendendo le sole componenti tangenziali, moltiplicando entrambi i membri per  $R$  e infine sommando membro a membro si ottiene:

$$\begin{aligned} F_{1t} &= mR & F_{1t}R &= mR^2 & F_{1t}R + F_{2t}R &= 2mR^2 & M_z &= I \\ F_{2t} &= mR & F_{2t}R &= mR^2 & & & & \end{aligned}$$

la relazione tra il momento assiale e l'accelerazione angolare  $M_z = I \cdot \alpha$ .

Infatti valutiamo il momento assiale totale:

- bisogna prendere le componenti delle forze normali all'asse di rotazione: nel nostro caso le forze sono perpendicolari all'asse.
- Moltiplicare il modulo delle forze per il braccio ( $R$  nel nostro caso)
- Assegnare il corretto segno.

$\vec{F}_{1t}$	$\vec{F}_{1c}$	$\vec{F}_{2t}$	$\vec{F}_{2c}$	$M_z$ totale
$+F_{1t}R$	$0$	$+F_{2t}R$	$0$	$F_{1t}R + F_{2t}R$

Invece il momento di inerzia è dato da:

$$I = \sum_{i=1}^2 m_i R_i^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2$$

Il moto di rotazione del sistema studiato soddisfa dunque alla seguente equazione:

$$M_z = I$$

che infatti è l'equazione del moto di rotazione dei corpi rigidi attorno ad un asse fisso. Il momento assiale totale delle forze esterne è uguale al prodotto del momento di inerzia del sistema rigido per l'accelerazione angolare.

### La coppia di forze

Nel paragrafo precedente abbiamo introdotto la coppia di forze. Con questa denominazione si intendono due forze parallele di uguale intensità ma dirette in verso opposto.

Una coppia di forze ha risultante nulla, pertanto non ha alcuna influenza sul moto del centro di massa.

Essa viceversa ha un momento (della coppia di forze) diverso da zero. Se indichiamo con  $b$  la distanza tra le rette di azione delle due forze, si vede che il momento della coppia è diretto perpendicolarmente al piano individuato dalle rette (parallele) di azione delle due forze, ha il verso per cui la rotazione prodotta dalla coppia appare antioraria (da determinare con la regola della mano destra), mentre il modulo è dato dal prodotto dell'intensità di una delle due forze per il braccio  $b$  della coppia:

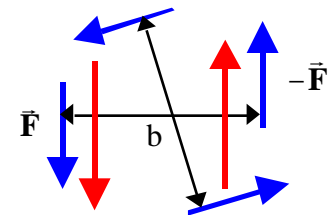
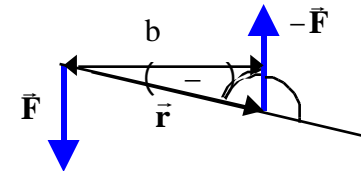
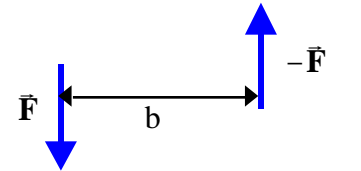
$$M_1=0, M_2=rF\sin(\theta) = rF\sin(\theta) = rF\sin(\theta) = Fb$$

$$M=Fb.$$

Poiché la coppia è un sistema di forze a risultante nulla, il suo momento è indipendente dal particolare polo prescelto per calcolarlo.

La coppia di forze rappresenta quindi lo strumento più adatto per applicare ad un corpo rigido un "puro" momento della forza.

Si noti che un particolare momento della forza può essere realizzato con un numero infinito di coppie: per esempio si possono prendere due forze più intense ma più vicine tra loro, oppure si può scegliere un'altra orientazione





delle forze nel piano perpendicolare al momento, ecc. Tutte queste coppie di forze forniscono sempre lo stesso momento.

Ricordiamo infine che quando applichiamo ad un corpo rigido un insieme di forze, il corpo rigido si comporta obbedendo alle due equazioni cardinali dei sistemi:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \bar{\mathbf{R}}^{\text{est}} \qquad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \bar{\mathbf{M}}^{\text{est}}$$

Il corpo rigido non è sensibile alla singola forza applicata, ma solo alla risultante delle forze esterne e al momento risultante delle forze esterne. Se ad esempio noi sostituissimo tutte le forze agenti su un corpo rigido con altre forze completamente diverse dalle prime ma tali da avere la stessa risultante e lo stesso momento risultante, il corpo rigido non saprebbe apprezzare la differenza e si comporterebbe allo stesso modo.

Il secondo insieme di forze si dirà “equivalente” al primo in quanto produce gli stessi risultati.

Nel caso più generale, tre (3) è il più piccolo numero di forze necessario per realizzare un insieme di forze “equivalente” ad un insieme di forze assegnato. Serve una forza di intensità pari alla risultante dell’insieme delle forze assegnato da applicare nel polo O utilizzato per il calcolo dei momenti, più una coppia di forze il cui momento sia proprio uguale al momento risultante, calcolato rispetto al polo O, dell’insieme di forze assegnato.

Per particolari insiemi di forze, per esempio quando le forze sono tutte parallele tra loro, si trova che questo numero minimo può essere addirittura ridotto ad uno. Per esempio l’insieme delle forze peso agenti su un corpo rigido è equivalente ad un’unica forza: la forza peso totale applicata nel centro di massa del corpo.

### ***Legame tra l’equazione del moto di rotazione attorno ad un asse fisso e la seconda equazione cardinale dei sistemi.***

Prima di giungere all’equazione del moto di rotazione attorno ad un asse fisso,  $M_z = I$ , abbiamo più volte affermato che la seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi di particelle avrebbe giocato un ruolo fondamentale nello studio delle rotazioni. Vediamo in questo paragrafo il legame esistente tra la seconda equazione cardinale e la legge del moto di rotazione attorno ad un asse fisso appena trovata.

Calcoliamo il momento angolare per il sistema rigido introdotto nel paragrafo precedente rispetto al centro di

simmetria O:

$$\vec{\ell}_1 = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1$$

$$\vec{\ell}_2 = \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2$$

Entrambi i momenti angolari sono perpendicolari al piano della figura e quindi paralleli all'asse z. Applicando la regola della mano destra per determinare il loro verso, si vede che entrambi i momenti sono diretti nel verso positivo dell'asse z. Il modulo, che in questo caso coincide anche con la componente z, vale per entrambe le particelle:  $\ell = Rmv = Rm \quad R = mR^2$ .

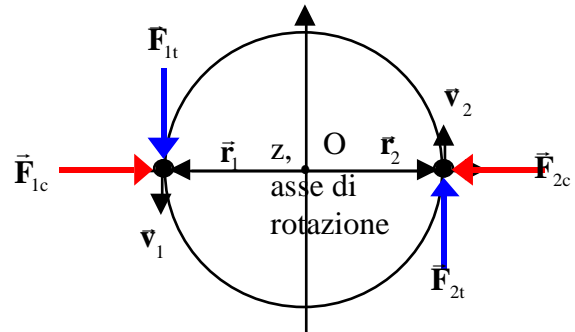
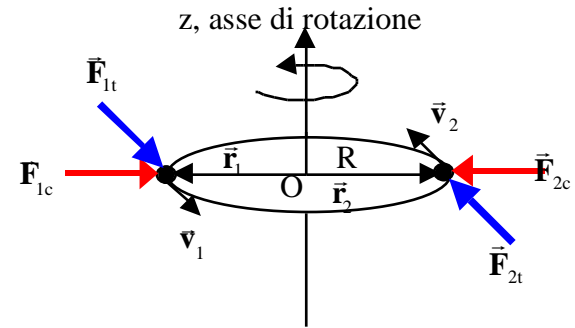
Il momento angolare totale sarà anch'esso diretto secondo l'asse di rotazione z. La sua componente z, che in questo caso è anche uguale al suo modulo, si otterrà sommando le componenti z dei momenti angolari delle singole particelle.

$$L_z = \underbrace{mR^2}_{\text{particella 1}} + \underbrace{mR^2}_{\text{particella 2}} = \underbrace{(mR^2 + mR^2)}_{\text{momento di Inerzia}} = I$$

Il fatto di aver trovato che il momento angolare totale sia parallelo all'asse di rotazione dipende dal fatto che il sistema è simmetrico rispetto all'asse di rotazione.

Tutti i corpi rigidi simmetrici rispetto all'asse di rotazione hanno il momento angolare totale parallelo all'asse di rotazione.

In alcuni casi, anche se non c'è una evidente simmetria del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione, può comunque accadere che il momento angolare totale sia parallelo all'asse di rotazione. In tal caso l'asse di rotazione si dice asse principale di inerzia. Si può dimostrare che dato un corpo rigido e un qualsiasi punto dello spazio, per tale punto passano almeno tre assi ortogonali tra loro tali che, quando il corpo rigido ruota attorno ad uno di essi, il suo momento angolare totale è parallelo all'asse di rotazione. Quindi per ogni punto dello spazio ci sono almeno tre assi



principali d'inerzia.

Per quanto riguarda invece l'espressione di  $L_z$  ( $L_z = I \omega$ ), essa si applica a tutti i corpi rigidi siano essi simmetrici o meno rispetto all'asse di rotazione: la componente lungo l'asse di rotazione del momento angolare totale di un corpo rigido è sempre data dal prodotto del momento di inerzia del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione per la velocità angolare di rotazione.

Consideriamo ora la seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi di particelle:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{est} \quad \begin{array}{l} \frac{dL_x}{dt} = M_x^{est} \quad \text{banalmente soddisfatta perchè } L_x = 0 \\ \frac{dL_y}{dt} = M_y^{est} \quad \text{banalmente soddisfatta perchè } L_y = 0 \\ \frac{dL_z}{dt} = M_z^{est} \end{array}$$

Le prime due equazioni, nel nostro caso sono banalmente soddisfatte, essendo costantemente uguali a zero sia  $L_x$  che  $L_y$ . Esse richiedono che i corrispondenti momenti assiali delle forze siano nulli, cosa che nel nostro caso è verificata.

L'ultima equazione è interessante. Sostituendo in essa l'espressione trovata per  $L_z$  e osservando che in un corpo rigido il momento di inerzia è costante, si ottiene:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{est} \quad \frac{d(I \omega)}{dt} = M_z^{est} \quad I \frac{d\omega}{dt} = M_z^{est} \quad I \alpha = M_z^{est}$$

Si trova così il legame tra la seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi e la legge del moto di rotazione di un corpo rigido attorno ad un asse fisso e si vede come quest'ultima discende dalla prima.

Il moto del corpo rigido attorno all'asse di rotazione è determinato dal momento assiale  $M_z$ , in pratica dalle due forze tangenti applicate alle due particelle. Le forze centripete, come era prevedibile, non influenzano il moto del corpo rigido, la loro unica funzione è quella di mantenere sulla traiettoria circolare le due particelle. Queste forze in realtà non devono necessariamente essere fornite dall'esterno, ma potrebbero essere benissimo sostituite da due forze interne (quelle che si occupano di mantenere costanti le distanze tra le particelle, per intenderci). Tanto più che in questo caso il momento delle forze centripete è nullo e quindi è possibile sostituirle con forze interne che

come è noto hanno un momento risultante uguale a zero. Si potrebbe per esempio pensare di collegare le due particelle mediante una fune di lunghezza  $2R$  e lasciare che la tensione della corda fornisca la corretta forza centripeta alle due particelle.

### Manubrio asimmetrico

Consideriamo ora il caso in cui le due particelle dell'esempio precedente non sono disposte simmetricamente rispetto all'asse di rotazione, ma si trovano nella configurazione mostrata in figura.

I momenti angolari delle due particelle rispetto al polo  $O$  mostrato in figura, sono dati da:

$$\vec{l}_1 = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1$$

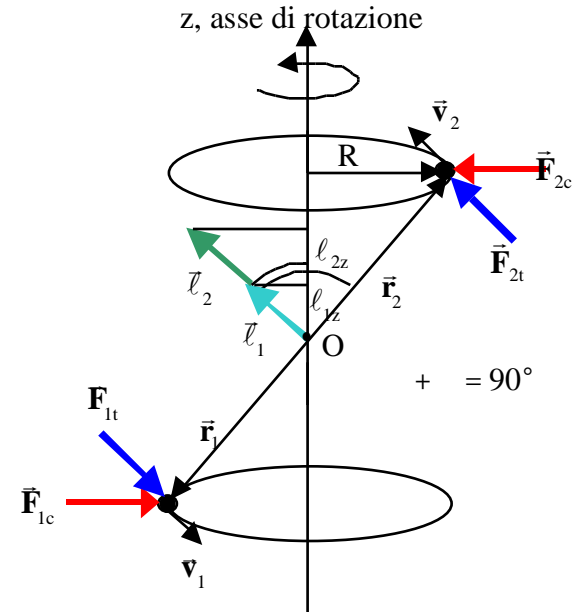
$$\vec{l}_2 = \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2$$

Prendiamo il primo dei due. Per le proprietà del prodotto vettoriale  $\vec{l}_1$  deve essere perpendicolare sia al vettore posizione  $\vec{r}_1$  che alla velocità  $\vec{v}_1$ . Il vettore velocità  $\vec{v}_1$ , a sua volta, è tangente alla traiettoria circolare che la particella 1 percorre attorno all'asse di rotazione. Ma il piano della traiettoria è perpendicolare all'asse di rotazione, quindi la velocità  $\vec{v}_1$  è perpendicolare all'asse di rotazione. D'altra parte essendo la velocità  $\vec{v}_1$  tangente alla traiettoria circolare, essa è anche perpendicolare al corrispondente vettore posizione  $\vec{r}_1$ . In conclusione il vettore velocità  $\vec{v}_1$  è perpendicolare al piano formato dall'asse di rotazione e dal vettore posizione  $\vec{r}_1$ .

$\vec{l}_1$ , dovendo essere perpendicolare a  $\vec{v}_1$ , si deve quindi trovare in questo piano, inoltre deve essere anche perpendicolare al vettore posizione  $\vec{r}_1$ .

$\vec{l}_1$  è stato disegnato sulla figura facendolo partire dal polo  $O$ . Ripetendo il discorso per  $\vec{l}_2$  si vede che è concorde con  $\vec{l}_1$ .

Poiché la posizione delle particelle varia con il tempo, i vettori posizione  $\vec{r}_1$  ed  $\vec{r}_2$  ruotano attorno all'asse di



rotazione. Il termine esatto per indicare il loro moto è “precessione”. Si dice quindi che i due vettori precedono attorno all’asse di rotazione. Quindi bisogna immaginare che il piano della figura contenente l’asse di rotazione e i due vettori  $\vec{r}_1$  ed  $\vec{r}_2$  preceda anch’esso attorno all’asse di rotazione seguendo la rotazione delle due particelle. Anche i momenti angolari delle due particelle che sono contenute in questo piano sono trascinati dal moto del piano e precedono anch’essi attorno all’asse di rotazione.

I moduli dei due vettori valgono  $\ell = r mv = r mR$ , in cui  $r$  è la distanza dei due punti materiali dal polo  $O$ , mentre  $R$  è il raggio delle traiettorie circolari delle due particelle ( $R=r \sin \theta$ ).

Le componenti  $z$  valgono invece:

$$\ell_{1z} = \ell_{2z} = r m R \cos \theta = \underbrace{r \sin \theta}_{R} m R = m R^2$$

Il momento angolare totale in questo caso non è parallelo all’asse di rotazione. Esso quindi precede attorno all’asse di rotazione seguendo il moto delle due particelle.

La componente assiale del momento angolare totale vale quindi:

$$L_z = \ell_{1z} + \ell_{2z} = \underbrace{(m R^2 + m R^2)}_{\text{momento d'inerzia } I} = I$$

esattamente come nel caso precedente.

Mentre la componente trasversa, che in questo caso non è nulla, vale

$$L = \ell_1 + \ell_2 = 2 r m R \sin \theta$$

Ripetiamo il ragionamento già fatto nel caso del corpo rigido simmetrico. Cominciamo con lo scrivere la seconda

legge di Newton per le due particelle, si ha:

$$1) \quad \vec{F}_{1t} + \vec{F}_{1c} = m_1 \vec{a}_1$$

$$2) \quad \vec{F}_{2t} + \vec{F}_{2c} = m_2 \vec{a}_2$$

$$1) \quad F_{1t} = m_1 a_{1t} = m R$$

$$F_{1c} = m_1 a_{1c} = m R^2$$

$$F_{2t} = m_2 a_{2t} = m R$$

$$2) \quad F_{2c} = m_2 a_{2c} = m R^2$$

Queste, proiettate nella direzione radiale e in quella tangente, danno:

Come per il caso simmetrico, prendendo le sole componenti tangenziali, moltiplicando entrambi i membri per  $R$  e infine sommando membro a membro, si ottiene:

$$\begin{array}{llll} F_{1t} = mR & F_{1t}R = mR^2 & & \\ F_{2t} = mR & F_{2t}R = mR^2 & F_{1t}R + F_{2t}R = 2mR^2 & M_z = I \end{array}$$

Infatti valutiamo il momento assiale totale:

- d) bisogna prendere le componenti delle forze normali all'asse di rotazione: nel nostro caso la forze sono perpendicolari all'asse.
- e) Moltiplicare il modulo delle forze per il braccio ( $R$ )
- f) Assegnare il corretto segno.

$\vec{F}_{1t}$	$\vec{F}_{1c}$	$\vec{F}_{2t}$	$\vec{F}_{2c}$	$M_z$ totale
$+F_{1t}R$	$0$	$+F_{2t}R$	$0$	$F_{1t}R + F_{2t}R$

Invece il momento di inerzia è dato da:

$$I = \sum_{i=1}^2 m_i R_i^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2$$

Il moto di rotazione del sistema asimmetrico soddisfa dunque sempre alla stessa equazione, la legge del moto di rotazione dei corpi rigidi attorno ad un asse fisso:

$$M_z = I$$

Esaminiamo ora il problema dal punto di vista della seconda equazione cardinale dei sistemi di punti materiali. Se consideriamo ora la seconda equazione cardinale, avremo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{est}} \quad \begin{aligned} \frac{dL_x}{dt} &= M_x^{\text{est}} \\ \frac{dL_y}{dt} &= M_y^{\text{est}} \\ \frac{dL_z}{dt} &= M_z^{\text{est}} \end{aligned}$$

L'ultima delle tre equazioni ci porta come nel caso simmetrico alla legge del moto di rotazione dei corpi rigidi  $M_z = I \dot{\phi}$ .

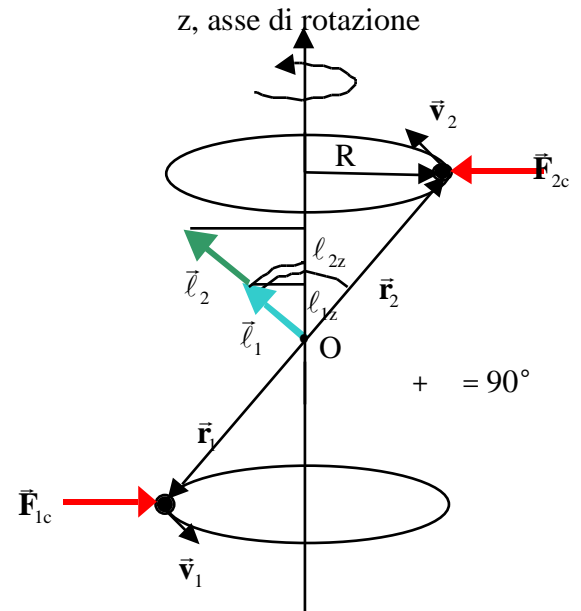
Supponiamo per il seguito che ad un certo punto  $M_z$  venga posto uguale zero, per esempio annullando le forze tangenziali applicate. Da quel momento in poi la velocità angolare rimane costante e di conseguenza tale rimane anche il modulo del momento angolare totale  $L = 2r mR$ .

Anche in questo caso più semplice, le prime due equazioni riguardanti le componenti  $x$  e  $y$  del momento angolare totale non sono banalmente soddisfatte come nel caso precedente. In questo caso, infatti, né  $L_x$ , né  $L_y$  sono costantemente nulli: anzi, a causa della precessione del momento angolare totale attorno all'asse di rotazione, essi cambiano rapidamente e la loro derivata risulta diversa da zero.

Qual è il significato di tutto questo?

Per il fatto che il momento angolare totale in questo caso non è parallelo all'asse di rotazione, anche quando il suo modulo è costante, cosa che avviene se la velocità angolare di rotazione è costante, che a sua volta dipende dal fatto che il momento assiale delle forze  $M_z$  è nullo, la sua direzione non lo è: infatti il vettore momento angolare totale precessa attorno all'asse di rotazione con la velocità angolare  $\omega$ .

Il fatto che la direzione del momento angolare non sia costante richiede che il momento delle forze esterne applicato sia non nullo. Facendo riferimento alla figura si vede che mantenere



sulla traiettoria circolare le due particelle anche quando si muovono con una velocità angolare costante, bisogna applicare ad esse le due forze centripete. In questo caso queste due forze non sono allineate, formano quindi una coppia di barccio  $2rcos$  , il cui momento vale in modulo:

$$M^{est} = m^2 R^2 \omega \cos$$

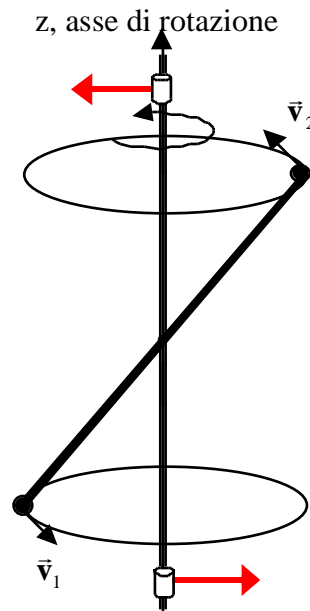
Dal punto di vista della direzione questo momento è perpendicolare al piano contenente la coppia di forze, vale a dire il piano contenente l'asse di rotazione e il momento angolare totale. Il momento delle forze è dunque perpendicolare all'asse di rotazione e al momento angolare stesso. Il suo compito è quello di far precedere il momento angolare totale attorno all'asse di rotazione.

Ci troviamo in una situazione simile a quella di un punto materiale che si muove di moto circolare uniforme. In quel caso era necessaria una forza, perpendicolare alla velocità, che non era in grado di cambiare il modulo della velocità, ma che aveva il compito di cambiarne la direzione. In questo caso abbiamo un momento delle forze perpendicolare al momento angolare e per questo non è in grado di cambiare il suo modulo, ossia la velocità angolare, ma ha solo la funzione di fargli cambiare direzione.

Come si vede dall'espressione recedente, il modulo del momento delle forze necessario per questa operazione dipende dal quadrato della velocità angolare. Esso diventa rapidamente molto intenso quando aumenta la velocità angolare. Allo stesso modo diventano intense anche le forze che lo originano.

Al contrario del caso precedente in cui le forze centripete potevano essere delle forze interne, in questo caso esse vanno applicate dall'esterno, infatti mentre la loro risultante è nulla non lo è il loro momento: noi sappiamo invece che le forze interne costituiscono un sistema di forze con risultante nulla e momento risultante anch'esso nullo.

Infine si noti che non è necessario applicare le due forze direttamente ai





punti materiali: se la struttura è rigida possiamo pensare di applicare tali in altre parti del corpo rigido. Quando abbiamo discusso il moto dell'anta della porta abbiamo visto che è meglio applicare la forza il più distante possibile dall'asse di rotazione, ma si può ottenere lo stesso risultato applicando una forza più intensa più vicino all'asse di rotazione.

Questo è quello che succede in pratica: immaginiamo di realizzare il corpo rigido asimmetrico con una struttura rigida costituita da una sbarretta di massa trascurabile saldata rigidamente all'asse di rotazione. In tal caso le forze necessarie per mantenere in rotazione i due punti materiali attorno all'asse di rotazione verranno esercitate sull'asse di rotazione dai vincoli che necessariamente devono essere presenti per mantenere fisso l'asse di rotazione, così come illustrato in figura.

Naturalmente i vincoli devono essere sufficientemente robusti perché, come abbiamo visto, le forze che devono esercitare sull'asse aumentano con il quadrato della velocità angolare.

Ricordiamo ancora una volta che queste forze non hanno alcuna influenza sulla velocità angolare, la loro presenza è necessaria solo per far precedere il vettore momento angolare attorno all'asse di rotazione.

Se il vettore momento angolare totale fosse parallelo all'asse di rotazione, queste forze non sarebbero più necessarie, e quindi, in questa situazione, è possibile operare con vincoli meno robusti.

In conclusione, quando si lavora con corpi rigidi in rotazione conviene operare sempre in maniera tale che il momento angolare totale sia parallelo all'asse di rotazione.

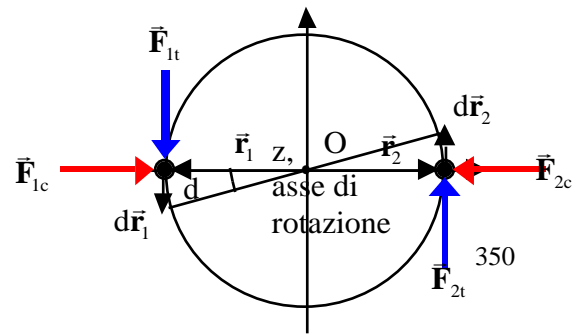
L'operazione di equilibratura delle ruote di un'automobile, ha proprio questo preciso scopo: rendendo il momento angolare totale della ruota parallelo all'asse di rotazione, il sistema di supporto dell'asse delle ruote lavorerà in una situazione più tranquilla e questo gli consentirà di durare di più.

### **Lavoro nei moti di rotazione dei corpi rigidi attorno ad un asse fisso.**

Riprendiamo in esame il caso del manubrio simmetrico (le stesse considerazioni si applicano anche al manubrio asimmetrico).

Le forze centripete applicate alle due particelle non fanno lavoro durante il moto, perché sempre perpendicolari allo spostamento.

Le forze tangenti invece compiono lavoro. Se indichiamo con  $ds$  il



modulo dello spostamento infinitesimo, il lavoro infinitesimo eseguita da ciascuna di essa sarà dato da  $dW_1=dW_2=F_t ds$ . Osservando la figura, si ricava la relazione tra  $ds$  e  $d$  :  $ds= R d$  . I due lavori infinitesimi diventeranno quindi  $dW_1=dW_2=F_t R d$  ed il lavoro complessivo

$$dW= dW_1+dW_2 = 2 F_t R d = M_z d .$$

Per rotazioni finite del corpo rigido tra le posizioni angolari  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , il lavoro complessivo eseguito dalle forze esterne varrà:

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_z d$$

Se indichiamo con  $dt$  l'intervallo di tempo infinitesimo necessario al corpo per ruotare dell'angolo  $d$  , possiamo ricavare la potenza, ossia il lavoro compiuto dalle forze esterne nell'unità di tempo, attraverso la relazione:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{M_z d}{dt} = M_z \omega$$

La potenza sviluppata dalle forze agenti sul corpo rigido in rotazione attorno ad un asse fisso, è data dal prodotto del momento assiale delle forze esterne per la velocità angolare.

***Analogie tra il moto di un punto materiale su una traiettoria rettilinea e quello di un corpo rigido in rotazione attorno ad un asse fisso.***

Da queste considerazioni deriva che esiste una perfetta analogia tra le equazioni del moto rettilineo di un punto materiale sull'asse delle  $x$  e quelle del moto di rotazione di un corpo rigido attorno ad un asse fisso parallelo all'asse  $z$  del sistema di riferimento. Come mostrato nella seguente tabella, le leggi che regolano questi due moti si ottengono le une dalle altre sostituendo le grandezze angolari alle grandezze lineari:

Moto rettilineo di un punto materiale sull'asse x		Moto di rotazione di un corpo rigido attorno all'asse z	
Posizione	x	Posizione angolare	
velocità	$v_x = \frac{dx}{dt}$	Velocità angolare	$\frac{d}{dt}$
accelerazione	$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$	Accelerazione angolare	$\frac{d^2}{dt^2}$
massa	m	Momento d'inerzia	$I = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2$
II legge della dinamica	$F_x = ma_x$	Legge del moto di rotazione attorno all'asse z	$M_z = I \alpha$
Lavoro	$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$	Lavoro	$W = \int_1^2 M_z d\theta$
Potenza	$P = F_x v_x$	Potenza	$P = M_z \omega$
Energia cinetica	$\frac{1}{2} m v_x^2$		$\frac{1}{2} I \omega^2$
Quantità di moto	$P_x = m v_x$	Momento angolare assiale	$L_z = I \omega$

### **Moto di puro rotolamento (o rotolamento senza strisciamento).**

Con questo termine si vuole indicare il caratteristico moto delle ruote dei veicoli. Quando il veicolo si muove, anche la ruota si muove: il suo moto però è caratterizzato dal fatto che i punti della ruota a contatto con l'asfalto sono fermi rispetto all'asfalto. In altri termini, i punti della ruota a contatto con l'asfalto non scorrono, non strisciano sull'asfalto. Da questo deriva il nome di questo tipo di moto: rotolamento senza strisciamento o più semplicemente moto di puro rotolamento. Naturalmente i punti di contatto tra la ruota e l'asfalto cambiano in continuazione, cosicché la ruota da un lato ruota attorno al suo asse, dall'altro avanza. Si tratta cioè di un moto di rototraslazione.

Possiamo schematizzare una ruota mediante un cilindro di raggio  $R$  poggiato su di un piano, che per il momento possiamo immaginare orizzontale. Quando il cilindro rotola senza strisciare sul piano, i punti del cilindro a contatto con il piano sono fermi rispetto al piano, hanno cioè velocità nulla in un sistema di riferimento solidale con il piano. Si noti che i punti di contatto del cilindro con il piano sono tutti allineati su una retta: una delle generatrici del cilindro.

Se non ci fosse attrito tra piano e cilindro allora è difficile garantire in tutte le condizioni che i punti di contatto del cilindro con il piano non scivolino su di esso: questo tipo di moto quindi può avvenire solo se le superfici del piano e del cilindro sono scabre. L'attrito è essenziale per evitare lo scivolamento dei punti di contatto tra il cilindro e il piano. Senza forze di attrito questo tipo di moto non è realizzabile.

Di che attrito stiamo parlando, statico o dinamico?

Nell'introdurre le forze di attrito, abbiamo visto che esso esiste in due forme:

3. Attrito dinamico: quando un corpo scorre sull'altro (per esempio un blocco scorre su un piano)
4. Attrito statico: quando un corpo è fermo rispetto all'altro (per esempio un blocco fermo su un piano)

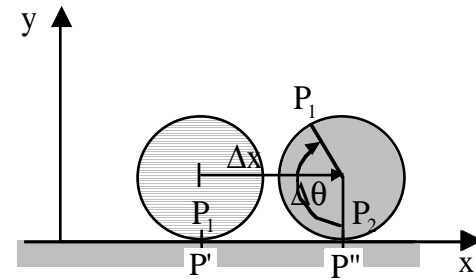
Ovviamente in questo caso siamo in condizioni di attrito statico: nel moto di puro rotolamento i punti del cilindro a contatto con il piano non scorrono sul piano, anzi sono fermi rispetto ad esso.

Che relazione c'è tra la velocità di avanzamento del centro del cilindro e la velocità di rotazione del cilindro attorno al proprio asse?

Introduciamo un sistema di riferimento con l'asse  $x$  nella direzione di avanzamento del cilindro, l'asse  $y$  verticale e l'asse  $z$  parallelo all'asse del cilindro.

Indichiamo con  $P_1$  il punto del cilindro che all'istante  $t_1$  è a contatto con il piano. Indichiamo con  $P'$  il punto del piano in cui all'istante  $t_1$  si trova il punto  $P_1$ . Ad un istante successivo  $t_2$ , il punto del cilindro a contatto con il piano sarà  $P_2$  e il corrispondente punto del piano la cui posizione all'istante considerato coincide con  $P_2$  sarà  $P''$ .

Quindi  $P_1$  e  $P_2$  sono punti appartenenti al cilindro,  $P'$  e  $P''$  sono invece due punti del piano. Se nell'intervallo tra  $t_1$  e  $t_2$  non c'è stato scorrimento tra il cilindro ed il piano la distanza tra  $P'$  e  $P''$  è proprio uguale alla lunghezza dell'arco di cerchio tra  $P_1$  e  $P_2$ . Notiamo per il fatto che il centro del cilindro, il quale tra l'altro per ragioni di simmetria coincide con il centro di massa del cilindro, è sempre sulla perpendicolare al piano tangente passante per il punto di tangenza, che il percorso  $x$  effettuato dal centro del cilindro nell'intervallo di tempo  $t$  è proprio uguale alla distanza tra  $P'$  e  $P''$ .



Introducendo l'angolo  $\theta$  descritto dal segmento che connette il centro del cilindro con il punto  $P_1$  nell'intervallo di tempo tra  $t_1$  e  $t_2$  abbiamo che lo spostamento del centro del cilindro è dato dal prodotto dell'angolo per il raggio del cilindro.

In realtà se si fa una maggiore attenzione ai segni ci si accorge che lo spostamento  $x$  del centro di massa del cilindro è positivo, avviene cioè nel verso positivo dell'asse delle  $x$ , l'angolo  $\theta$  viene percorso in verso orario (rispetto all'asse  $z$ ) e per questo va considerato negativo.

Per far tornare anche i segni la relazione va scritta nella seguente forma:

$$x = -R\theta$$

Dividendo entrambi i membri per  $t$  ed effettuando il limite per  $t$  che tende a zero si ottiene:

$$v_{CMx} = -R\omega$$

Derivando rispetto al tempo la relazione precedente otteniamo l'espressione che lega l'accelerazione del centro di massa del cilindro con l'accelerazione angolare del cilindro.

$$a_{CMx} = -R\alpha$$

Tutte e tre le relazioni precedenti rappresentano la condizione di puro rotolamento.

Come si risolve il moto di puro rotolamento?

Ci sono due strade, ovviamente equivalenti, per risolvere il moto di puro rotolamento.

a) Moto di pura rotazione attorno ad un asse fisso passante per i punti di contatto. Abbiamo già osservato che istante per istante i punti della generatrice del cilindro a contatto con il piano sono istantaneamente fermi. È come se il cilindro istante per istante stesse ruotando attorno ad un asse fisso passante proprio per i punti di contatto. È vero, in un istante successivo l'asse sarà un asse diverso! Ma questo non importa: istante per istante la velocità di tutti i punti del cilindro, le accelerazioni di tutti i punti del cilindro sono le stesse che si avrebbero se il cilindro stesse ruotando attorno ad un asse fisso coincidente con i punti di contatto.

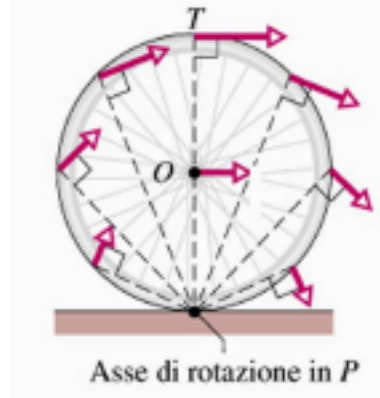
b) Traslazione del centro di massa più rotazione attorno al centro di massa. Questo secondo modo di avvicinarsi al problema deriva, se vogliamo, dalla struttura delle equazioni cardinali della dinamica dei sistemi, così come dai due teoremi di König. Il moto di un sistema può essere immaginato come il moto del centro di massa più un moto attorno al centro di massa.

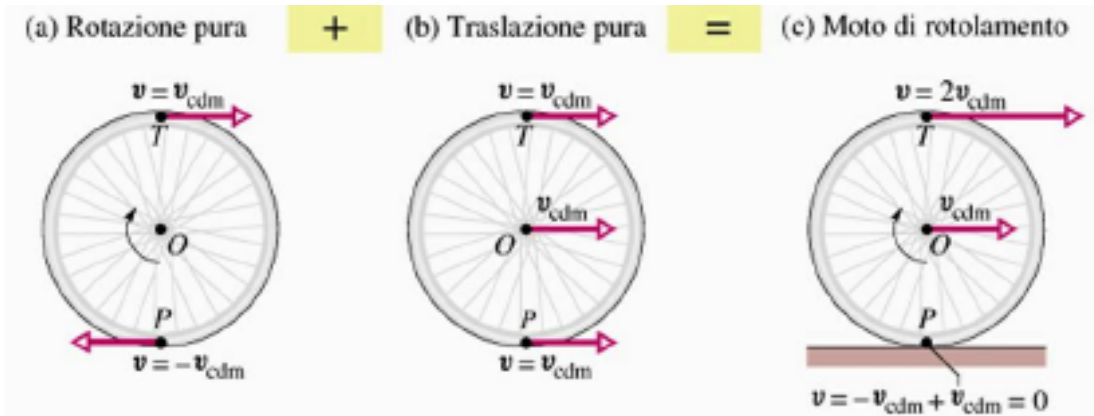
Qual è il moto del cilindro rispetto al centro di massa. Introduciamo il sistema di riferimento del centro di massa, esso ha origine nel centro di massa ed assi costantemente paralleli a quelli del sistema del laboratorio. Si noti che il centro di massa è fermo nel sistema di riferimento del centro di massa.

L'asse del cilindro è sempre parallelo all'asse  $z$  e passa per il centro di massa: quindi l'asse  $z'$  del sistema di riferimento del centro di massa coinciderà con l'asse del cilindro. Tutti i punti dell'asse del cilindro, così come il centro di massa, saranno fermi nel sistema di riferimento del centro di massa. È sufficiente per concludere che il moto del cilindro nel sistema di riferimento del centro di massa è una rotazione attorno ad un asse fisso: l'asse del cilindro.

Si osservi infine che le velocità angolari, e di conseguenza le accelerazioni angolari, dei due moti di rotazione, quello che avviene attorno all'asse del cilindro nel sistema di riferimento del centro di massa e quello attorno ai punti di contatto nel sistema del laboratorio, sono le stesse. Infatti gli assi dei due sistemi di riferimento sono costantemente paralleli e quindi gli spostamenti angolari misurati nei due sistemi di riferimento sono uguali.

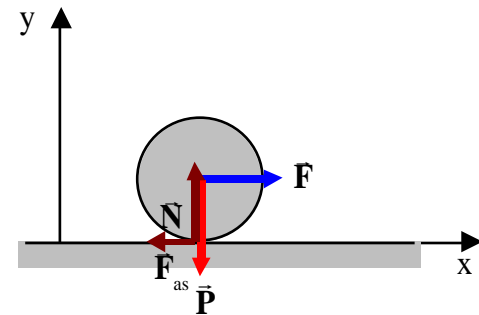
Nella figura sono riportate le velocità di alcuni punti del cilindro valutati sia interpretando il moto come una pura rotazione attorno ai punti di contatto che come sovrapposizione di una traslazione più una rotazione attorno all'asse del cilindro. Imponendo la condizione di puro rotolamento si vede che le due interpretazioni del moto di puro rotolamento sono equivalenti.





**Moto di puro rotolamento di un cilindro di massa  $M$  e raggio  $R$  sottoposto ad una forza esterna orizzontale passante per il centro di massa.**

Prima di tutto determiniamo quali sono le forze esterne che agiscono sul corpo rigido. Oltre alla forza orizzontale  $\vec{F}$  applicata, c'è la forza peso, la componente normale della reazione vincolare e la forza di attrito. Quest'ultima, come abbiamo già avuto modo di precisare, è una forza di attrito statico dato che, per ipotesi, non c'è scorrimento tra la superficie del cilindro ed il piano. Per la forza di attrito statico non siamo in grado a priori di stabilire la sua direzione e verso per cui è necessario fare un'assunzione. Nella figura abbiamo disegnato la forza di attrito statico opposta all'asse delle  $x$  sulla base del seguente ragionamento: la forza  $F$  applicata alla ruota tende a far traslare tutta la ruota e quindi a far scorrere in avanti il punto di contatto della ruota con il piano orizzontale. Per mantenere fermo tale punto rispetto al piano è necessaria una forza che lo spinga all'indietro. Ad ogni modo se, una volta risolto il problema, ci dovessimo accorgere che il modulo della forza di attrito è negativo, questo non



significa che abbiamo sbagliato la soluzione del problema ma semplicemente che abbiamo inizialmente scelto il verso sbagliato per la forza di attrito.

Il problema può essere risolto utilizzando le due interpretazioni del moto di puro rotolamento.

A) Rotazione attorno ai punti di contatto.

Si tratta in questo caso di una rotazione attorno ad un asse fisso. Per valutare l'accelerazione angolare, che, come abbiamo visto, è legata all'accelerazione del centro di massa, dobbiamo valutare il momento assiale delle forze esterne  $M_z$ . Innanzitutto osserviamo che tutte le forze sono perpendicolari all'asse di rotazione. Sia la forza di attrito che la componente normale della reazione vincolare hanno momento assiale nullo, in quanto essendo il punto di applicazione sull'asse di rotazione, il braccio, ossia la distanza della retta di azione della forza dall'asse di rotazione, è nullo. Anche la forza peso ha momento assiale nullo, perché la retta di azione della forza passa per l'asse di rotazione. L'unica forza che ha momento assiale non nullo è la forza applicata  $\vec{F}$ . Il braccio della forza è proprio  $R$ , per cui il valore assoluto del momento assiale è proprio  $|M_z| = FR$ . Questo momento produce rispetto all'asse  $z$  una rotazione oraria: ad esso compete un segno negativo. In conclusione  $M_z = -FR$ .

L'equazione del moto di rotazione sarà dunque:

$$-FR = I$$

dove  $I$  è il momento di inerzia del cilindro rispetto all'asse passante per i punti di contatto tra il cilindro e il piano. Il momento di inerzia rispetto a questo asse può essere calcolato dalla conoscenza del momento di inerzia rispetto all'asse del cilindro, che passa per il centro di massa, ed applicando il teorema di Steiner.

$$I = \underbrace{I^* + mh^2}_{\substack{\text{teorema di Steiner} \\ I^* \text{ Mdl asse parallelo per il CM} \\ h \text{ distanza tra gli assi}=R}} = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

L'accelerazione angolare è data da:

$$= -\frac{FR}{I} = -\frac{2FR}{3MR^2} = -\frac{2F}{3MR}$$



Utilizzando la condizione di puro rotolamento possiamo ricavare l'accelerazione del centro di massa:

$$\underbrace{a_{\text{CMx}} = -R}_{\text{condizione di puro rotolamento}} = \frac{2}{3} \frac{F}{M}$$

Se la forza  $\vec{F}$  è costante, anche l'accelerazione del CM sarà costante. Il moto del centro di massa sarà uniformemente accelerato.

L'accelerazione del centro di massa del cilindro è uguale ai due terzi di quella che la forza  $\vec{F}$  avrebbe impresso ad un punto materiale di massa  $M$  poggiato su un piano liscio.

Il fatto che l'accelerazione del centro di massa in un moto di puro rotolamento è solo i due terzi dell'accelerazione che lo stesso corpo avrebbe avuto se le superfici a contatto fossero state lisce, può essere giustificato con il seguente ragionamento: se il corpo rigido scivolasse sul piano orizzontale, non ci sarebbe moto di rotazione, il lavoro compiuto dalla forza  $\vec{F}$  tra la posizione iniziale e la posizione finale verrebbe tutto trasformato in energia cinetica del moto traslatorio. Se viceversa il corpo rotola senza strisciare, il lavoro fatto dalla forza lungo lo stesso percorso deve trasformarsi sia nell'energia cinetica di traslazione che nell'energia cinetica di rotazione. L'esistenza di questo secondo termine fa sì che l'energia cinetica del moto traslatorio deve essere più piccola di quella relativa al caso precedente, e questo implica che anche la velocità di traslazione finale del corpo rigido che rotola senza strisciare è più piccola di quella raggiunta nel moto di puro scivolamento.

### B) Traslazione del centro di massa e Rotazione attorno all'asse del cilindro.

Interpretando il moto di puro rotolamento come un moto di pura rotazione attorno ai punti di contatto, non si riesce a determinare il valore della forza di attrito. Sappiamo però che l'intensità della forza di attrito statico è limitata superiormente, cioè:

$$F_{\text{as}} \leq \mu_s N$$

Ci potrebbero essere valori della forza  $\vec{F}$  per cui tale disuguaglianza non è verificata: per tali valori della forza non è possibile avere un moto di puro rotolamento. In altre parole se si tenta di accelerare un'automobile troppo bruscamente, si provoca uno slittamento delle ruote motrici sull'asfalto.

Per determinare il valore della forza di attrito e quindi verificare le condizioni di puro rotolamento, bisogna ricorrere all'altra interpretazione del moto di puro rotolamento, che consiste nel considerare questo moto come la sovrapposizione di un moto del centro di massa, più un moto di rotazione attorno all'asse del cilindro (passante per il centro di massa).

Il moto del centro di massa è regolato dalla risultante delle forze esterne: queste sono la forza applicata  $\vec{F}$ , la forza peso, la componente normale della reazione vincolare, la forza di attrito.

La prima equazione cardinale della meccanica dei sistemi si scrive:

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{as} = M\vec{a}_{CM}$$

Proiettando questa equazione sull'asse orizzontale x e verticale y, osservando che non c'è moto del centro di massa nella direzione y, si ottiene:

$$x: F - F_{as} = Ma_{CMx}$$

$$y: N - P = 0$$

Per quel che riguarda il moto di rotazione attorno all'asse del cilindro osserviamo che l'unica forza avente momento assiale non nullo è la forza di attrito, in quanto la linea di azione di tutte le altre forze passa per l'asse di rotazione, cioè l'asse del cilindro. Nel sistema di riferimento introdotto il momento della forza di attrito, così come la velocità angolare, è diretto in verso opposto all'asse z.

$$M_z = -F_{as}R$$

Il moto di rotazione sarà regolato dalla seguente equazione:

$$-F_{as}R = I^*$$

La condizione di puro rotolamento ci dice che:

$$a_{CMx} = -R$$

Risolvendo il seguente sistema si possono determinare l'accelerazione del centro di massa e il modulo della forza

di attrito  $F_{as}$  :

$$\begin{aligned}
 F - F_{as} &= Ma_{CMx} & F - F_{as} &= -MR & F + \frac{I^*}{R} &= -MR & &= -\frac{F}{MR + \frac{I}{R}} = -\frac{F}{MR + \frac{MR^2}{2R}} = -\frac{2F}{3MR} \\
 -F_{as}R &= I^* & F_{as} &= -\frac{I^*}{R} & F_{as} &= -\frac{I^*}{R} & &F_{as} = -\frac{I^*}{R} = \frac{MR^2}{2} \frac{1}{R} \frac{2F}{3MR} = \frac{1}{3}F
 \end{aligned}$$

L'accelerazione del centro di massa vale:

$$a_{CMx} = -R \frac{2F}{3MR} = \frac{2F}{3M}$$

La forza di attrito è invece uguale a:

$$F_{as} = \frac{1}{3}F$$

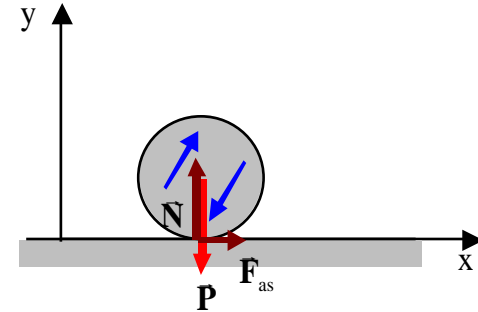
Il moto di puro rotolamento è possibile se:

$$F_{as} \leq \mu_s N \quad \frac{1}{3}F \leq \mu_s Mg \quad F \leq 3\mu_s Mg$$

**Moto di puro rotolamento di un cilindro di massa  $M$  e raggio  $R$  sottoposto ad una momento esterno  $M_a$  parallelo e opposto all'asse  $z$ .**

Questo caso corrisponde a quello che avviene in un'automobile: il motore dell'automobile applica alle ruote motrici in momento assiale che può essere visualizzato mediante una coppia di forze che tende a far girare la ruota in verso orario. Cerchiamo di capire come questo momento causa la traslazione della ruota.

Oltre al momento applicato  $\vec{M}_a$ , al cilindro è applicata anche la forza peso, la componente normale della reazione vincolare e la forza di attrito. Quest'ultima, come abbiamo già avuto modo di precisare, è una forza di attrito statico dato che, per ipotesi, non vogliamo che ci sia scorrimento tra la superficie del cilindro ed il piano. Per la forza di attrito statico non siamo in grado a priori di stabilire la sua direzione e verso per cui è necessario fare un'assunzione. Nella figura abbiamo disegnato la forza di attrito statico concorde con l'asse delle x sulla base del seguente ragionamento: il momento applicato alla ruota tende a mettere in rotazione la ruota attorno al suo asse e quindi a far scorrere all'indietro il punto di contatto della ruota con il piano orizzontale.



Per mantenere fermo tale punto rispetto al piano è necessaria una forza che lo spinga in avanti. Ad ogni modo se, una volta risolto il problema, ci dovessimo accorgere che il modulo della forza di attrito è negativo, questo non significa che abbiamo sbagliato la soluzione del problema ma semplicemente che abbiamo inizialmente scelto il verso sbagliato per la forza di attrito.

Risolviamo il problema come sovrapposizione della traslazione del centro di massa e del moto di rotazione attorno all'asse del cilindro.

Il moto del centro di massa è regolato dalla risultante delle forze esterne: queste sono la forza peso, la componente normale della reazione vincolare, la forza di attrito.

La prima equazione cardinale della meccanica dei sistemi si scrive:

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{as} = M\vec{a}_{CM}$$

Proiettando questa equazione sull'asse orizzontale x e verticale y, osservando che non c'è moto del centro di massa nella direzione y, si ottiene:

$$x : F_{as} = Ma_{CMx}$$

$$y : N - P = 0$$

Per quel che riguarda il moto di rotazione attorno all'asse del cilindro osserviamo che l'unica forza avente momento assiale non nullo è la forza di attrito, in quanto la linea di azione di tutte le altre forze passa per l'asse di rotazione, cioè l'asse del cilindro. Nel sistema di riferimento mostrato in figura il momento assiale della forza

di attrito è positivo perché produce una rotazione antioraria, mentre il momento applicato  $M_a$  è negativo perché per ipotesi produce una rotazione antioraria.

Il moto di rotazione sarà regolato dalla seguente equazione:

$$F_{as} R - M_a = I^*$$

La condizione di puro rotolamento ci dice che:

$$a_{CMx} = -R$$

Risolvendo il seguente sistema si possono determinare l'accelerazione del centro di massa e il modulo della forza di attrito  $F_{as}$  :

$$\begin{array}{l} F_{as} = Ma_{CMx} \\ F_{as} R - M_a = I^* \end{array} \quad \begin{array}{l} F_{as} = -MR \\ -MR^2 - M_a = I^* \end{array} \quad \begin{array}{l} F_{as} = -MR \\ = -\frac{M_a}{I + MR^2} \end{array} \quad \begin{array}{l} F_{as} = M_a \frac{MR}{I + MR^2} = M_a \frac{MR}{\frac{1}{2} MR^2 + MR^2} = \frac{2}{3} \frac{M_a}{R} \\ a_{CM} = -R = R \frac{M_a}{I + MR^2} = \frac{2}{3} \frac{M_a}{MR} \end{array}$$

L'accelerazione del centro di massa vale:

$$a_{CM} = -R = R \frac{M_a}{I + MR^2} = \frac{2}{3} \frac{M_a}{MR}$$

La forza di attrito è invece uguale a:

$$F_{as} = \frac{2}{3} \frac{M_a}{R}$$

Il moto di puro rotolamento è possibile se:

$$F_{as} = \frac{2}{3} \frac{M_a}{R} \mu_s N = \frac{2}{3} \frac{M_a}{R} \mu_s Mg$$

L'accelerazione del centro di massa è completamente determinata dalla forza d'attrito. Si può concludere che è la forza di attrito che consente all'automobile di accelerare in avanti, o decelerare in caso di frenata (si pensi a quello che succede se la strada è ghiacciata, quindi con attrito estremamente ridotto).

### **Statica dei corpi rigidi.**

Abbiamo esaminato, fino a questo momento, il moto dei corpi rigidi determinando le leggi che lo regolano. E' però altrettanto importante stabilire sotto quali condizioni un corpo rigido resta fermo. L'importanza di questo problema è ovvia perché è connessa ai problemi di stabilità degli edifici, dei ponti, ecc. Per esempio quando si costruisce un ponte, si desidera che esso non crolli sotto l'azione del peso della struttura stessa, del traffico, degli agenti atmosferici (il vento e la pioggia), ed anche di fenomeni eccezionali come, ad esempio, un terremoto. Nei casi pratici, come quello su menzionato, bisogna anche stabilire sotto quali condizioni il corpo reale si comporta come un corpo rigido, e poi stabilire le condizioni di staticità dei corpi rigidi stessi.

Perché un corpo rigido sia fermo, è necessario che siano nulle sia l'accelerazione del centro di massa, che le accelerazioni angolari rispetto a qualunque asse passante per il centro di massa. Questo richiede che siano nulli la risultante che il momento risultante delle forze esterne:

$$\begin{aligned} \text{condizione necessaria perchè} & \quad \vec{R}^{\text{est}} = 0 \\ \text{un corpo rigido sia fermo} & \quad \vec{M}^{\text{est}} = 0 \end{aligned}$$

Queste condizioni sono necessarie ma non sono sufficienti a garantire che il corpo rigido sia fermo. Quando tali condizioni sono verificate, il corpo rigido non necessariamente deve essere fermo. Esso potrebbe essere in moto

con il centro di massa che si muove con velocità costante ( $\bar{\mathbf{a}}_{\text{CM}} = 0$ ) ed in rotazione con velocità angolare costante attorno ad un asse principale d'inerzia passante per il centro di massa (il momento angolare deve essere parallelo all'asse di rotazione così il momento richiesto è nullo).

Se le forze sono tutte contenute in un piano, allora il problema diventa un problema piano. I gradi di libertà in questo caso sono solo tre: lo spostamento del corpo rigido lungo  $x$  e  $y$  e la rotazione attorno ad un asse, parallelo all'asse  $z$ , perpendicolare al piano contenente le forze. In questo caso anche le equazioni che devono essere soddisfatte si riducono a tre:

$$\begin{aligned} R_x &= 0 \\ R_y &= 0 \end{aligned} \qquad M_z = 0$$

In un problema di statica la risultante delle forze esterne è nulla, in queste condizioni il momento delle forze non dipende dal polo scelto per il calcolo dei momenti: se noi annulliamo il momento rispetto ad un polo, allora il momento sarà nullo rispetto a tutti i punti del piano  $xy$ .

In altri termini, noi possiamo scegliere di far passare l'asse di rotazione per qualunque punto del piano  $xy$ : cercheremo quindi di scegliere il punto che ci porta una semplificazione nel calcolo dei momenti.

### ***Punto di applicazione della forza peso.***

Quando un corpo rigido è sottoposto alla forza peso dobbiamo intendere che ogni parte del corpo rigido è soggetta ad una forza, diretta in direzione verticale verso il basso e di intensità pari alla massa della parte per l'accelerazione di gravità  $g$ . Il corpo rigido è soggetto cioè ad un sistema di forze tutte parallele tra loro.

Abbiamo già osservato che quando si ha a che fare con un corpo rigido, una forza, anche se applicata ad un particolare punto del corpo, in realtà agisce su tutto il corpo rigido. Quindi non è importante la singola forza ed il particolare punto a cui essa è applicata, quanto il suo contributo alla risultante e al momento risultante. Infatti, come si evince dalle due equazioni cardinali dei sistemi, il moto del corpo rigido è determinato solo dalla risultante e dal momento risultante.

$$\frac{d\bar{\mathbf{P}}}{dt} = \bar{\mathbf{R}}^{\text{est}} \qquad \frac{d\bar{\mathbf{L}}}{dt} = \bar{\mathbf{M}}^{\text{est}}$$

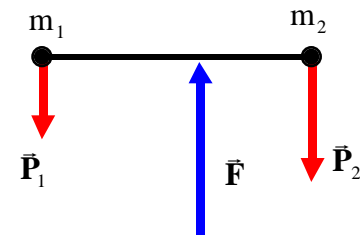
Ne segue che un insieme di forze agenti su un corpo rigido può essere sostituito da un altro insieme di forze “*equivalente al primo*” purché il secondo abbia la stessa risultante e lo stesso momento risultante.

Vogliamo mostrare, in questo paragrafo, che l’insieme delle forze peso agenti sulle singole parti del corpo rigido è equivalente, nel senso precedentemente detto, ad un’unica forza, di intensità pari alla massa totale del corpo rigido per l’accelerazione di gravità,  $g$ , applicata nel centro di massa del sistema.

Non faremo la dimostrazione in generale ma verificheremo questa affermazione per un sistema rigido particolarmente semplice.

Consideriamo un sistema rigido composto da due masse puntiformi di massa rispettivamente  $m_1$  ed  $m_2$  mantenute a una certa distanza da una bacchetta rigida di massa trascurabile. Supponiamo, ma non è essenziale, che la bacchetta sia in posizione orizzontale.

Vogliamo trovare, se esiste, l’intensità della forza e il punto della sbarretta a cui va applicata per equilibrare le forze peso agenti sulle due masse puntiformi (il ragionamento che facciamo è che se le due forze peso sono equivalenti ad una sola applicata al centro di massa, allora le due forze potranno essere equilibrate da un’unica forza).



Se imponiamo le condizioni di equilibrio di un corpo rigido, la prima delle due condizioni, ossia il fatto che la risultante delle forze applicate deve essere nulla ci dice che

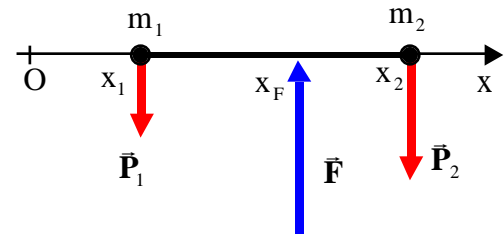
$$\bar{\mathbf{R}}^{\text{est}} = 0 \qquad \bar{\mathbf{P}}_1 + \bar{\mathbf{P}}_2 + \bar{\mathbf{F}} = 0 \qquad \bar{\mathbf{F}} = -(\bar{\mathbf{P}}_1 + \bar{\mathbf{P}}_2)$$

la forza  $F$  è anch’essa verticale, diretta verso l’alto e con un’intensità pari al peso totale del corpo rigido:



$$F = m_1g + m_2g = (m_1 + m_2)g$$

Per cercare il suo punto di applicazione, introduciamo un sistema di riferimento con l'asse  $x$  coincidente con la retta passante per i due punti materiali. In questo sistema di riferimento sia  $x_1$  la coordinata della prima particella e  $x_2$  quella della seconda. Con  $x_F$  indicheremo la coordinata del punto di applicazione della forza  $F$ . Infine annulliamo il momento risultante rispetto all'origine del sistema di riferimento. Se il momento risultante deve essere nullo rispetto ad  $O$ , allora lo sarà anche la sua componente perpendicolare al piano della figura. In altre parole deve essere nullo il momento assiale rispetto ad un asse perpendicolare alla figura e passante per  $O$ . Calcoliamoci i momenti assiali:



$$\begin{array}{ccc} \bar{P}_1 & \bar{P}_2 & \bar{F} \\ +P_1x_1 & +P_2x_2 & -Fx_F \end{array}$$

Da cui:

$$P_1x_1 + P_2x_2 - Fx_F = 0 \qquad x_F = \frac{m_1gx_1 + m_2gx_2}{(m_1 + m_2)g} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

Quindi le due forze peso risultano equilibrate da un'unica forza di intensità pari al peso totale, diretta verso l'alto ed applicata proprio nel centro di massa dei due corpi.

Le due forze peso sono dunque equivalenti ad un'unica forza pari al peso totale del corpo applicata nel centro di massa.

Ovviamente questa dimostrazione si basa sul fatto che l'accelerazione di gravità  $\bar{g}$  sia la stessa per i due corpi in modulo, direzione e verso. Essa è valida fino a tanto che le estensioni del sistema rigido sono piccole, in modo da poter ritenere  $\bar{g}$  costante in intensità e direzione. Quando questo non accade, il punto di applicazione della forza peso, chiamato *centro di gravità* o *baricentro*, non coincide con il centro di massa.

### Metodo pratico per determinare il centro di massa di un corpo irregolare.

Il fatto che per corpi rigidi di piccole dimensioni il punto di applicazione della forza peso coincide con il centro di massa può essere sfruttato per determinarne la posizione, cosa che è estremamente utile quando il corpo si presenta irregolare, senza particolari simmetrie.

Il corpo in esame viene sospeso per un suo punto mediante un filo, e si osserva la posizione di equilibrio.

Le forze esterne applicate al corpo rigido sono la forza peso  $\vec{P}$ , che è applicata nel centro di massa, e la tensione  $\vec{T}$  esercitata dal filo e applicata nel punto di sospensione. In condizioni di equilibrio la risultante delle forze esterne deve essere nulla, quindi:

$$\vec{T} + \vec{P} = 0$$

La tensione  $\vec{T}$  ha lo stesso modulo e direzione di  $\vec{P}$  ma verso opposto. La tensione  $\vec{T}$  e il peso  $\vec{P}$  formano una coppia di forze.

In condizioni di equilibrio, il loro momento deve essere nullo. Quindi la coppia deve avere braccio nullo, le rette di azione delle due forze coincidono. Il centro di massa si deve trovare sul prolungamento della retta coincidente con il filo di sospensione (la retta di azione della tensione). Ripetendo la procedura per un punto diverso di sospensione, si può trovare il centro di massa come intersezione dei prolungamenti delle rette coincidenti con il filo di sospensione nei due casi.

### ***Equilibrio di un corpo rigido in un campo gravitazionale.***

Nel caso del punto materiale abbiamo osservato che le posizioni di equilibrio corrispondono alle posizioni di massimo o di minimo dell'energia potenziale. Nei punti di minimo dell'energia potenziale si ha un equilibrio stabile, nel senso che appena il punto materiale viene spostato dalla posizione di equilibrio, si origina una forza che tende a riportare il punto materiale nella posizione di equilibrio. Nei punti di massimo si ha equilibrio instabile: appena il punto materiale viene spostato dalla posizione di equilibrio, si origina una forza che tende ad allontanarlo dalla posizione di equilibrio.

Quando invece l'energia potenziale è costante, indipendente dalla posizione, si parla di equilibrio indifferente: in tal caso quando il punto materiale viene spostato dalla posizione di equilibrio, non si manifesta nessuna forza.

Tutto quello che vale per i punti materiali vale anche per il moto traslatorio dei corpi rigidi. In più questi ultimi

possono avere dei moti di rotazione: dobbiamo estendere le condizioni di equilibrio anche a questi moti.

Abbiamo dimostrato che il sistema delle forze peso agenti su un corpo rigido è equivalente ad una forza pari al peso totale del corpo applicata al centro di massa. Questo vale sia nel caso di un moto di traslazione che per un moto di rotazione.

Consideriamo un corpo rigido libero di ruotare attorno ad un asse orizzontale privo di attrito, per esempio una sbarretta di massa  $M$  e lunghezza  $L$  che può ruotare attorno ad un asse passante per un suo estremo. Il moto di questo corpo avviene sotto l'azione della forza peso, applicata al centro di massa e della reazione vincolare. Il momento assiale della reazione vincolare calcolato rispetto all'asse di rotazione è nullo: quindi il corpo è in equilibrio se è nullo anche il momento assiale, rispetto all'asse di rotazione, della forza peso. Questo accade se la verticale per il centro di massa (la retta di azione della forza peso), passa per l'asse di rotazione.

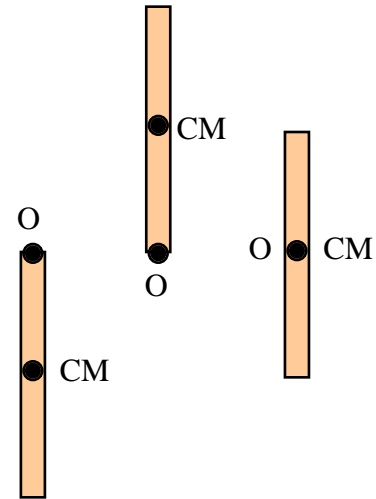
Ci sono tre casi possibili.

a) il centro di massa si trova al di sotto dell'asse: l'equilibrio è un equilibrio stabile. Non appena il corpo viene allontanato dalla posizione di equilibrio, si genera un momento che tende a riportare il corpo nella posizione di equilibrio. Dal punto di vista energetico si vede che ogni spostamento dalla posizione di equilibrio genera un innalzamento della posizione del centro di massa, quindi è necessario compiere del lavoro contro la forza peso per produrre la rotazione. La posizione di equilibrio corrisponde ad un minimo dell'energia potenziale.

b) Il centro di massa si trova al di sopra dell'asse di sospensione: l'equilibrio è un equilibrio instabile. Non appena il corpo viene spostato dalla posizione di equilibrio si genera un momento che tende ad allontanare il corpo dalla posizione di equilibrio. Dal punto di vista energetico ogni spostamento provoca un abbassamento del centro di massa: del lavoro viene effettuato dalla forza peso e si ha una diminuzione dell'energia potenziale. La posizione di equilibrio corrisponde ad un massimo dell'energia potenziale.

c) L'asse passa per il centro di massa: l'equilibrio è indifferente.

Qualunque sia lo spostamento non si origina nessun momento. La posizione del centro di massa rimane fissa e quindi anche l'energia potenziale rimane costante.

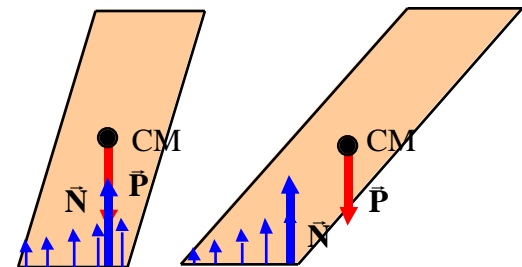


Infine determiniamo le condizioni di equilibrio per un corpo appoggiato su un piano orizzontale liscio.

Se il piano è liscio, le reazioni vincolari possono essere solo normali al piano, cioè verticali e dirette verso l'alto, pur non essendovi alcuna limitazione alla loro intensità. Sappiamo che l'insieme di queste forze parallele è equivalente ad un'unica forza applicata in un punto particolare. E' facile rendersi conto che il punto di applicazione di un sistema di forze parallele e concordi è un punto interno della figura geometrica che racchiude tutti i punti di applicazione, detta *poligono di appoggio*. Supponiamo per assurdo che il punto di applicazione della forza equivalente al sistema di forze parallele sia esterno al poligono di appoggio. Perché la forza sia equivalente al sistema di forze parallele, occorre che il suo momento valutato rispetto a qualsiasi punto sia uguale al momento del sistema di forze originario: quindi in particolare questa uguaglianza deve valere per il punto di applicazione della risultante. Se scegliamo tale punto come polo, il momento della risultante è nullo, mentre i momenti delle singole forze hanno tutti la componente, normale al piano della figura, diversa da zero e dello stesso segno. Quindi il sistema di forze originarie ha un momento, valutato rispetto al polo scelto, che ha almeno una componente non nulla, quella normale al piano della figura. Da qui l'assurdo. Esso deriva dall'aver supposto che il punto di applicazione sia esterno al dominio dei punti di applicazione. (Il momento delle forze valutato rispetto ad un punto interno al poligono di appoggio può essere nullo: infatti le componenti dei momenti delle forze nella direzione normale al piano del disegno, valutate rispetto al punto di applicazione della risultante interno al poligono di appoggio, non hanno tutte lo stesso segno e quindi sono compatibili con un momento risultante nullo).

Allora il corpo poggiato sul piano liscio è in equilibrio se la verticale passante per il centro di massa interseca il piano di appoggio in un punto interno al poligono di appoggio.

Infatti nel caso in cui tale punto è esterno al poligono di appoggio, la risultante delle reazioni vincolari, che ha come punto di applicazione un punto interno al poligono di appoggio, non è allineata con la forza peso. Si viene a creare una coppia, forza peso e reazione vincolare, che tende a rovesciare il corpo.



### **Il pendolo fisico.**

Il pendolo fisico è costituito da un corpo rigido libero di ruotare attorno ad un asse orizzontale non passante per il centro di massa.

Consideriamo un corpo rigido costituito da una sbarretta di massa  $M$  e lunghezza  $L$  libera di ruotare attorno ad un

asse orizzontale passante per un suo estremo.

Indichiamo con O il punto dell'asse di rotazione che si trova nel piano verticale perpendicolare all'asse di rotazione e contenete il centro di massa.

Abbiamo già osservato che la posizione di equilibrio stabile per il pendolo fisico si ha quando il centro di massa si trova nel piano verticale passante per l'asse di rotazione, al di sotto dell'asse di rotazione.

Le forze agenti sul pendolo fisico sono la forza peso  $\vec{P}$  e la reazione vincolare  $\vec{R}_v$  esercitata dall'asse di rotazione.

In condizioni di equilibrio la risultante delle forze esterne deve essere nulla:

$$\vec{P} + \vec{R}_v = 0 \quad \vec{R}_v = -\vec{P}$$

Da questo deriva che le due forze  $\vec{P}$  e  $\vec{R}_v$  costituiscono una coppia.

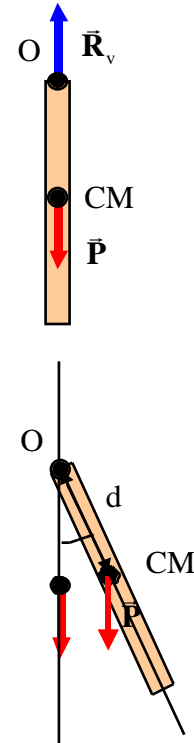
Sempre per le condizioni di equilibrio, anche il momento risultante deve essere nullo. Perché questo accada, occorre che il braccio della coppia sia nullo (il modulo del momento della coppia è uguale al modulo di una delle forze per il braccio b). In che equivale a dire che il centro di massa si trova sulla verticale passante per il punto O al di sotto di esso.

Supponiamo di spostare il corpo rigido dalla posizione di equilibrio di un angolo rispetto alla verticale passante per il punto di sospensione O. Indichiamo con d la distanza tra il punto di sospensione O dal centro di massa. L'equazione del moto di rotazione del corpo rigido attorno all'asse di rotazione

$$M_z = I$$

tenendo conto che il momento assiale della forza peso è  $M_{pz} = -Mgd \sin \theta$ , che quello della reazione vincolare è nullo perché essa è applicata all'asse di rotazione, vale in questo caso

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -Mgd \sin \theta$$



Se le oscillazioni sono piccole si ottiene:

$$\ll 1 \text{ rad} \quad \frac{d^2}{dt^2} = -\frac{Mgd}{I}$$

da cui ricaviamo che l'accelerazione angolare risulta essere proporzionale all'opposto della posizione angolare, .  
Si tratta quindi di un moto armonico con pulsazione angolare

$$p = \sqrt{\frac{Mgd}{I}}$$

Il periodo delle oscillazioni sarà dato da:

$$T = \frac{2}{p} = 2 \sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$

Confrontando con l'analogia espressione relativa del pendolo semplice,  $T = 2 \sqrt{\frac{\ell}{g}}$ , si può introdurre la lunghezza

ridotta del pendolo fisico  $\ell^* = \frac{I}{Md}$ , la lunghezza che dovrebbe avere il pendolo semplice per avere lo stesso periodo di quello fisico.

Sostituendo le espressioni di I e d relativa alla sbarretta si ottengono le seguenti risposte:

$$T = \frac{2}{p} = 2 \sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg \frac{L}{2}}} = 2 \sqrt{\frac{2L}{3g}} \quad \ell^* = \frac{2L}{3}$$

### **Calcolo della reazione vincolare in un pendolo fisico.**

La reazione vincolare non compare nell'equazione del moto del pendolo fisico. Il suo moto di rotazione è completamente determinato dal momento assiale della forza peso applicata al centro di massa del corpo rigido.

Se siamo interessati a determinare l'intensità della reazione vincolare, in funzione dell'angolo  $\theta$ , allora l'equazione del moto di rotazione non ci da alcun aiuto: dobbiamo far ricorso alla I equazione cardinale della dinamica dei sistemi, altrimenti detta teorema del centro di massa.

$$\vec{P} + \vec{R}_v = M\vec{a}_{CM}$$

Osserviamo che il centro di massa, come tutti i punti del corpo rigido, si muove su una traiettoria circolare con velocità angolare  $\dot{\theta}$ .

La sua accelerazione avrà una componente radiale, l'accelerazione centripeta  $a_c = \dot{\theta}^2 d$ , e una componente tangenziale data da  $a_t = d \ddot{\theta}$ .

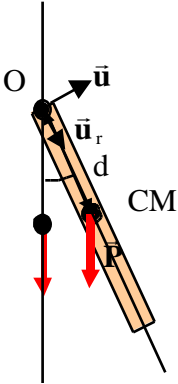
Se conosciamo l'ampiezza delle oscillazioni  $\theta_{max}$ , possiamo calcolarci la velocità angolare  $\dot{\theta}$  in funzione dell'angolo  $\theta$  con la conservazione dell'energia meccanica totale<sup>3</sup> tra la posizione iniziale, quando il pendolo si trova nella sua posizione estrema, e la posizione finale corrispondente ad una generica posizione individuata dall'angolo  $\theta$ :

$$\begin{aligned} E_i &= E_f \\ K_i + U_i &= K_f + U_f \\ 0 + Mgd(1 - \cos \theta_{max}) &= \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + Mgd(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

Da cui possiamo ricavare la velocità angolare:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{Mgd(\cos \theta - \cos \theta_{max})}{I}$$

Proiettando il teorema del centro di massa nelle direzione radiale e trasversa si ottiene:



<sup>3</sup> L'energia meccanica totale si conserva perché l'unica forza non conservativa, la reazione vincolare, compie lavoro nullo perché applicata ad un punto fermo.

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}_r &= Mg \cos \theta + R_r = -M \omega^2 d \\ \ddot{\mathbf{u}}_\theta &= -Mg \sin \theta + R_\theta = M d \dot{\omega} \end{aligned}$$

da cui si possono ottenere le componenti radiale e trasversa della reazione vincolare, tenendo conto che l'accelerazione angolare può essere determinata dall'equazione del moto di rotazione  $M_z = I \dot{\omega}$ .

Per  $\dot{\omega} = 0$ , la componente trasversa è nulla, mentre la componente radiale è data da:

$$R_r = -M \frac{Mgd(1 - \cos \theta_{\max})}{I} d - Mg$$

### Urto tra un corpo rigido e un punto materiale

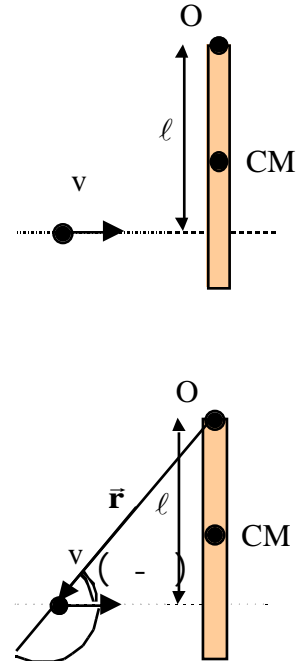
Consideriamo la solita sbarretta di massa  $M$  e lunghezza  $L$ , libera di ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per un suo estremo, inizialmente ferma nella sua posizione di equilibrio stabile. Consideriamo inoltre un proiettile di massa  $m$  che si muove con una velocità  $v$ , e che colpisce la sbarretta ad una distanza  $\ell$  dall'asse di rotazione perpendicolarmente alla sbarretta stessa. Supporremo infine che dopo l'urto il proiettile si conficchi nella sbarretta e si fermi rispetto ad essa.

Si tratta di un urto tra un punto materiale, il proiettile, e un corpo rigido, la sbarretta, completamente anelastico.

Consideriamo quindi il sistema di punti materiali composto dai corpi che si urtano: il proiettile e la sbarretta.

Le forze esterne agenti sul sistema di punti materiali sono la forza peso (sulla sbarretta e sul proiettile), e la reazione vincolare sulla sbarretta esercitata dal vincolo (l'asse di rotazione fisso).

La forza peso non può comportarsi durante l'urto come una forza impulsiva, la sua intensità è sempre data dal prodotto della massa del corpo per l'accelerazione di gravità  $g$ . Al contrario la reazione vincolare, la forza esercitata dall'asse di rotazione sulla sbarretta, potrebbe avere un comportamento di tipo impulsivo. Quindi per risolvere l'urto non possiamo applicare la conservazione della quantità di moto.





Osserviamo però che la reazione vincolare è applicata sull'asse di rotazione: il momento assiale di questa forza rispetto all'asse di rotazione è nullo qualunque sia la sua intensità, anche molto grande, perché il braccio è nullo. Trascurando quindi il momento assiale delle forze peso rispetto all'asse di rotazione, perché la forza peso non è impulsiva, si ottiene la conservazione del momento angolare assiale (cioè della componente del momento angolare parallelo all'asse di rotazione).

$$\frac{dL_z}{dt} = \underbrace{M_{R,z}}_{=0 \text{ perchè il braccio è nullo}} + \underbrace{M_{P,z}}_{\text{trascurabile: la forza peso non è impulsiva}} = 0 \quad L_z = \text{cost}$$

Prima dell'urto solo il proiettile si muove, quindi  $L_{zi}$  sarà quella del proiettile:

Il modulo :

$$\vec{L}_i = \vec{r} \times m\vec{v} \quad L = rmvsen \theta = rmvsen \left( \frac{\ell}{r} \right) = mv\ell$$

La direzione e il verso parallelo e concorde con l'asse z

Pertanto  $L_{zi} = mv\ell$ .

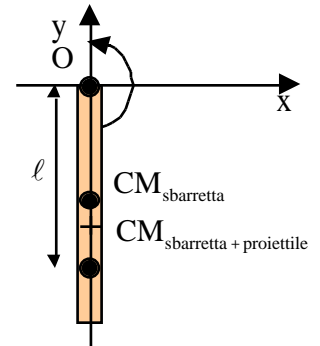
Dopo l'urto i due corpi che rimangono attaccati si comportano come un unico corpo rigido che ruota con una velocità angolare  $\omega_f$  attorno all'asse di rotazione. Il momento di inerzia vale:

$$I = \underbrace{\frac{1}{3}ML^2}_{\text{momento d'inerzia della sbarretta}} + \underbrace{m\ell^2}_{\text{momento d'inerzia di un punto materiale di massa m a distanza \ell dall'asse di rotazione}}$$

Il momento angolare finale invece è dato da:

$$L_{zf} = I \omega_f$$

Imponendo la conservazione del momento angolare assiale si può ricavare la velocità angolare dello stato finale:



$$L_{zi} = L_{zf} \quad mv\ell = \frac{1}{3}ML^2 + m\ell^2 \quad \omega_f = \frac{mv\ell}{\frac{1}{3}ML^2 + m\ell^2}$$

Determiniamo ora la variazione di quantità di moto subita dal sistema, sbarretta più proiettile, nell'urto. Poiché questa variazione è determinata dalla reazione vincolare, la forza esercitata dall'asse di rotazione, risponde alle precedenti domanda equivale a determinare l'impulso della reazione vincolare.

In formule:

$$\vec{I}_{R_v} = \vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i \quad \vec{P}_i = mv\vec{i} \\ \vec{P}_f = (M + m)\vec{v}_{CM}$$

La velocità del centro di massa complessivo del sistema sarà tangente alla traiettoria del centro di massa, una circonferenza con centro in O. Nell'istante subito dopo l'urto la velocità del centro di massa sarà diretta lungo l'asse x. La sua intensità sarà data dalla velocità angolare per la distanza del centro di massa dall'asse di rotazione. E' necessario calcolarsi questa distanza. Per ragioni di simmetria il centro di massa del sistema sbarretta più proiettile si troverà sull'asse y. La sua coordinata si otterrà attraverso la seguente espressione:

$$y_{CM_{sbarretta+proiettile}} = \frac{My_{CM_{sbarretta}} + my_{proiettile}}{M + m} = \frac{M \left(-\frac{L}{2}\right) + m(-\ell)}{M + m} = -\frac{\frac{ML}{2} + m\ell}{M + m}$$

La distanza dall'asse di rotazione sarà  $d_{OCM_{sb+pr}} = \frac{\frac{ML}{2} + m\ell}{M + m}$ . Il modulo della velocità finale sarà:

$$v_{CM_{sb+pr}} = \omega_f d_{OCM_{sb+pr}} = \frac{mv\ell}{\frac{1}{3}ML^2 + m\ell^2} \frac{\frac{ML}{2} + m\ell}{M + m} = \frac{3mv\ell}{2(M + m)} \frac{ML + 2m\ell}{ML^2 + 3m\ell^2}$$

Pertanto la variazione della quantità di moto subita dal sistema proiettile più sbarretta sarà data da:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{I}}_{R_v} &= \bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{P}}_f - \bar{\mathbf{P}}_i & \bar{\mathbf{P}}_i &= mv\bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{P}}_i &= mv\bar{\mathbf{i}} \\ \bar{\mathbf{P}}_f &= (M+m)\bar{\mathbf{v}}_{CM} & \bar{\mathbf{P}}_f &= (M+m)\bar{\mathbf{v}}_{CM} & \bar{\mathbf{P}}_f &= (M+m)\frac{3mv\ell}{2(M+m)}\frac{ML+2m\ell}{ML^2+3m\ell^2}\bar{\mathbf{i}} \end{aligned}$$

da cui:

$$\bar{\mathbf{P}}_f - \bar{\mathbf{P}}_i = \frac{3\ell}{2} \frac{ML+2m\ell}{ML^2+3m\ell^2} - 1 \quad mv\bar{\mathbf{i}} = \frac{3\ell(ML+2m\ell) - 2(ML^2+3m\ell^2)}{2(ML^2+3m\ell^2)} \quad mv\bar{\mathbf{i}} = \frac{3\ell ML - 2ML^2}{2(ML^2+3m\ell^2)} \quad mv\bar{\mathbf{i}}$$

Da cui si vede che la variazione della quantità di moto è diretta lungo l'asse delle x.

Se  $3\ell ML - 2ML^2 > 0$ , ossia se la distanza del punto di impatto del proiettile dall'asse di rotazione  $\ell > \frac{2}{3}L$ , la variazione della quantità di moto è diretta nella direzione positiva dell'asse delle x. Questo significa che anche la reazione vincolare impulsiva durante l'urto ha questa direzione e questo verso.

Se  $3\ell ML - 2ML^2 < 0$ , ossia se la distanza del punto d'impatto del proiettile dall'asse di rotazione  $\ell < \frac{2}{3}L$ , la variazione della quantità di moto è diretta nella direzione negativa dell'asse delle x. Naturalmente anche la reazione vincolare impulsiva ha questa direzione e questo verso.

Infine se  $3\ell ML - 2ML^2 = 0$ , ossia se la distanza del punto d'impatto del proiettile dall'asse di rotazione  $\ell = \frac{2}{3}L$ ,

la variazione della quantità di moto totale del sistema è nulla, tale sarà anche la reazione vincolare.

Questa condizione è sfruttata negli utensili che servono per battere, per esempio martello, racchetta da tennis, mazza da baseball, ecc.. Questi utensili sono progettati in modo che l'urto avvenga ad una distanza dall'asse di rotazione determinata dalla condizione precedente, in tal caso la reazione vincolare esercitata dall'asse di rotazione durante l'urto è nulla. In questi utensili l'asse di rotazione corrisponde al polso o al gomito della persona che usa l'utensile, vuol dire che la forza impulsiva da esercitare con il polso o il gomito sarà nulla. (Se invece afferriamo il martello, o la racchetta da tennis in una posizione diversa da quella consigliata, e proviamo a dare dei colpi, avvertiremo un fastidio nel polso o nel gomito, causato dal fatto che dobbiamo applicare con il polso o il gomito una forza molto intensa nel momento dell'urto, forza che potrebbe al limite danneggiare l'articolazione).

Si osservi infine che la distanza del punto di impatto del proiettile dall'asse di rotazione che corrisponde ad impulso nullo della reazione vincolare è proprio uguale alla lunghezza ridotta della sbarretta quando funziona come pendolo fisico. Questa corrispondenza non vale solo per la sbarretta ma in generale per qualunque corpo rigido.

## ***Gli stati della materia.***

Gli oggetti che abitualmente incontriamo nella vita quotidiana si presentano in tre diversi stati:

1. Stato solido, in cui i corpi sembrano avere un volume ed una forma.
2. Stato liquido, in cui i corpi sembrano possedere un volume ma non una forma propria, anzi essi si adattano alla forma del recipiente che li contiene.
3. Stato gassoso, in cui i corpi sembrano non avere né un volume né una forma propria, ma tendono ad occupare tutto il volume del recipiente che li contiene ed ad assumerne la forma.

I corpi liquidi e quelli gassosi costituiscono l'insieme dei corpi denominati "fluidi".

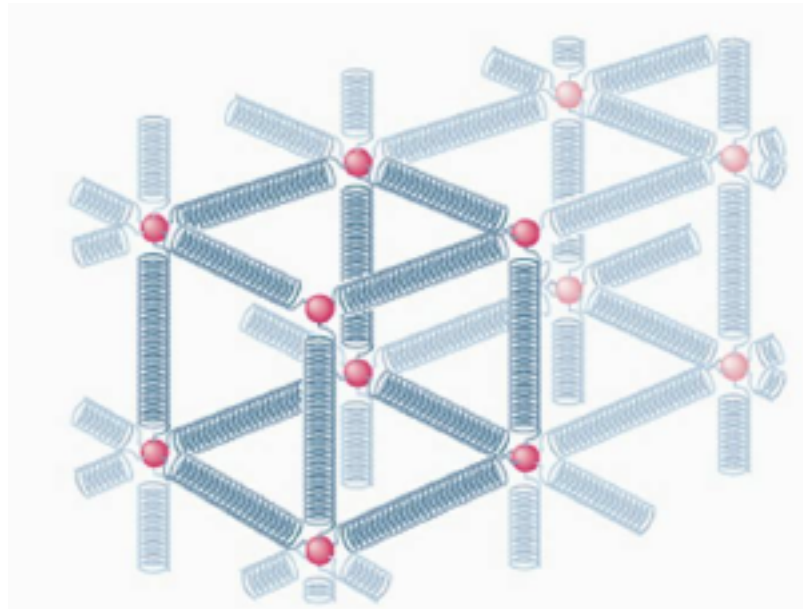
Naturalmente le leggi della meccanica si applicano a ciascuno dei tre stati della materia: va sottolineato il merito della meccanica classica che riesce a descrivere molto bene il comportamento di tutte e tre i tipi di corpi anche se hanno caratteristiche molto diverse tra loro.

## ***I corpi solidi e i moduli di elasticità.***

Nel caso dei corpi solidi, abbiamo già osservato che essi possono essere descritti in prima approssimazione come dei corpi rigidi.

Cos'è che fornisce ai solidi la capacità di resistere a sollecitazioni anche intense subendo delle deformazioni molto piccole?

Molti dei corpi solidi, in particolare i metalli (un blocco di ferro, una sbarra di alluminio, un cavo di rame, ecc.) sono costituiti da atomi che occupano posizioni fisse in una struttura ordinata, denominata struttura cristallina. Naturalmente tra un atomo e l'altro c'è il vuoto. Viene mantenuto nella sua posizione perché interagisce con gli atomi che gli sono vicini ( possiamo schematizzare queste interazioni mediante delle molle estremamente rigide, aventi cioè una costante elastica estremamente elevata).



Gli atomi vanno immaginati in perenne movimento, essi infatti oscillano attorno alla loro posizione di

equilibrio: l'ampiezza delle oscillazioni dipende dalla temperatura del corpo. Più elevata è la temperatura più grande sarà l'ampiezza delle oscillazioni.

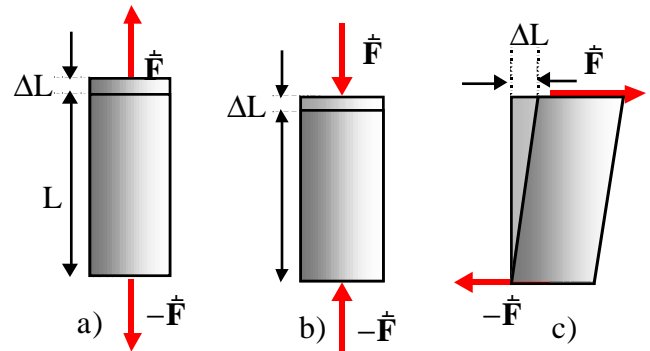
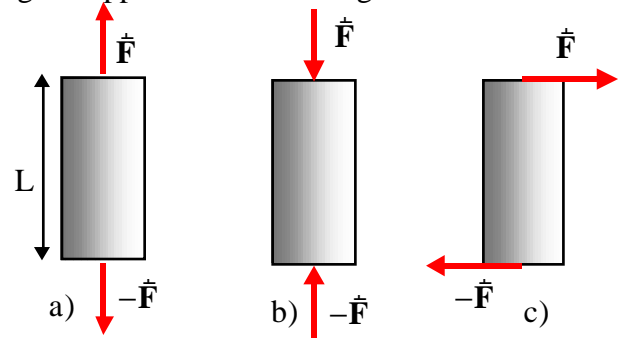
E' proprio la grande intensità delle forze di interazione tra gli atomi che da un lato garantisce loro la stabilità della forma, dall'altro impedisce al corpo di deformarsi quando viene sottoposto a sollecitazioni esterne.

Comunque, poiché l'intensità delle forze tra gli atomi è elevata ma sicuramente non infinita, quando le sollecitazioni esterne diventano grandi è logico attendersi che esse provochino delle deformazioni nel solido.

Quali tipo di sollecitazioni è possibile applicare ad un solido?

Come mostrato in figura, un solido, che in figura ha una forma cilindrica, può essere sollecitato per

1. trazione, caso a) della figura, quando alle basi del cilindro vengono applicate due forze uguali e contrarie che tendono ad allungare il cilindro stesso.
2. Compressione, caso b) della figura, quando alle basi del cilindro vengono applicate due forze uguali e contrarie che tendono ad accorciare il cilindro stesso.
3. Taglio, caso c) della figura, quando alle basi del cilindro vengono applicate due forze uguali e contrarie parallele alle basi del cilindro. (E' la forza che si esercita su un mazzo di carte per disporle in modo da facilitare la scelta di una carta quando, all'inizio della partita, occorre stabilire che deve servire le carte: si poggia la mano sul mazzo di carte e la si muove parallelamente al piano di appoggio)
4. Compressione idrostatica in cui una forza perpendicolare alla superficie viene applicata in ogni punto del corpo.



Considerando parte il caso della compressione idrostatica, di cui parleremo nel prossimo paragrafo relativo ai fluidi, in tutti i casi, l'applicazione della sollecitazione produce una deformazione nel corpo.

Se il corpo è sottoposto ad una trazione, esso subirà un allungamento, se a compressione un accorciamento, e se infine è sottoposto ad una sollecitazione di taglio subirà

una deformazione del tipo mostrata in figura (si pensi sempre al mazzo di carte).

In tutti e tre i casi si possono definire le seguenti quantità:

1. Lo sforzo: pari alla forza applicata diviso per la sezione del corpo ( $\sigma = \frac{F}{A}$ , si misura in  $\text{N/m}^2$ ).
2. La deformazione relativa: nel caso di un corpo sotto posta a trazione, se la lunghezza  $L$  del corpo varia di  $\Delta L$ , la deformazione relativa sarà data da  $\frac{\Delta L}{L}$ . Nel caso di una compressione  $\Delta L$  sarà l'accorciamento della sbarra, mentre per una sollecitazione di taglio il significato di  $\Delta L$  è mostrato in figura.

Quello che si trova provando con un certo numero di campioni è che, quando la sollecitazione non è eccessivamente grande, la deformazione relativa prodotta dalla sollecitazione è proporzionale alla sforzo esercitato. Il coefficiente di proporzionalità si chiama modulo di elasticità. Si può cioè scrivere la seguente espressione:

$$\text{sforzo} = \text{modulo di elasticità} \times \text{deformazione relativa}$$

che diventa:

1.  $\sigma = \frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L}$   $E = \text{modulo di Young}$  per trazioni o compressioni.
2.  $\tau = \frac{F}{A} = G \frac{\Delta L}{L}$   $G = \text{modulo di taglio}$  per sollecitazioni di taglio.

Come appare dalla definizione, il modulo di Young e quello di taglio si misurano in  $\text{N/m}^2$ . Sia il modulo di Young che quello di taglio per i diversi materiali sono riportati in apposite tabelle. Il modulo di taglio è inferiore, per un rapporto da 2 a 3, di quello Young.

Normalmente hanno valori molto elevati, per esempio per l'acciaio da costruzione  $E=200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ , ad indicare che occorrono forze molto intense per produrre piccole variazioni nelle dimensioni dei corpi solidi.

Sempre considerando un tondino di acciaio da costruzione della lunghezza di un metro e sezione  $1 \text{ cm}^2$ , si vede che occorre una forza di  $20000 \text{ N}$  per produrre un allungamento di  $1 \text{ mm}$  ( $\frac{\Delta L}{L} = 10^{-3}$  una parte per mille).

$$F = AE \frac{L}{L} = 10^{-4} \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 10^{-3} = 20000N$$

Quando la sollecitazione viene rimossa dal campione, esso ritorna alle sue dimensioni originarie. Si parla quindi di un comportamento elastico del campione.

Se si aumenta la sollecitazione, allora si perde la proporzionalità tra lo sforzo e la deformazione, il campione si deforma di più di quanto avrebbe dovuto estrapolando il suo comportamento elastico.

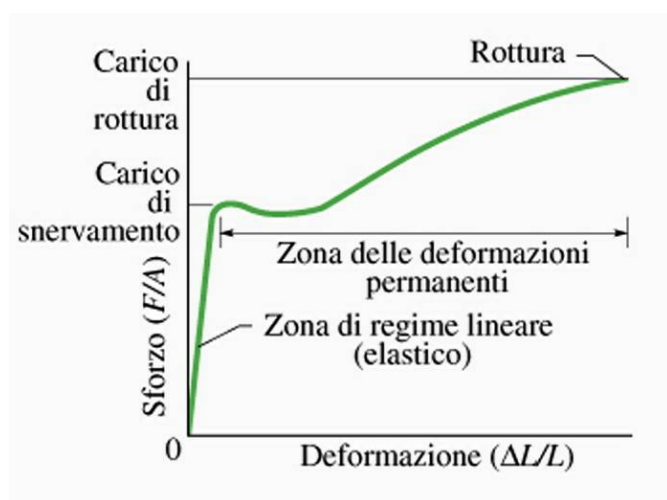
Anche in questo caso comunque togliendo la sollecitazione il corpo riprende le sue dimensioni iniziali almeno fino a quando non viene raggiunta la zona dello snervamento, in cui pur togliendo la sollecitazione, il corpo resta permanente deformato. Si parla in questo caso di un comportamento “plastico”.

In questa zona la deformazione non è più una funzione vera e propria dello sforzo: a parità di sforzo si possono ottenere diverse deformazioni che dipendono dalla storia precedente del materiale.

Infine se si aumenta ancora la sollecitazione, si raggiunge il cosiddetto limite di rottura, in cui alcuni dei legami tra gli atomi del reticolo cristallino vengono spezzati provocando la rottura del materiale in due o più parti.

In generale i moduli di elasticità per trazione e compressione sono pressoché uguali. Anche in queste condizioni il limite di rottura può essere diverso per i due tipi di sollecitazione. Tipico è il caso del calcestruzzo che si comporta molto bene quando viene compresso, ma è estremamente debole quando è sottoposto a sollecitazioni di trazione.

Si osservi, infine, che l'elevato valore del modulo di taglio vuol dire che i corpi solidi si oppongono al fatto che presa una qualunque sezione del corpo, la porzione del corpo su uno dei due lati della sezione scorra rispetto al resto del corpo che si trova dall'altro lato della sezione. Questo, detto in maniera diversa, significa che è difficile far passare la lama di un coltello tra le due parti del corpo.





## Risonanza

Per realizzare una struttura meccanica, un'automobile, un palazzo, ecc, è necessario mettere insieme, facendoli interagire, dei corpi solidi.

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che tutti i corpi solidi, per piccole sollecitazioni hanno un comportamento elastico, in particolare cambiano le loro dimensioni.

È un po' come la molla dell'oscillatore armonico la quale, sottoposta a una sollecitazione, cambia la sua lunghezza.

Nel caso dell'oscillatore armonico abbiamo visto che applicando all'oscillatore un impulso, una forza impulsiva, quando per esempio si trova nella sua posizione di equilibrio, si mette ad oscillare.

A causa della presenza, inevitabile, di forze dissipative, l'ampiezza delle oscillazioni si ridurrà continuamente fino a quando l'oscillatore non si riferma nella sua posizione di equilibrio (oscillazioni smorzate).

Dobbiamo attenderci che se noi applichiamo un impulso ad una struttura meccanica complessa, questa, a causa delle sue proprietà elastiche, si deforma e comincia a vibrare. Anche in questo caso le vibrazioni si esauriranno dopo un po' di tempo e tutta la struttura ritornerà a riposo.

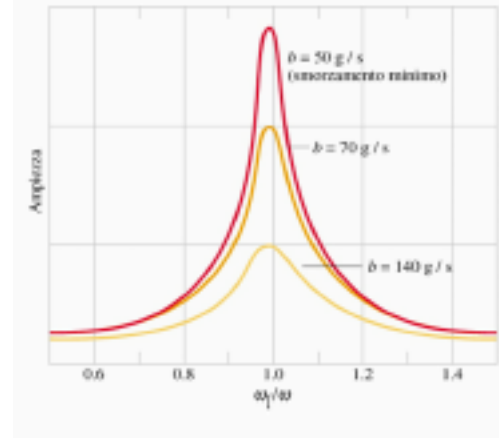
È logico però attendersi che applicando tutta una successione di impulsi, a distanza regolare di tempo, è possibile mantenere la struttura in oscillazione.

Dal punto di vista dell'oscillatore armonico è come se all'oscillatore fosse applicata, oltre alla forza elastica della molla e alle inevitabili resistenze passive, una forza esterna variabile nel tempo con una pulsazione angolare  $\omega_f$ .

Studiando questo tipo di moto, si vede che l'ampiezza delle oscillazioni dipende dalla intensità della resistenza passiva (parametro  $b$  della figura) e dal valore della pulsazione angolare della forza  $\omega_f$ .

In particolare si trova che per bassi valori della resistenza passiva, l'ampiezza delle oscillazioni diventa tanto più grande quando più la pulsazione angolare della forza  $\omega_f$  si approssima alla

pulsazione propria dell'oscillatore  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , questo anche per valori modesti dell'intensità della forza applicata. Questo fenomeno



va sotto il nome di risonanza.

Qual è il problema?

Essenzialmente questo: se ad una struttura meccanica vengono applicate una serie di sollecitazioni, anche piccole, ad intervalli regolari di tempo, e se la frequenza delle sollecitazioni è prossima a quella propria della struttura, determinata dalle sue proprietà elastiche, può accadere che la struttura entra in risonanza: ossia subisce forti deformazioni anche se l'intensità della forza in ogni singola sollecitazione è trascurabile.

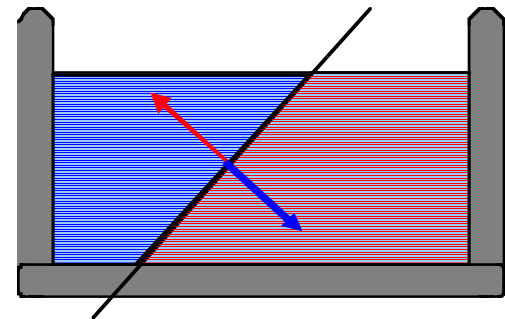
Noi sappiamo che grandi deformazioni corrispondono a grandi sforzi all'interno dei materiali: questi sforzi, a causa della risonanza, possono superare il limite di rottura dei materiali e provocare la rottura dell'intera struttura meccanica.

### ***I fluidi e la pressione idrostatica.***

Con questo termine si indicano quei corpi che si trovano nello stato liquido o gassoso. Si trova infatti che alcune caratteristiche di questi corpi sono comuni e la descrizione dei fenomeni che coinvolgono corpi liquidi o gassosi può essere fatta con le stesse leggi.

Una prima differenza dei fluidi con i solidi sta nel fatto che, essendo in media le distanze tra le molecole più grandi nel caso dei fluidi rispetto ai solidi, le forze di interazione sono estremamente meno intense: nei fluidi le molecole sono debolmente legate l'una all'altra, di conseguenza esse non occupano posizioni predeterminate all'interno del fluido ma possono muoversi al suo interno.

L'altra differenza fondamentale, che è una conseguenza del debole legame intermolecolare, deriva dall'osservazione che i fluidi non riescono ad opporre resistenza a sollecitazioni di taglio. Ne deriva che il relativo modulo di taglio è molto piccolo (nullo in condizioni statiche), il che vuol dire che ci possono essere deformazioni di taglio anche per sforzo nullo: in altri termini supponendo di suddividere il fluido in due parti sezionandolo con una superficie piana arbitraria, è possibile far scorrere una parte del fluido rispetto all'altra lungo la superficie arbitraria tracciata con un piccolissimo sforzo: si pensi a quanto facile sia far scorrere all'interno di un liquido la lama di un coltello.



La conseguenza di questa osservazione è che, in condizioni stazionarie, ciascuna delle due parti di fluido non è in grado di esercitare, sull'altra parte di fluido, forze che abbiano una componente tangente alla superficie di separazione, ma solo forze perpendicolari a tale superficie.

Si può introdurre la pressione idrostatica nel seguente modo.

Se si vuole la pressione in un punto P all'interno di un fluido stazionario, si considera una qualunque superficie piana passante per il punto P. Questa superficie dividerà il fluido in due parti.

Per l'osservazione precedente ciascuna parte di fluido eserciterà sull'altra una forza perpendicolare alla superficie di separazione. Si considera un piccolo elemento della superficie di separazione tra le due parti di fluido che circonda il punto P ed indichiamo con  $A$  la sua area. Sia  $F_n$  la forza, normale, esercitata da una delle due parti del fluido sull'altro attraverso l'area  $A$ : si definisce pressione idrostatica media sull'area  $A$  il rapporto tra la forza normale e l'area dell'elemento di superficie selezionato:

$$P_m = \frac{F_n}{A}$$

La pressione idrostatica nel punto P si otterrà facendo il limite per  $A$  che tende a zero dell'espressione precedente:

$$P = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{F_n}{A}$$

La pressione idrostatica è una grandezza scalare. Le sue unità di misura nel Sistema Internazionale sono  $N/m^2$  (Newton su metro quadro). Questa unità nel Sistema Internazionale prende il nome di Pascal (Pa).

Nella vita quotidiana si usano anche altre unità di misura per la pressione: una di questa è l'atmosfera (atm) che corrisponde alla pressione idrostatica media esercitata al livello del mare dall'atmosfera.

La relazione tra Pascal e atmosfera (atm) è la seguente:

$$1 \text{ atm} = 1.01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

L'atmosfera (atm) corrisponde dunque ad una forza di circa  $10^5$  Newton per ogni metro quadro di superficie interessata, o detto in altri termini, al peso di un corpo di  $10^4$  kg per ogni metro quadro di superficie.

Altra unità di misura della pressione comunemente usata è il "bar", che è un multiplo del Pascal:  $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ . Un bar è all'incirca pari ad una atmosfera.

Con la definizione precedente siamo in grado di determinare la pressione in ogni punto all'interno del fluido. Ma

se noi, dopo aver tracciato la superficie di delimitazione tra le due parti di fluido, sostituiamo una delle due parti con la superficie di un contenitore, ricaviamo che, poiché la parte di fluido che è rimasta non è in grado di accorgersi del cambiamento, esso continuerà ad esercitare la pressione idrostatica, data dalla definizione precedente, su tutti i punti della superficie del contenitore.

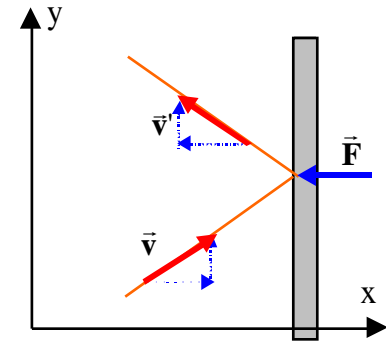
Per capire più in dettaglio come si origina questa forza esercitata dal fluido sul contenitore, dobbiamo far ricorso al modello molecolare.

Abbiamo già osservato che un fluido è costituito da molecole debolmente legate l'una all'altra, il legame è maggiore nel caso dei liquidi, molto più piccolo nel caso dei gas. Esse sono in continuo movimento all'interno del fluido, si muovono di moto caotico e la loro energia cinetica media (e quindi la loro velocità al quadrato media = velocità quadratica media) aumenta con la temperatura. Alcune di queste molecole, quelle più vicine alla superficie del contenitore, nel loro moto caotico, potranno sbattere contro la parete del contenitore e subire un urto.

Se supponiamo che la parete sia priva di attrito, allora la forza che la parete è in grado di esercitare sulla molecola durante l'urto (si tratta di una reazione vincolare) avrà solo la componente normale alla parete (non c'è componente tangenziale perché la parete per ipotesi è liscia, priva di attrito).

Questa osservazione implica che la molecola potrà subire solo accelerazioni nella direzione perpendicolare alla parete: le componenti della velocità parallele alla parete del contenitore non subiranno variazioni a causa dell'urto. La componente della velocità perpendicolare alla parete, invece, verrà modificata dall'urto. In particolare si può calcolare che, se l'urto è elastico, essa si inverte, cambia segno: la molecola cioè torna indietro verso l'interno del contenitore.

Per quanto concerne la parete, possiamo osservare che, dal momento che la parete esercita sulla molecola una forza normale a se stessa, allora, per la terza legge di Newton, anche la molecola eserciterà sulla parete una forza uguale e contraria. La pressione idrostatica può essere interpretata come la media, nel tempo, di tutte le forze esercitate dalle varie molecole su un metro quadro di parete del contenitore.



### Pressione scalare e forze vettoriali.

Osserviamo ancora una volta che pur essendo legata alla forza, che è una grandezza vettoriale, la pressione idrostatica è una grandezza scalare, è rappresentabile cioè solo con un semplice numero senza dover specificare né la direzione né il verso. La forza determinata dalla pressione idrostatica assume la direzione ed il verso una volta che viene specificata la superficie su cui si vuole determinare la forza: risulta infatti che la forza è perpendicolare alla superficie scelta ed è repulsiva.

Per verificare questa circostanza consideriamo, all'interno di un fluido stazionario uno strato di spessore  $h$ , piuttosto piccolo, di un solido avente una base orizzontale di forma triangolare come mostrato in figura. Supporremo in particolare che il triangolo sia rettangolo e indicheremo con  $a$  e  $b$  i due cateti e con  $c$  l'ipotenusa. Se

è l'angolo tra l'ipotenusa ed il cateto  $a$ , varranno le seguenti relazioni:

$$a = c \cos$$

$$b = c \sin$$

Su ciascuna delle superfici laterali dello strato, a causa della pressione idrostatica, agiranno delle forze perpendicolari alle superfici stesse: se lo strato solido considerato è piccolo, possiamo ragionevolmente assumere che la pressione sia la stessa su tutte e tre le superfici e quindi l'intensità di ciascuna forza sia proporzionale all'area della rispettiva superficie laterale.

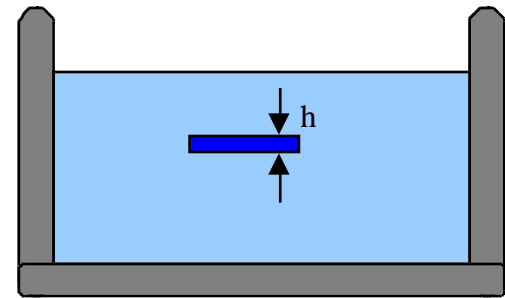
$$F_a = P a h \quad F_b = P b h \quad F_c = P c h$$

Se il fluido è stazionario, vuol dire che la porzione di fluido contenuto all'interno dello strato è ferma: la sua accelerazione è nulla. Applicando il teorema del centro di massa e limitandoci, per ora, a considerare quello che accade nel solo piano orizzontale  $x,z$ , avremo:

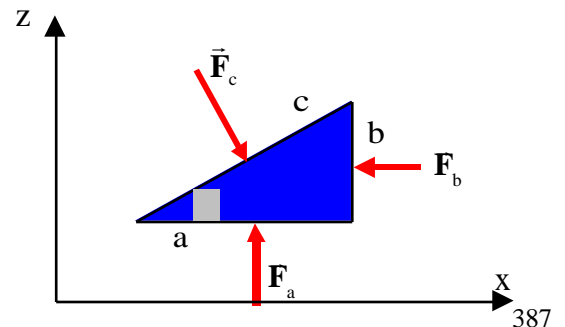
$$\vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_c = 0$$

$$x: -F_b + F_c \sin = 0$$

$$z: -F_c \cos + F_a = 0$$



Vista dall'alto.



Sostituendo le espressioni precedentemente determinate per le intensità delle forze si ottiene:

$$\begin{array}{ll} x : -Pbh + Pchsen = 0 & x : -Pbh + Pbh = 0 \\ z : -Pchcos + Pah = 0 & z : -Pah + Pah = 0 \end{array}$$

Da cui appare che l'ipotesi di una pressione scalare è perfettamente compatibile con la natura vettoriale delle forze.

### **La legge di Stevino.**

Vogliamo vedere in questo paragrafo come varia la pressione all'interno di un fluido stazionario.

Ci limiteremo a trattare il caso di quei fluidi per i quali la densità è uniforme: i liquidi, essendo poco comprimibili, hanno una densità che varia poco con la pressione e quindi possono essere considerati a densità costante (uniforme) anche se la pressione cambia da punto a punto nel recipiente; viceversa i gas, che sono facilmente comprimibili, possono avere una densità che dipende dalla pressione e quindi, se questa dovesse variare all'interno del recipiente, ci si deve attendere che anche la densità del fluido vari da punto a punto.

Come si definisce la densità di un fluido punto per punto?

Noi conosciamo già la definizione di densità media. Se  $M$  è la massa totale del fluido e  $V$  è il volume occupato dal fluido, la densità media è data dal rapporto di queste due grandezze:

$$m = \frac{M}{V}$$

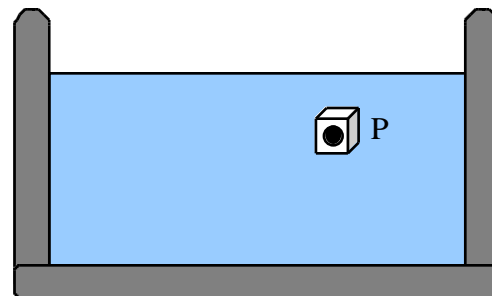
Nel Sistema Internazionale si misura in  $\text{kg/m}^3$ .

Se però vogliamo la densità in un particolare punto del fluido, per esempio nel punto  $P$ , allora dobbiamo costruirci un piccolo volume

$V$  che circonda il punto  $P$ , misurare la massa racchiusa nel piccolo volume considerato  $M$ , utilizzare, infine, la definizione di densità media per ottenere la densità media all'interno del piccolo volume considerato:

$$m = \frac{M}{V}$$

La densità del fluido nel punto  $P$  selezionato si otterrà facendo il limite per  $V$  che tende a zero della densità



media:

$$= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{M}{V}$$

Bisogna sola fare attenzione ad una cosa: il limite per  $V$  che tende a zero non va inteso alla stessa stregua di come si fa in Analisi Matematica, così facendo infatti si correrebbe il rischio, a causa della natura corpuscolare della materia (è fatta di molecole) e della stessa struttura atomica, che se  $V$  è molto piccolo al suo interno potrebbe non trovarsi alcuna materia. Per cui il limite va fatto prendendo  $V$  piccolo ma ancora sufficientemente grande da contenere un rilevante numero di atomi o molecole.

La densità si può dunque scrivere come

$$= \frac{dM}{dV}$$

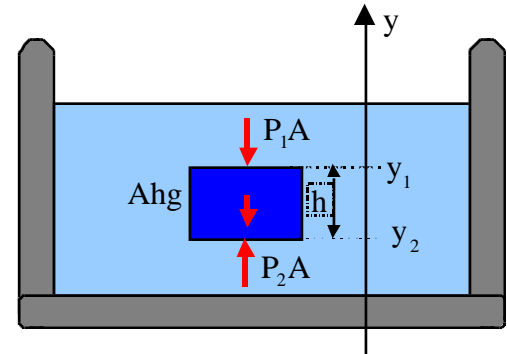
L'espressione precedente, non sta ad indicare la derivata della massa rispetto al volume (la massa non è una funzione del volume), quanto piuttosto il rapporto tra la massa infinitesima  $dM$  contenuta nel volume infinitesimo  $dV$ , e il volume infinitesimo  $dV$ .

Supporremo per il seguito di questo paragrafo riferirci a fluidi per i quali la densità è uniforme, non dipende cioè dal particolare punto selezionato all'interno del fluido.

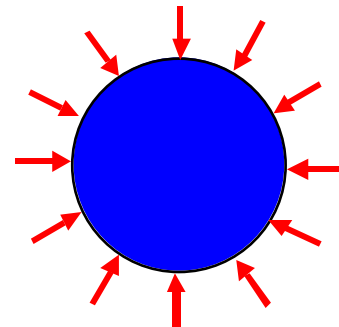
Consideriamo uno strato cilindrico di fluido di altezza  $h$  tra due basi orizzontali circolari di area  $A$ .

Su ogni elemento di area  $dA$  della superficie laterale del cilindro agirà una forza perpendicolare alla superficie cilindrica diretta verso l'interno del cilindro, di intensità pari alla pressione nel punto considerato per l'area  $dA$ .

Tutte queste forze spingono il cilindro orizzontalmente in tutte le direzioni: possiamo invocare questioni di simmetria per affermare



Vista dall'alto.



che il loro effetto complessivo è nullo, questo si accorda bene con il fatto che, se il fluido è stazionario, la parte di fluido contenuta all'interno dello strato cilindrico non deve subire accelerazioni, in particolare nella direzione orizzontale.

Per quanto riguarda la direzione verticale, indichiamo con  $y_1$  la coordinata verticale relativa ai punti della base superiore dello strato cilindrico e con  $y_2$  quella dei punti della base inferiore. L'altezza  $h$  dello strato cilindrico sarà data da

$$h=y_1-y_2$$

Indichiamo con  $P_1$  la pressione relativa ai punti della base superiore e  $P_2$  quella relativa ai punti della base inferiore. Possiamo sempre scegliere un cilindro con area di base sufficientemente piccola da poter assumere costante la pressione su ciascuna base. La forza corrispondente alla pressione idrostatica sulla base superiore sarà data dal prodotto della pressione per l'area di base  $P_1A$ . Essa è diretta verso il basso perpendicolarmente alla base. In maniera analoga sulla base inferiore ci sarà una forza dovuta alla pressione idrostatica diretta perpendicolarmente alla base inferiore verso l'alto di intensità  $P_2A$ .

Ricordiamo infine che sullo strato di fluido agisce anche la forza peso, verticalmente verso il basso, la cui intensità, assumendo uniforme la densità, è data da  $Mg= Vg= hAg$ .

Per un fluido stazionario, anche l'accelerazione verticale dello strato deve essere nulla, questo significa che deve valere la seguente relazione:

$$P_2A - P_1A - A(y_1 - y_2)g = 0$$

$$P_2 = P_1 + (y_1 - y_2)g = P_1 + gh$$

in cui  $h$  rappresenta la profondità del punto  $P_2$  rispetto al punto  $P_1$ . Questa relazione va sotto il nome di legge di Stevino.

Si ottiene che punti di un fluido che hanno la stessa pressione si trovano alla stessa quota.

Alla superficie di separazione tra l'atmosfera e un liquido, la pressione è uguale alla pressione atmosferica in tutti i punti della superficie di separazione. Ne deriva che tutti i punti della superficie di separazione si trovano alla stessa quota, ossia la superficie di separazione coincide con un piano orizzontale.

Da questo discende anche il principio dei vasi comunicanti.



Punti del fluido che si trovano alla stessa quota hanno la stessa pressione.  
 La pressione aumenta all'aumentare della profondità.

Utilizziamo la legge di Stevino, per determinare a che profondità bisogna immergersi nel mare perché la pressione raddoppi rispetto a quella che si trova in superficie, la pressione atmosferica. Sia dunque  $P_1 = 1 \text{ atm}$  la pressione in superficie e  $P_2 = 2 \text{ atm}$  quella alla profondità  $h$  da determinare.

$$h = \frac{P_2 - P_1}{\rho g} = \frac{1 \text{ atm}}{\underbrace{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}_{\substack{\text{assumendo} \\ \text{la densità dell'acqua} \\ \text{di mare pari a quella} \\ \text{dell'acqua distillata}}} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \frac{1,01 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 10.3 \text{ m}$$

La profondità richiesta vale all'incirca 10 m. La pressione idrostatica nel mare aumenta di circa una atmosfera (atm) ogni 10 m di profondità.

Se anziché dell'acqua, si ha un gas, ricordando che la densità di un gas è circa 1000 volte più piccola di quella dell'acqua, dalla relazione precedente si osserva che ogni 10 metri di profondità nel gas la pressione sarebbe variata di 1/1000 (un millesimo) di atmosfera. Una variazione del tutto trascurabile.

Questo è il motivo per cui, nel caso dei gas, quando le dimensioni del recipiente non sono molto grandi, per esempio esse sono dell'ordine del metro, si può assumere che la pressione sia costante in tutto il recipiente.

Dalla legge di Stevino ricaviamo infatti che:

$$P_2 = P_1 + \rho g h \quad \text{se } h > 0 \quad P_2 = P_1$$

### **Il principio di Pascal**

La legge di Stevino mette in relazione la pressione in due punti all'interno di un fluido.

Consideriamo un liquido contenuto in un cilindro racchiuso da un pistone, di area  $A$ , libero di scorrere all'interno del cilindro. Se indichiamo con  $P_{\text{est}}$  la pressione esercitata dal pistone sul fluido, allora per la legge di Stevino, la

pressione in ogni altro punto, situato alla profondità  $h$ , del fluido sarà data da:

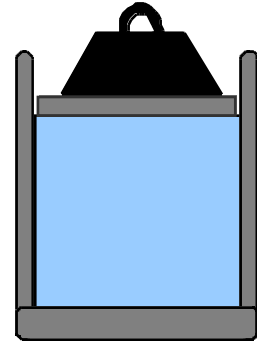
$$P = P_{\text{est}} + \rho gh$$

Se bruscamente facciamo variare la pressione esterna (per esempio appoggiando un corpo di massa  $M$  sul pistone, in tal caso la pressione esterna varierà di  $\Delta P_{\text{est}} = \frac{Mg}{A}$ ), ci aspettiamo che anche la pressione nel punto  $P$  a profondità  $h$  cambi. La variazione di pressione sarà data da:

$$\Delta P = \Delta P_{\text{est}} + (\rho gh)$$

se il liquido è  
incompressibile  
( $\rho gh$ )=0

$$\Delta P = \Delta P_{\text{est}}$$



La variazione di pressione è la stessa in tutti i punti del liquido.

### **La leva idraulica.**

Utilizzando il principio di Pascal possiamo comprendere il funzionamento della leva idraulica.

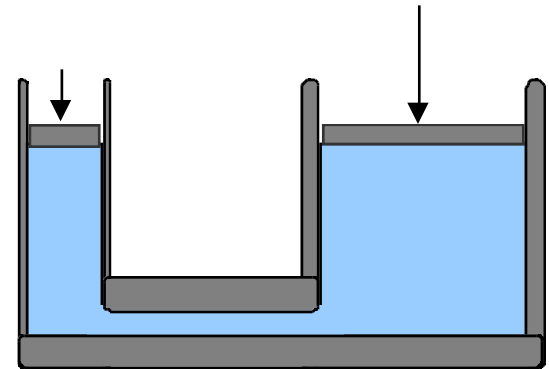
Consideriamo due cilindri comunicanti riempiti di un liquido incompressibile racchiusi da due pistoni liberi di scorrere nei rispettivi cilindri. Indichiamo con  $A_1$  e  $A_2$  le sezioni dei due cilindri. In condizioni di riposo su entrambi i pistoni agisce la pressione atmosferica, cosicché i due pistoni si trovano allo stesso livello.

Al pistone 1 applichiamo la forza normale  $F_1$ , questo corrisponde a far aumentare la pressione del liquido a contatto del pistone 1 della quantità

$$\Delta P = \frac{F_1}{A_1}$$

Per il principio di Pascal, questo incremento di pressione sarà

trasmesso a tutti i punti del fluido in particolare anche ai punti del fluido a contatto con il pistone 2. Questo subirà da parte del fluido una forza verso l'alto pari a



$$F_2 = A_2 P = F_1 \frac{A_2}{A_1}$$

e sarà perciò in grado di equilibrare una eventuale forza applicata al pistone 2 di questa intensità .

Se la sezione del cilindro 2 è più grande di quella del cilindro 1 la forza  $F_2$  risulterà amplificata rispetto alla forza  $F_1$  nel rapporto  $A_2/A_1$ .

In questo modo applicando una piccola forza sul pistone 1 è possibile sollevare pesi molto grandi posti sul pistone 2.

Si osservi comunque che se il pistone 1 viene abbassato di un tratto  $h_1$ , viene cioè spostato il volume di liquido  $A_1 h_1$ , il pistone 2 di solleverà di un tratto  $h_2$  di modo che il volume  $A_2 h_2$  sia uguale al volume  $A_1 h_1$ , da cui

$$h_2 = h_1 \frac{A_1}{A_2}$$

Il tratto  $h_2$  è ridotto rispetto al tratto  $h_1$  dello stesso fattore che costituiva il guadagno nella forza: in questo modo il lavoro fatto dalla forza  $F_1$  è uguale a quello fatto della forza  $F_2$  (in altri termini l'energia si conserva).

### ***Il principio di Archimede.***

Consideriamo un corpo solido immerso in un fluido.

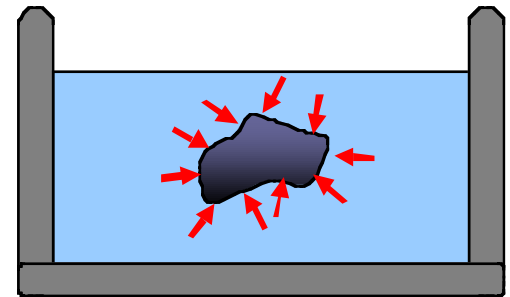
Il corpo sarà soggetto alla pressione idrostatica: su ogni elemento infinitesimo della sua superficie agirà una forza perpendicolare alla superficie, diretta verso l'interno del corpo, il cui modulo è dato dalla pressione idrostatica nel punto considerato per l'area infinitesima dell'elemento di superficie considerato.

C'è modo di trovare qual è la risultante di tutte queste infinite forze infinitesime?

Certo.

Consideriamo il fluido in condizioni stazionarie.

All'interno di esso, nella stessa posizione in cui prima si trovava il corpo solido, immaginiamo di tracciare il suo contorno in maniera da suddividere il fluido in due parti, quella racchiusa all'interno del



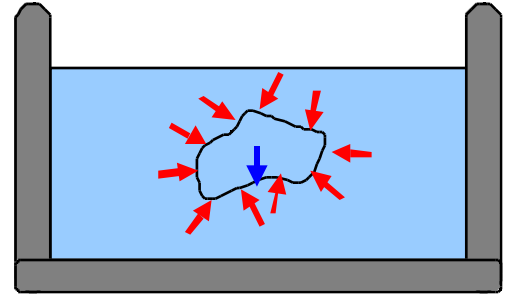
contorno del corpo solido e quella esterna ad essa.

Queste due parti di fluido interagiranno tra loro: in particolare la parte di fluido esterna al contorno eserciterà le stesse forze che, quando il corpo solido era immerso nel fluido, esercitava su di esso.

La parte di fluido all'interno del contorno è soggetta alle forze esercitate dalla parte di fluido al di fuori del contorno e alla forza peso, che, come sappiamo, è applicata al suo centro di massa.

Poiché per ipotesi il fluido è in condizioni stazionarie, le forze ed i momenti applicati alla parte di fluido all'interno del contorno devono annullarsi. Ne segue che la risultante di tutte le infinite forze infinitesime esercitate dal fluido posto all'esterno del contorno sugli elementi di superficie del contorno stesso, deve essere uguale ed opposta al peso della parte di fluido racchiusa nel contorno. Inoltre per annullare i momenti delle forze, la risultante deve essere applicata al centro di massa del fluido racchiuso dal contorno.

Questa forza viene chiamata spinta di Archimede: un fluido esercita su ogni corpo, immerso in esso, una forza diretta verticalmente verso l'alto di intensità pari al peso del volume di fluido spostato.



# Termodinamica

## ***Descrizione macroscopica e microscopica.***

Nell'analizzare un fenomeno fisico, in generale fissiamo la nostra attenzione su una determinata porzione di materia che separiamo idealmente da tutto il resto. Questa parte idealmente isolata è detta *il sistema*, mentre tutto ciò che è esterno al sistema, ma che può influenzare il suo comportamento, è detto *ambiente circostante o esterno*.

Una volta definito il sistema, si cerca di descriverlo per mezzo di quantità legate al comportamento del sistema stesso o alle sue interazioni con l'ambiente circostante. In meccanica per esempio nello studio del moto di un punto materiale, il sistema è costituito dal punto materiale. La descrizione del fenomeno viene fatta specificando le caratteristiche del sistema (la massa, la posizione, la velocità, l'accelerazione) e le interazioni tra il sistema e l'ambiente circostante (le forze esterne).

Nel descrivere un sistema possiamo adottare due punti di vista: quello macroscopico o quello microscopico.

In meccanica, per esempio, per descrivere il moto del corpo rigido abbiamo utilizzato un punto di vista macroscopico: infatti abbiamo ignorato i dettagli della struttura interna del corpo rigido e abbiamo descritto il suo moto di traslazione come il moto del centro di massa. Abbiamo trovato cioè un modo di descrivere tutto il sistema nel suo insieme.

Così se il sistema è costituito dal gas presente all'interno del cilindro di un'automobile, possiamo descrivere il comportamento del sistema se specifichiamo

- la composizione del sistema (cioè l'abbondanza relativa delle varie sostanze presenti nel sistema, aria miscela, gas combustibili, ecc.),
- il volume occupato dal sistema in ogni istante, descrivibile in termini della posizione del pistone,
- la pressione esercitata sul pistone
- la temperatura.

Abbiamo bisogno di quattro quantità: composizione, volume, pressione, temperatura. Queste quantità si riferiscono al sistema nel suo insieme: forniscono cioè una descrizione macroscopica del sistema. Esse

vengono dette coordinate macroscopiche. Per descrivere un sistema diverso saranno necessarie delle coordinate macroscopiche diverse, ma in generale esse hanno le seguenti caratteristiche:

- i. non implicano nessuna ipotesi sulla struttura della materia
- ii. sono in numero relativamente piccolo
- iii. sono suggerite più o meno direttamente dai nostri sensi
- iv. possono essere misurate direttamente.

Per ottenere una descrizione macroscopica del sistema, bisogna specificare solo poche proprietà fondamentali e misurabili del sistema stesso.

Per fornire la descrizione microscopica dello stesso sistema dovremmo innanzitutto dire che esso è costituito da un gran numero di molecole, ciascuna delle quali è caratterizzata da una massa, una posizione, una velocità (vettoriale) e che interagiscono tra loro sia nel momento in cui si urtano l'una con l'altra e sia perché ciascuna molecola esercita delle forze a distanza.

Lo studio del sistema adottando il punto di vista microscopico, viene fatto nell'ambito della meccanica statistica.

Un esempio dello studio di un sistema adottando il punto di vista microscopico, è la teoria cinetica di un gas perfetto a cui accenneremo brevemente nella discussione dei calori specifici dei gas monoatomici e biatomici. In ogni caso le caratteristiche fondamentali di questo tipo di descrizione sono:

- i. è necessario fare una ipotesi sulla struttura della materia
- ii. si devono specificare molte quantità
- iii. che non sono suggerite direttamente dai nostri sensi
- iv. e che non possono essere misurate direttamente.

Sebbene i due punti di vista sembrano molto diversi, tuttavia quando vengono applicati ad uno stesso sistema devono portare alle stesse conclusioni. Infatti le poche proprietà direttamente misurabili, usate per la descrizione macroscopica del sistema, vengono interpretate come medie nel tempo di un gran numero di proprietà microscopiche. Per esempio la pressione (coordinata macroscopica) esercitata sulle pareti di un recipiente da un gas in esso contenuto, è il valore medio della variazione di quantità di moto per unità di tempo dovuta agli urti delle molecole sull'unità di area.

Bisogna comunque tener presente che la pressione è una grandezza percepita direttamente dai nostri sensi. Essa, infatti, è stata definita ed utilizzata molto tempo prima che la teoria corpuscolare della materia fosse formulata. Ne

deriva che se la descrizione della struttura della materia dovesse in futuro essere cambiata, perché si trovano dei fenomeni descritti in maniera non soddisfacente sulla base delle convinzioni attuali, ne segue che anche l'interpretazione delle grandezze macroscopiche in termini di quantità microscopiche potrà cambiare di conseguenza. La pressione come grandezza legata ai nostri sensi, non può variare fino a che non variano i nostri sensi. La descrizione del sistema con coordinate macroscopiche è legata alle nostre esperienze sensoriali, quindi ci aspettiamo che sia abbastanza stabile, proprio perché non ci aspettiamo che i nostri sensi cambino. Viceversa una descrizione fatta in termini microscopici, partendo cioè da certe ipotesi sulla struttura microscopica del sistema, è valida solo se i risultati ottenuti sono in accordo con il comportamento macroscopico del sistema: è sempre possibile trovare un nuovo fenomeno in cui questo accordo non c'è, per cui bisogna modificare le ipotesi su cui è basata la descrizione microscopica.

La termodinamica, quando studia un sistema, rivolge la sua attenzione verso l'interno del sistema. Per poter descrivere quello che succede all'interno del sistema dobbiamo specificare delle grandezze in grado di descrivere quello che succede all'interno del sistema. Se usiamo la descrizione macroscopica allora ci servono poche grandezze come la pressione, il volume, la temperatura, per sapere cosa succede all'interno di un sistema. Le grandezze necessarie e sufficienti a descrivere lo stato interno del sistema vengono dette coordinate termodinamiche. Un sistema che può essere descritto in termini di coordinate termodinamiche è detto sistema termodinamico.

Posiamo concludere affermando che, in termodinamica, ci proponiamo di mettere in relazione le variazioni intervenute nelle coordinate termodinamiche di un sistema termodinamico conseguenti alle sue interazioni con l'ambiente circostante.

### ***Equilibrio termico.***

Una delle coordinate necessarie per la descrizione dello stato di un sistema è la temperatura. I nostri sensi ci forniscono un concetto intuitivo della temperatura: noi sappiamo distinguere se un corpo è più caldo o più freddo di un altro. Potremmo essere perciò in grado di assegnare un numero ad ogni corpo per descrivere la sensazione di calore che proviamo toccandolo. Questa scala della temperatura è però molto soggettiva e dipende dallo stato dell'osservatore: se le due mani vengono immerse ciascuna in un recipiente diverso, il primo contenente acqua fredda e l'altro acqua più calda, e poi tocchiamo lo stesso oggetto con entrambe le mani, le sensazioni di calore provenienti dalle due mani sarà diversa. Infatti la mano che è stata nell'acqua fredda ci dirà che il corpo è più

caldo, mentre quella che è stata nell'acqua calda ci dirà che il corpo è più freddo. Occorre quindi una definizione operativa della temperatura.

Per fare questo occorre innanzitutto definire cosa si intende per equilibrio termico.

Consideriamo un sistema termodinamico costituito da una certa quantità di gas che si trova in un cilindro munito di pistone. L'esperienza mostra che fissata la composizione e la massa del gas sono possibili diversi valori di volume e diversi valori di pressione. Inoltre se si fissa ad esempio la pressione sono ancora possibili diversi valori del volume e viceversa. Questo ci indica che volume e pressione sono due coordinate termodinamiche indipendenti.

Lo stato interno del sistema termodinamico considerato (una certa quantità di gas) può essere descritto utilizzando questa coppia di coordinate termodinamiche.

Se si considera come sistema termodinamico un filo sottile uniforme, il suo stato interno può essere descritto utilizzando come coordinate termodinamiche la lunghezza del filo e la tensione. Anche sistemi più complessi, come le celle elettrolitiche, possono essere descritte mediante due sole coordinate termodinamiche indipendenti.

Poniamo quindi la nostra attenzione sui sistemi termodinamici che possono essere descritti specificando solo una coppia di coordinate termodinamiche indipendenti che indicheremo con i simboli  $X$  e  $Y$ .

*Si dice che il sistema termodinamico si trova nello stato di equilibrio caratterizzato da ben determinati valori delle coordinate  $X$  e  $Y$ , se i valori delle coordinate  $X$  e  $Y$  non cambiano fino a che non cambiano le condizioni esterne.*

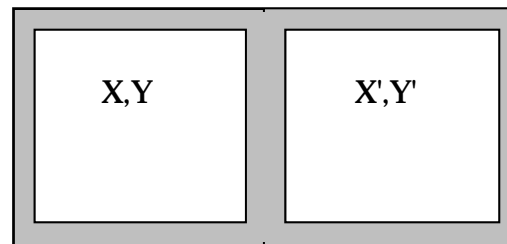
L'esistenza o meno di uno stato di equilibrio dipende dalla vicinanza di altri sistemi e dalla natura delle pareti che circondano il sistema.

Le pareti infatti possono essere adiabatiche o conduttrici.

Un sistema termodinamico circondato da pareti adiabatiche è in equilibrio per qualunque coppia di valori delle coordinate termodinamiche.

Consideriamo ora due sistemi termodinamici  $A$  e  $B$  isolati dall'ambiente circostante mediante delle pareti adiabatiche, che vengono fatti interagire tra loro attraverso una parete. Si osserva che se la parete è

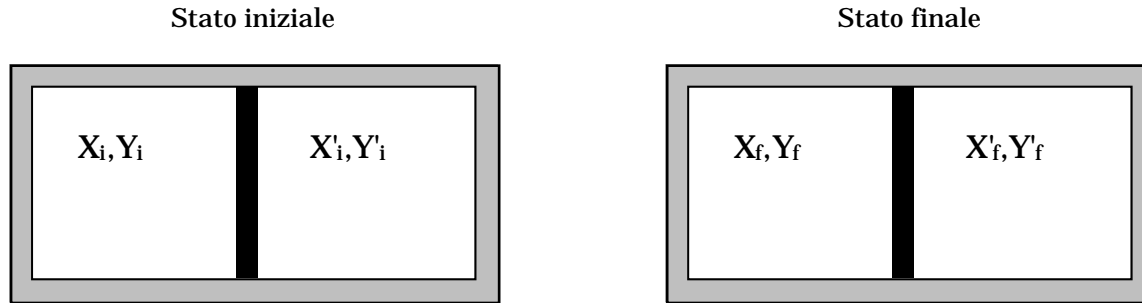
- 1) adiabatica: allora gli stati dei due sistemi, descritti dalle due coppie di variabili  $X, Y$  e  $X', Y'$ , possono coesistere come stati di equilibrio per qualunque insieme di valori delle quattro





grandezze. (Pareti adiabatiche possono venire realizzate con grossi strati di materiale isolante: amianto, fibre di vetro, fogli di polistirolo etc.)

2. conduttrice: allora i due sistemi variano le loro coordinate termodinamiche fino a portarsi in un nuovo stato di equilibrio. Quando questo viene raggiunto si dice che i sistemi A e B sono in equilibrio termico tra loro. (Pareti conduttrici possono essere realizzate mediante delle sottili lamine metalliche)



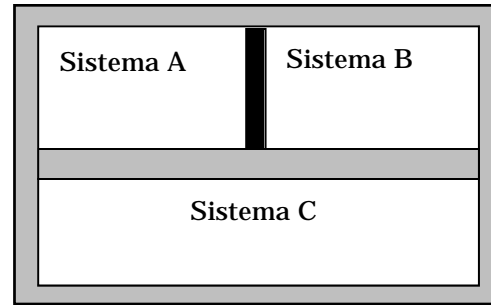
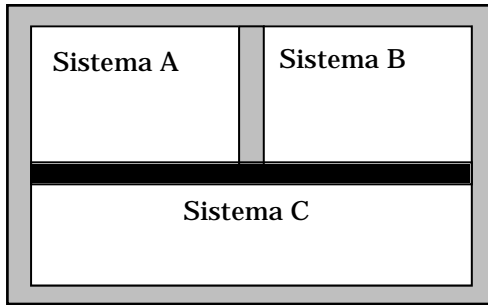
L'equilibrio termico è lo stato, caratterizzato da particolari valori delle coordinate termodinamiche, che due o più sistemi raggiungono quando vengono fatti interagire attraverso una parete conduttrice.

### **Principio zero della termodinamica.**

Consideriamo due sistemi A e B separati da una parete adiabatica e messi entrambi in contatto con un terzo sistema C mediante due pareti conduttrici. Una volta raggiunto lo stato di equilibrio termico tra A-C e C-B, se si elimina la parete adiabatica tra A e B e la si sostituisce con una parete conduttrice si osserva che A e B sono in equilibrio termico fra loro.

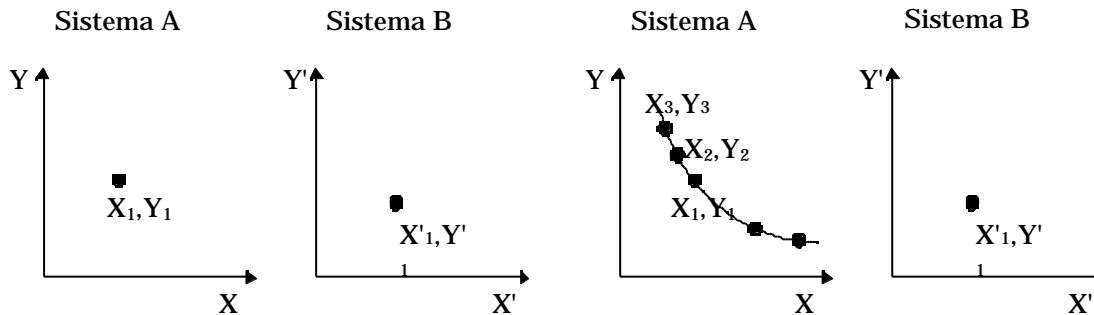
Questo risultato costituisce l'enunciato del principio zero della termodinamica:

*due sistemi in equilibrio termico con un terzo sistema, sono in equilibrio termico tra loro.*



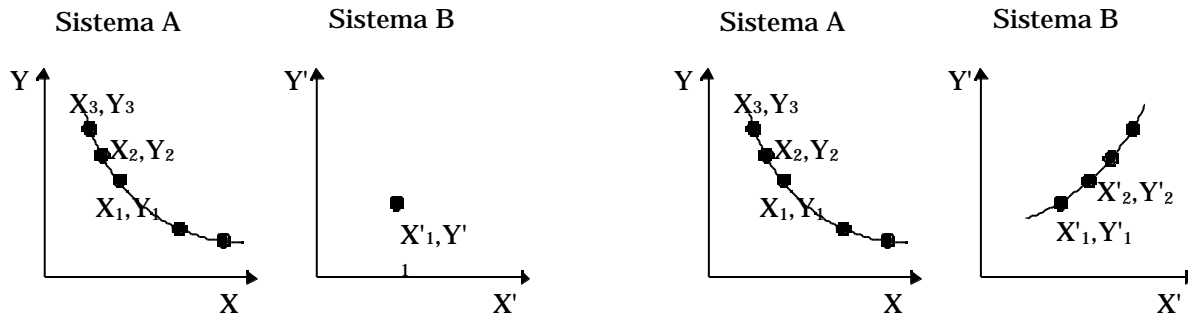
### **Temperatura.**

Consideriamo un sistema termodinamico A descritto dalle coordinate  $X, Y$  ed il sistema termodinamico B descritto dalle coordinate  $X', Y'$ . Supponiamo che quando il sistema A si trova nello stato descritto dai valori  $X_1, Y_1$  delle sue coordinate sia in equilibrio termico con lo stato di B descritto dai valori  $X'_1, Y'_1$ .



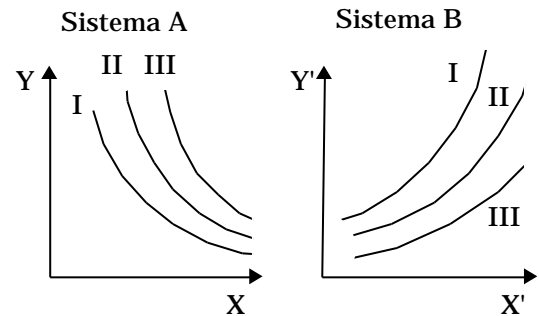
Separiamo a questo punto il sistema A dal sistema B e variamo lo stato di A variando le sue coordinate. In generale è possibile trovare un altro stato di A descritto dalla coppia di valori delle coordinate termodinamiche

$X_2, Y_2$  che risulta ancora in equilibrio termico con lo stato  $X'_1, Y'_1$  di B. Procedendo in questo modo si possono trovare tutta una serie di stati di A che sono tutti in equilibrio termico con lo stesso stato di B e quindi, in base al principio zero della termodinamica, in equilibrio termico tra loro. Se riportiamo in un diagramma  $X, Y$  questi stati, vediamo che essi giacciono su di una curva continua detta *isoterma*. L'isoterma è il luogo dei punti del diagramma  $X, Y$  che rappresentano stati del sistema A in equilibrio termico con uno stato prefissato di un altro sistema, B. Il ruolo di A e di B può essere invertito. Così possiamo trovare una isoterma del sistema B corrispondente all'isoterma del sistema A. Tutti gli stati di A rappresentati da punti dell'isoterma, I, di A sono in equilibrio con tutti gli stati di B rappresentati da punti dell'isoterma, I', di B.



Se ora scegliamo uno stato di B che non si trovi sull'isoterma I', possiamo costruire una seconda isoterma di A corrispondente a questo nuovo stato di B, e poi invertendo il ruolo di A e B possiamo costruire l'isoterma di B corrispondente alla nuova isoterma di A. Al variare dello stato di riferimento possiamo costruire tutta una famiglia di isoterme per il sistema A, e corrispondentemente una famiglia di isoterme del sistema B: ciascuna isoterma della famiglia di A corrisponde ad una ed una sola isoterma della famiglia di B.

*Stati di sistemi diversi ma appartenenti alle isoterme corrispondenti hanno in comune la proprietà di essere in equilibrio termico tra loro.*



Possiamo esprimere questo concetto dicendo che esiste una grandezza che assume lo stesso valore nei due stati corrispondenti e questo assicura che i due stati sono in equilibrio termico tra loro. Questa grandezza è la **temperatura**.

La temperatura di un sistema è quindi una coordinata termodinamica che ci permette di stabilire se un sistema è in equilibrio termico o meno con altri sistemi.

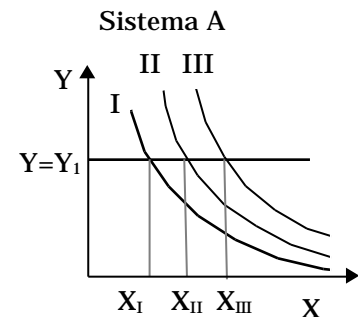
La temperatura di tutti i sistemi in equilibrio termico tra loro è rappresentabile con un unico numero. Allora se si stabilisce una regola per assegnare un numero ad ogni isoterma della famiglia di isoterme del sistema A, si fissa una scala di temperatura.

Si noti che la definizione data di temperatura non differisce dal concetto intuitivo che si ha di essa. Infatti l'affermazione che due sistemi messi a contatto mediante una parete conduttrice raggiungono uno stato di equilibrio termico e quindi hanno la stessa temperatura, corrisponde alla osservazione che facciamo attraverso i nostri sensi di quello che succede quando mettiamo a contatto un corpo più freddo con uno più caldo: dopo un certo intervallo di tempo diventano egualmente caldi. La definizione data di temperatura ha il vantaggio di fissare delle regole per la misura della temperatura in maniera non soggettiva come invece è la misura della temperatura basata sulle nostre sensazioni.

### **Misura della temperatura.**

Consideriamo un sistema termodinamico descritto dalle sue coordinate  $X, Y$ . Per usare questo sistema per la misura della temperatura, cioè come termometro, dobbiamo dapprima costruirci la famiglia delle isoterme e poi stabilire una regola per associare un numero ad ogni isoterma. Lo stesso numero verrà associato alla temperatura di un qualunque altro sistema che si trovi in equilibrio termico con il termometro.

La regola più semplice consiste nello scegliere un qualunque cammino conveniente nel piano  $X, Y$ : per esempio la retta  $Y=Y_1$ . Questa interseca le isoterme in punti che hanno la stessa coordinata  $Y=Y_1$  e diverse coordinate  $X$ : la temperatura da associare a ciascuna isoterma può essere determinata mediante una funzione delle coordinate  $X$  dei punti di intersezione. In questo caso la coordinata  $X$  viene chiamata caratteristica termometrica, mentre la scala della temperatura è fissata dalla forma della funzione  $(X)$ .



I termometri più usati sono:

- Termometro a gas a volume costante, che ha come caratteristica termometrica la pressione.
- Liquido in un capillare di vetro, che ha come caratteristica termometrica la lunghezza del liquido nel capillare.
- Resistenza elettrica, a pressione costante, che ha come caratteristica termometrica la resistenza elettrica.
- Termocoppia, a pressione costante, che ha come caratteristica termometrica la forza elettromotrice termoelettrica.

In passato la definizione della temperatura veniva data utilizzando due punti fissi<sup>1</sup>. Per esempio per la scala Celsius o centigrada si utilizzavano come punti fissi la temperatura di fusione del ghiaccio alla pressione atmosferica, assunta uguale a zero grado centigradi, e la temperatura di ebollizione dell'acqua, sempre alla pressione atmosferica, assunta pari a 100 gradi centigradi.

Se consideriamo il termometro a liquido nel capillare, per definire la scala Celsius di temperatura, si pone il termometro dapprima a contatto con il primo punto fisso e si determina la lunghezza  $L_1$  del liquido nel capillare, poi si mette il termometro a contatto con il secondo punto fisso e si determina la nuova lunghezza del liquido nel capillare  $L_2$ . Si divide l'intervallo tra  $L_1$  ed  $L_2$  in 100 parti uguali, tracciando delle tacche lungo il capillare: la distanza tra due tacche successive corrisponde ad un grado (Celsius o centigrado). Se la lunghezza del liquido nel capillare, quando il termometro viene messo in contatto termico con un sistema di cui si vuole misurare la temperatura, è compresa tra la 36-esima e la 37-esima tacca allora si dirà che la temperatura del sistema è di  $36^\circ$  centigradi virgola qualcosa che può essere stimata suddividendo la distanza tra due tacche successive in sottomultipli (decimi di grado, centesimi di grado).

L'aver suddiviso la lunghezza del liquido nel capillare tra la lunghezza  $L_1$ , corrispondente a  $0^\circ$  centigradi, e la distanza  $L_2$ , corrispondente a  $100^\circ$  centigradi, in 100 parti uguali, corrisponde ad aver scelto una dipendenza lineare della lunghezza del liquido nel capillare dalla temperatura. La dipendenza lineare è quella più semplice che possiamo immaginare. Se noi estrapoliamo la dipendenza lineare anche al di fuori dell'intervallo tra  $0^\circ$  e  $100^\circ$  centigradi, possiamo estendere l'intervallo delle temperature misurabili al di fuori di questo intervallo.

---

<sup>1</sup> Per punto fisso si intende uno stato termodinamico facilmente riproducibile. Nel caso della fusione dell'acqua alla pressione atmosferica, si osserva che fintanto che nel sistema sono presenti entrambe le fasi, liquida e solida, la temperatura del sistema resta costante ( $0^\circ$  Celsius o centigradi). Così anche per il secondo punto fisso, l'ebollizione dell'acqua alla pressione atmosferica, la temperatura del sistema resta costante ( $100^\circ$  Celsius o centigradi) fintanto che nel sistema sono contemporaneamente presenti le due fasi, liquida e vapore, dell'acqua.

Dal 1954, la procedura per la definizione della scala termometrica è cambiata: si usa infatti un solo punto fisso, il cosiddetto punto triplo dell'acqua, cioè quello stato dell'acqua in cui si ha equilibrio tra ghiaccio, liquido e vapore. Alla temperatura di questo stato si attribuisce arbitrariamente il valore di 273.16 K (leggi kelvin). Anche l'attuale procedura prevede una relazione lineare tra la temperatura e la caratteristica termometrica. Prendendo un qualsiasi termometro, tra quelli elencati precedentemente, ed indicando con X la corrispondente caratteristica termometrica, la temperatura da associare alla isoterma che viene intersecata dalla retta  $Y=Y_1$  in corrispondenza del valore X della caratteristica termometrica, è data da:

$$T(X) = \frac{273.16 \text{ K}}{X_{tr}} X \quad \text{o semplicemente} \quad T = \frac{273.16 \text{ K}}{X_{tr}} X \quad (\text{per } Y \text{ fissata, } Y=Y_1)$$

dove  $\frac{273.16 \text{ K}}{X_{tr}}$  è una costante arbitraria. Si osservi che la dipendenza della caratteristica termodinamica dalla temperatura è lineare e, inoltre, il termine noto è nullo: questo vuol dire imporre che, quando la caratteristica termometrica si annulla, anche la temperatura si annulla.

Vediamo ora come si fa a fissare il valore della costante  $\frac{273.16 \text{ K}}{X_{tr}}$ . Si pone a contatto il termometro con il sistema del triplo e si determina il valore della caratteristica termometrica,  $X_{tr}$ , quando la temperatura è quella del punto triplo che, per convenzione, si assume pari a 273.16 K.

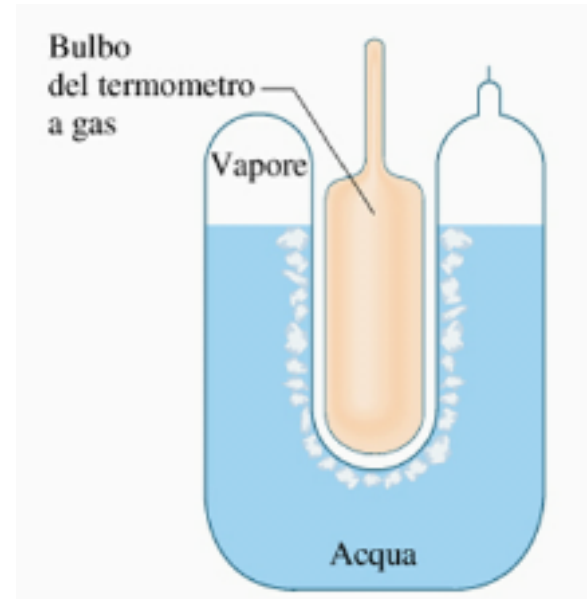
$$T_{tr} = 273.16 \text{ K} = \frac{273.16 \text{ K}}{X_{tr}} X_{tr}$$

Con tale valore della costante, la temperatura del sistema corrispondente al valore X della caratteristica termometrica diventa:

$$T = 273.16 \frac{X}{X_{tr}} \text{ K}$$

In definitiva le operazioni da fare per determinare la temperatura del sistema sono:

- mettere il termometro in contatto termico con il sistema di cui si



vuole misurare la temperatura e determinare X.

- mettere il termometro in contatto termico con il sistema del punto triplo e determinare  $X_{tr}$ .
- Applicare la relazione:

$$= 273.16 \frac{X}{X_{tr}} \quad K$$

### ***Punto triplo dell'acqua.***

Per raggiungere il punto triplo dell'acqua si procede nel seguente modo. Si distilla dell'acqua con un elevato grado di purezza in un recipiente di vetro del tipo mostrato in figura (si tratta di un recipiente ottenuto mediante una rotazione di una forma ad U attorno all'asse verticale). Il recipiente non viene riempito completamente. Una volta eliminata l'aria, il recipiente viene chiuso ermeticamente: la parte di recipiente non occupata dal liquido sarà piena di vapore acqueo ad una pressione che dipende dalla temperatura dell'acqua stessa.

Mediante una miscela frigorifera posta a contatto della parete interna si fa formare uno strato di ghiaccio attorno alla parete stessa. Se ora si sostituisce la miscela frigorifero con il bulbo di un termometro, si scioglierà un sottile strato di ghiaccio a contatto con la parete interna del recipiente. Nel recipiente dunque saranno allora presenti, contemporaneamente ed in equilibrio tra loro, le tre fasi di solido, liquido e vapore: fintanto che esse coesistono, il sistema si trova al punto triplo dell'acqua ( $T_{tr}=273.16 \text{ K}$ ).

### ***Scale termometriche.***

Con il procedimento descritto possiamo costruirci le scale termometriche per ciascuno dei quattro diversi tipi di termometro che abbiamo menzionato: si ottengono così quattro diversi metodi per la misura della temperatura. Cioè:

$$(P) = 273.16 \frac{P}{P_{tr}} \quad K \quad (\text{termometro a gas a volume costante})$$

$$(L) = 273.16 \frac{L}{L_{tr}} \quad K \quad (\text{termometro a liquido in un capillare di vetro})$$

$$(R) = 273.16 \frac{R}{R_{tr}} \quad K \quad (\text{termometro a resistenza elettrica})$$

$( ) = 273.16 - \quad K$  (termometro a termocoppia)

Osserviamo che tutti e quattro i tipi di termometro misurano la stessa temperatura al punto triplo dell'acqua, questo deriva dalla definizione.

Se invece si prova a misurare una temperatura diversa da quella del punto triplo dell'acqua, ci si accorge che il valore della temperatura fornito dai diversi termometri è differente. Addirittura si ottengono valori diversi pur usando esemplari diversi dello stesso tipo di termometro, come accade nel caso in cui in un termometro a gas a volume costante vengono utilizzati gas diversi.

Dal confronto tra i diversi tipi di termometro ci si rende conto che le differenze più piccole tra i valori misurati si ottengono con un termometro a gas a volume costante, soprattutto quando si usa come gas l'idrogeno o l'elio a bassa pressione. Per questa ragione si è scelto come termometro di riferimento il termometro a gas a volume costante, per definire una scala empirica di temperatura.

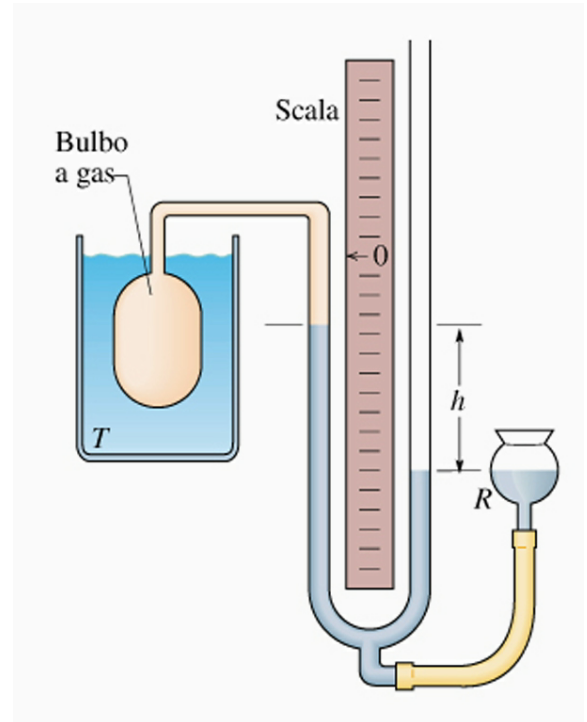
### **Termometro a gas.**

Un termometro a gas a volume costante consiste essenzialmente di un bulbo, realizzato con un materiale che può essere vetro, porcellana, platino, quarzo fuso, platino-iridio: la scelta del materiale dipende dal tipo di gas usato e dall'intervallo di temperatura in cui si pensa di utilizzare il termometro.

Il bulbo, che contiene il gas, è connesso mediante un capillare ad un manometro a mercurio.

Il volume del gas è mantenuto costante alzando o abbassando il serbatoio, in modo da mantenere la superficie del mercurio nel ramo a sinistra in corrispondenza dell'indice segnato sul manometro.

Lo spazio al di sopra dell'indice non viene mai riempito di mercurio ed è detto spazio morto o volume





inutilizzabile: il gas contenuto in questo volume così come quello nel capillare potrebbe non trovarsi infatti alla stessa temperatura di quello nel bulbo, in questo senso esso costituisce un volume inutilizzabile.

Si misura la differenza tra l'altezza del mercurio nel ramo a destra e quella nel ramo a sinistra quando il bulbo è a contatto con il sistema di cui si vuol determinare la temperatura e quando è a contatto con il sistema del punto triplo.

La pressione del gas è data, concordemente con la legge di Stevino, da:

$$P_{\text{gas}} = P_{\text{atm}} + gh$$

dove h va considerata positiva se il livello nel ramo a destra è più alto di quello a sinistra, negativo se succede il contrario come appunto mostrato nella figura.

I valori di pressione che così si ottengono devono essere corretti per tenere conto delle seguenti sorgenti di errore:

- 1) il gas che riempie lo spazio morto (e qualunque altro volume inutilizzato) potrebbe essere a temperatura diversa da quella del gas contenuto nel bulbo.
- 2) al variare della temperatura e della pressione, il volume del bulbo, del capillare e dello spazio morto varia.
- 3) una certa quantità di gas viene assorbita dalle pareti del bulbo e del capillare, fenomeno che aumenta con il diminuire della temperatura.

### ***Temperatura del termometro a gas ideale.***

Introduciamo nel bulbo di un termometro a gas una certa quantità di gas, così che la pressione  $P_{\text{tr}}$ , quando il bulbo viene portato al punto triplo sia per esempio di 100 kPa (circa 1 atmosfera).

Sempre lavorando a volume costante, eseguiamo le seguenti operazioni:

1. poniamo il bulbo a contatto con vapore d'acqua che sta condensando alla pressione di 1 atmosfera, misuriamo la pressione del termometro e calcoliamo la temperatura usando la relazione:

$$(100 \text{ kPa}) = 273.16 \frac{P_s}{P_{\text{tr}}} \text{ K} = 273.16 \underbrace{\frac{P_s}{100 \text{ kPa}}}_{\text{con } P_s \text{ misurato in kPa}} \text{ K}$$

2. togliamo adesso dal bulbo una certa quantità di gas così che quando il bulbo è al punto triplo, la pressione  $P_{tr}$  sia uguale a 50 kPa. Valutiamo in queste nuove condizioni il valore di  $P_s$ . La temperatura corrispondente è data da:

$$(50 \text{ kPa}) = 273.16 \frac{P_s}{\underbrace{50 \text{ kPa}}_{\substack{\text{con } P_s \text{ misurato in} \\ \text{kPa}}}} \text{ K}$$

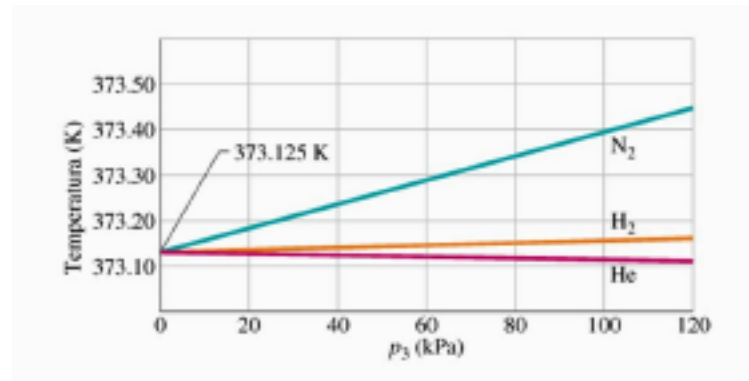
Naturalmente non ci si deve meravigliare se il valore di temperatura misurato per stesso sistema, vapore d'acqua in condensazione, è diverso nei due casi: (50 kPa) diverso (100 kPa). In fondo si tratta di due termometri completamente diversi. Se si guarda il grafico riportato più in basso si vede chiaramente che i valori della temperatura attribuiti ad uno stesso sistema dipendono dalla quantità di gas contenuta all'interno del bulbo del termometro. Dallo stesso grafico si vede che la dipendenza risulta più o meno accentuata a seconda del gas usato nel termometro. Inoltre lo stesso grafico mostra che le differenze tra i diversi gas diminuiscono quando la quantità di gas contenuta nel bulbo del termometro viene ridotta.

3) Continuiamo perciò a togliere gas dal bulbo in modo che  $P_{tr}$  e  $P_s$  assumano valori sempre più piccoli. Per ogni valore di  $P_{tr}$  valutiamo il corrispondente valore di  $(P_{tr})$ .

4) Riportiamo in un grafico  $(P_{tr})$  in funzione di  $P_{tr}$  ed estrapoliamo il valore della temperatura per  $P_{tr} = 0$ , cioè leggiamo dal grafico

$$\lim_{P_{tr} \rightarrow 0} (P_{tr})$$

Se si eseguono una serie di prove di questo tipo usando gas diversi per misurare  $(P_{tr})$ , si vede che le misure effettuate dipendono dalla natura del gas impiegato per valori ordinari di  $P_{tr}$ . Ma se  $P_{tr} \rightarrow 0$  tutti i gas forniscono la stessa temperatura  $T_s =$



373.15 K per il vapore d'acqua in condensazione ad 1 atmosfera. Lo stesso risultato si ha per un qualunque altro punto fisso.

Sembra che il comportamento dei gas, quando la densità tende a zero, sia identico per tutti i gas. I gas a bassa densità hanno cioè un comportamento ideale.

Possiamo far riferimento a questo comportamento ideale per ridefinire la scala della temperatura in maniera da avere una definizione che sia indipendente dal tipo di gas utilizzato nel termometro.

Si può quindi introdurre la scala della temperatura del termometro a gas ideale mediante l'equazione:

$$= 273.16 \lim_{P_r \rightarrow 0} \frac{P}{P_r} \text{ K}$$

Il termometro campione è allora un termometro a gas a volume costante che impiega una scala di temperatura definita dall'equazione precedente.

Osserviamo che nonostante la scala di temperatura del termometro a gas ideale sia indipendente dalle proprietà specifiche dei singoli gas, essa dipende comunque dalle proprietà generali dei gas. In particolare non si possono eseguire misure di temperature alle quali non si trova più alcuna sostanza nello stato gassoso.

In pratica la temperatura più bassa misurabile con un termometro a gas è 1K se si utilizza elio a bassa pressione.

La temperatura  $= 0 \text{ K}$  non è per ora definita proprio perché non misurabile con il termometro a gas.

Più avanti introdurremo la scala di temperatura termodinamica, che è una scala assoluta di temperatura, indipendente dalle proprietà specifiche della sostanza usata: vedremo che nell'intervallo di temperatura in cui può essere usato un termometro a gas ideale, la scala del termometro a gas ideale coincide con quella assoluta o termodinamica. E' per questo motivo che la temperatura del termometro a gas ideale è espressa in gradi Kelvin (K).

In questo testo verranno indicate con il simbolo  $t$  le temperature misurate con il termometro a gas ideale, mentre con il simbolo  $T$  le temperature assolute o termodinamiche. Per quanto detto precedentemente, essendo queste temperature coincidenti nell'intervallo in cui sono definite entrambe, anche i simboli, in questo intervallo, possono essere scambiati.

### ***Scale Celsius e Fahrenheit.***

Due scale termometriche molto usate ancora oggi sono la scala Celsius e quella Fahrenheit.

La prima utilizza come unità di misura il grado Celsius o centigrado che è della stessa ampiezza del Kelvin e del campione della scala del termometro a gas ideale, ma lo zero è spostato in maniera tale che la temperatura Celsius del punto triplo dell'acqua sia  $0.01\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Quindi la temperatura Celsius è data da:

$$t_{\text{C}} = - 273.15$$

Storicamente tale scala è stata stabilita, come abbiamo già descritto, assegnando la temperatura di  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  al punto del ghiaccio (cioè la temperatura di una miscelazione di ghiaccio puro e di acqua distillata di fusione alla pressione di 1 atm) ed il valore di  $100^{\circ}$  al punto del vapore d'acqua (cioè la temperatura del vapore d'acqua puro a contatto con acqua distillata bollente e alla pressione di 1 atm). Il grado Celsius è perciò definito come la centesima parte della differenza tra la temperatura del vapore d'acqua e la temperatura del ghiaccio fondente.

La scala Fahrenheit non viene usata per scopi scientifici, ma è ancora molto usata presso i popoli di lingua inglese, tranne l'Inghilterra che dal 1964 ha adottato la scala Celsius per usi civili e commerciali.

Nella scala Fahrenheit la temperatura del ghiaccio fondente è di  $32\text{ }^{\circ}\text{F}$ , mentre quella del vapore d'acqua è  $212\text{ }^{\circ}\text{F}$ .

La relazione tra le temperature espresse in gradi Celsius,  $t_{\text{C}}$  e ed in gradi Fahrenheit,  $t_{\text{F}}$ , è data da:

$$t_{\text{F}} = 32 + \frac{9}{5} t_{\text{C}} = 32 + \frac{212 - 32}{100} t_{\text{C}}$$

### ***Scala internazionale della temperatura.***

L'uso del termometro a gas ideale per misure non particolarmente accurate di temperatura è piuttosto scomodo. Una misura di temperatura con il termometro a gas ideale richiede, infatti, una procedura piuttosto laboriosa ed impegnativa: essa va quindi considerata come un evento eccezionale e normalmente il risultato di una tale misura viene pubblicato su riviste scientifiche. Per misure di temperature in cui non è richiesta una estrema accuratezza, come per esempio nei processi industriali e civili, ma anche in moltissime applicazioni scientifiche, è stata concordata una scala pratica di temperatura che approssimasse al meglio la scala di temperature del termometro a gas ideale ma che fosse molto più accessibile e più semplice da usare.

La scala internazionale pratica di temperatura è costituita da un certo numero di punti fissi (per esempio il punto triplo dell'idrogeno, il punto di ebollizione dell'ossigeno, il punto triplo dell'acqua, il punto di vapore d'acqua,

il punto di fusione dello zinco, il punto di fusione dell'oro) misurati con il termometro a gas a volume costante, e da un insieme di regole, tra cui c'è anche quella che specifica il tipo di termometro da usare (termometro a resistenza di platino, termocoppia platino-platino-rodio), per interpolare tra tali punti fissi.

### **Dilatazione termica.**

Uno degli effetti più vistosi che accompagnano i cambiamenti di temperatura di un corpo, è quello della variazione, a parità di altre condizioni, delle dimensioni del corpo stesso.

L'aumento di ciascuna delle tre dimensioni di un solido, lunghezza, spessore ed altezza, si chiama **dilatazione lineare**. Chiamiamo  $\ell$  il valore assunto da una di queste dimensioni alla temperatura  $T$ . Supponiamo che la temperatura venga aumentata di  $\Delta T$ : corrispondentemente si osserva una variazione  $\Delta \ell$  nella dimensione considerata. Se la variazione di temperatura  $\Delta T$  non è molto grande (è infinitesima), allora  $\Delta \ell$  è dato da:

$$\Delta \ell = \alpha \ell \Delta T$$

dove  $\alpha$  è il coefficiente di dilatazione lineare del materiale considerato. Esso è definito dalla relazione:

$$\alpha = \frac{1}{\ell} \frac{d\ell}{dT}$$

e rappresenta la variazione relativa della lunghezza  $\ell$  per una variazione della temperatura di un grado ( si misura in gradi alla meno uno). Esso in generale è una funzione della temperatura,  $\alpha = \alpha(T)$ . Tuttavia in molti casi e per un intervallo di temperature limitato,  $\alpha$  può ritenersi con buona approssimazione costante, dipendente soltanto dal tipo di materiale di cui è fatto il corpo. In tal caso l'espressione

$$\ell = \ell_0 (1 + \alpha \Delta T)$$

vale anche per valori finiti di  $\Delta T$ .

Se il solido è isotropo, la dilatazione termica è la stessa in tutte e tre le dimensioni, se invece il solido è anisotropo le dilatazioni relative alle tre dimensioni sono diverse.

Consideriamo ora una lamina fatta di materiale omogeneo ed isotropo, di dimensioni  $\ell_1$  ed  $\ell_2$ . In corrispondenza ad una variazione  $\Delta T$  di temperatura,  $\ell_1$  ed  $\ell_2$  variano in accordo alle relazioni:

$$\ell_1' = \ell_1(1 + \alpha \Delta T) \quad \ell_2' = \ell_2(1 + \alpha \Delta T)$$

La nuova superficie è data da:

$$A' = \ell_1' \ell_2' = \ell_1(1 + \alpha \Delta T) \ell_2(1 + \alpha \Delta T) = \ell_1 \ell_2 (1 + 2\alpha \Delta T + \alpha^2 \Delta T^2)$$

$$A' = A(1 + 2\alpha \Delta T + \alpha^2 \Delta T^2) \approx A(1 + 2\alpha \Delta T)$$

avendo trascurato il termine  $A \alpha^2 \Delta T^2 = \ell_1 \ell_2 \alpha^2 \Delta T^2$  perché differenziale del secondo ordine. Pertanto  $A' = A(1 + 2\alpha \Delta T)$ : il coefficiente di dilatazione termica superficiale è il doppio del coefficiente di dilatazione lineare.

In maniera analoga si può vedere che la dilatazione termica di un volume è legata alla variazione della temperatura dalla relazione:

$$V' = V(1 + 3\alpha \Delta T)$$

il coefficiente di dilatazione termica di volume di un corpo isotropo è il triplo di quello di dilatazione lineare.

Per quanto riguarda i fluidi, sappiamo che questi non hanno una forma ben definita: ha senso quindi parlare solo di variazioni di volume. Mentre il volume di un gas è molto influenzato da variazioni di pressione e di temperatura, il volume di un liquido varia poco al variare sia della pressione che della temperatura.

Per i liquidi, analogamente a quanto fatto per i solidi, si può definire un coefficiente di dilatazione  $\beta$  (di volume)

attraverso la relazione:

$$V' = V(1 + \alpha \Delta T) \quad \alpha = \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta T}$$

Il coefficiente di dilatazione dei liquidi è abbastanza indipendente dalla temperatura ed è circa 10 volte più grande del corrispondente coefficiente per i solidi.

L'acqua, che è il liquido più comune, ha un comportamento diverso dagli altri liquidi. Al di sopra dei 4 °C l'acqua si dilata con la temperatura anche se non in maniera lineare. Ma anche quando la temperatura viene abbassata al di sotto dei 4 °C l'acqua continua a dilatarsi.

L'acqua ha dunque una densità massima alla temperatura di 4 °C: in queste condizioni essa differisce per meno di 1 parte su 10000 da 1 gr/cm<sup>3</sup>. A tutte le altre temperature, la densità dell'acqua è minore di questo valore.

## ***Equilibrio termodinamico.***

Un sistema termodinamico si dirà isolato se non è influenzato in alcun modo dall'ambiente circostante. In generale se un sistema termodinamico viene lasciato a se stesso, si osserva che, anche se inizialmente sono presenti fra le varie parti del sistema delle disuniformità quali quelle dovute a moti turbolenti<sup>(\*)</sup> e/o a differenze di pressione e temperatura, dopo un tempo più o meno lungo tali disuniformità scompaiono e si raggiunge uno stato nel quale non sono più evidenti moti macroscopici e le coordinate termodinamiche hanno valore costante nel sistema. Si dice che il sistema ha raggiunto uno stato di equilibrio termodinamico.

Si dirà che il sistema si trova in *equilibrio termodinamico*, se esso si trova contemporaneamente in:

1. *equilibrio meccanico*, quando non esistono forze o momenti non equilibrati né all'interno del sistema, né tra il sistema e l'ambiente circostante. In altri termini la pressione è la stessa in tutte le parti del sistema e, se il contenitore non è rigido, essa è la stessa dell'ambiente circostante.
2. *equilibrio chimico*, quando non avvengono processi che tendono a modificare la composizione del sistema, come reazioni chimiche, né spostamenti di materia da una parte all'altra del sistema, come accade per esempio quando una sostanza entra in soluzione o quando una sostanza cambia fase, per esempio da liquido a vapore. (Con l'espressione reazione chimica si intendono sia le reazioni chimiche vere e proprie che il trasporto di materia e i cambiamenti di fase.)
3. *equilibrio termico*, quando tutte le parti del sistema hanno la stessa temperatura, e se le pareti che circondano il sistema sono conduttrici, questa coincide con quella dell'ambiente circostante.

Il coesistere dell'equilibrio meccanico, chimico e termico determina l'equilibrio termodinamico.

Una volta determinate le coordinate che descrivono il sistema, i valori che esse assumono per un certo stato di equilibrio sono caratteristici di quello stato e non dipendono dalla maniera con cui lo stato è stato raggiunto. *Le coordinate termodinamiche sono delle variabili di stato.*

---

(\*) Si pensi ai moti convettivi che sono presenti in un recipiente contenente acqua che viene riscaldata a contatto di una fiamma. L'acqua sul fondo del recipiente, essendo più vicina alla fiamma, si riscalda e si dilata. Essendo quindi a densità più bassa tende a portarsi in superficie: si stabiliscono così dei moti convettivi che scambiano l'acqua superficiale con quella del fondo del recipiente e viceversa. Quando l'interazione con l'esterno viene rimossa, la fiamma viene spenta, i moti convettivi si smorzano e il liquido dopo un poco torna in quiete.



### ***Equazioni di stato.***

Consideriamo un sistema in equilibrio termodinamico, per esempio del gas contenuto in un recipiente fornito di strumenti per misurare la pressione, il volume e la temperatura.

E' noto dall'esperimento che se vengono fissati a priori i valori del volume e della temperatura, non è possibile fissare a proprio piacimento anche il valore della pressione. Una volta fissati i valori di  $V$  e  $T$ , infatti, la natura determina il valore della pressione  $P$  all'equilibrio. Analogamente una volta fissati i valori  $P$  e  $T$ , resta fissato il valore di  $V$  all'equilibrio. Possiamo concludere che, delle tre coordinate termodinamiche, pressione, volume e temperatura, solo due sono indipendenti.

Pertanto deve esistere una relazione, valida all'equilibrio, che collega i valori delle tre coordinate termodinamiche, così che solo due di esse risultano indipendenti. Tale relazione si chiama equazione di stato.

$$f(P, V, T) = 0$$

Essa è valida solo per gli stati di equilibrio termodinamico. Infatti se il sistema non è in uno stato di equilibrio termodinamico, perché sta, per esempio, subendo una trasformazione, forse potrebbe essere possibile valutare, in ogni istante della trasformazione, il volume occupato, ma ci potrebbero essere difficoltà a misurare la pressione o la temperatura in quanto queste coordinate potrebbero non avere lo stesso valore in ogni punto del sistema.

Ogni sistema termodinamico ha la sua equazione di stato la quale collega le coordinate termodinamiche di tipo meccanico (per es. la pressione ed il volume) alla temperatura. In molti casi, comunque, la relazione tra le coordinate è così complicata da non poter essere espressa in maniera analitica.

L'equazione di stato descrive le caratteristiche specifiche di un sistema: essa deve essere determinata sperimentalmente o derivata per via teorica sulla base di una teoria molecolare controllata sperimentalmente. Essa pertanto riassume i risultati di misure accurate eseguite in un intervallo delle coordinate termodinamiche. Quindi essa è accurata nei limiti dell'accuratezza degli esperimenti su cui si fonda e la sua validità è limitata all'intervallo delle coordinate termodinamiche in cui sono state eseguite le misure. Applicare l'equazione di stato al di fuori di tale intervallo può portare a risultati errati, in quanto al di fuori dell'intervallo di validità, l'equazione di stato può avere una espressione completamente diversa.

### ***Trasformazioni.***

Supponiamo che in un sistema, inizialmente in uno stato di equilibrio termodinamico, vengano alterate le condizioni in maniera tale che uno dei tre tipi di equilibrio, necessari per l'esistenza dell'equilibrio termodinamico,

venga a mancare. Il sistema allora evolve passando attraverso stati di non equilibrio per raggiungere uno stato finale che è, ancora una volta, uno stato di equilibrio termodinamico.

Si dice che il sistema ha subito un cambiamento di stato. Il passaggio da uno stato di equilibrio ad un altro stato di equilibrio si dice trasformazione.

Consideriamo un sistema termodinamico costituito da una certa quantità di gas racchiusa in un cilindro dotato di un pistone mobile, come rappresentato in figura. In condizioni di equilibrio la forza esercitata dal gas sul pistone è bilanciata da una forza uguale ed opposta esercitata dall'ambiente esterno (nel caso della figura essa è uguale alla forza dovuta alla pressione esterna più una forza di intensità pari al peso del corpo poggiato sul pistone stesso).

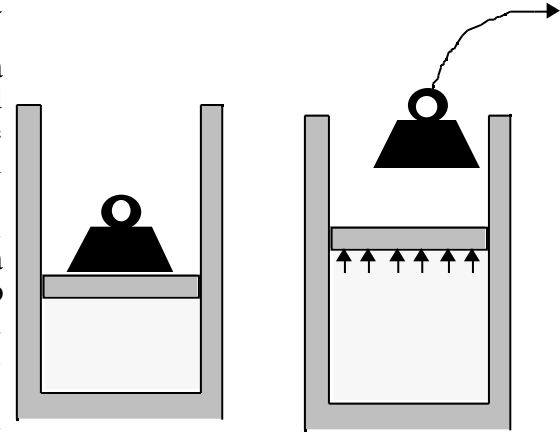
Supponiamo per esempio che la risultante delle forze agenti sul pistone vari improvvisamente così da dare origine ad una forza netta, non bilanciata tra l'interno e l'esterno, per esempio rimuovendo improvvisamente il peso poggiato sul pistone. In questo caso si dirà che l'equilibrio meccanico è rotto. A seguito di ciò nel sistema possono accadere i seguenti fenomeni:

1) si possono originare dei moti turbolenti come conseguenza del fatto che le forze non sono più bilanciate in tutti i punti del sistema e tra il sistema e l'ambiente esterno (nel caso raffigurato in figura, il pistone sarà spinto verso l'alto). Si potrebbero addirittura avere moti accelerati del sistema nel suo insieme.

2) come risultato di questi moti si può avere una distribuzione non uniforme di temperatura (gradiente di temperatura): per esempio un aumento della temperatura può essere causato dall'attrito tra le parti del sistema messe in moto relativo dalle forze non equilibrate (si pensi per esempio all'attrito tra il pistone e le pareti del cilindro). Si potrebbe determinare una differenza finita di temperatura tra il sistema e l'ambiente circostante.

3) Queste brusche variazioni nelle forze e di temperatura possono dare origine a reazioni chimiche (per esempio se è presente dell'acqua, potrebbe passare dalla fase liquida a quella di vapore).

La rottura dell'equilibrio meccanico, costringe il sistema ad un cambiamento di stato. Il sistema passa attraverso una serie di stati di non equilibrio, in cui le coordinate termodinamiche macroscopiche non sono definite perché non assumono lo stesso valore in tutte le parti del sistema.



Una trasformazione che avviene passando per stati di non equilibrio *non è descrivibile* in termodinamica.

Ne segue che per poter descrivere in termodinamica la trasformazione di un sistema, occorre che essa passi per stati di equilibrio termodinamico: una trasformazione di questo tipo può essere realizzata se le forze esterne agenti sul sistema vengono variate di tanto poco da dare luogo ad una forza infinitesima non equilibrata, in questo modo lo stato del sistema differisce di un infinitesimo da uno stato di equilibrio e quindi è ancora uno stato di equilibrio. Variando le forze o la temperatura esterna sempre di un infinitesimo alla volta, ed aspettando un tempo sufficientemente lungo prima di produrre la successiva variazione infinitesima, in maniera tale che dopo aver provocato le perturbazioni infinitesime rispetto al preesistente stato di equilibrio, si aspetta il tempo sufficiente perché il sistema si porti nello stato di equilibrio immediatamente vicino, è possibile far passare il sistema dallo stato iniziale a quello finale passando attraverso una serie di stati di equilibrio termodinamico, o comunque stati che differiscono per un infinitesimo da uno stato di equilibrio termodinamico e pertanto, a tutti gli effetti, ancora confondibili con uno stato di equilibrio. E' inutile precisare che in questo modo è possibile connettere due qualunque stati del sistema, anche se separati da una differenza finita delle coordinate termodinamiche, come per esempio una differenza finita di temperatura.

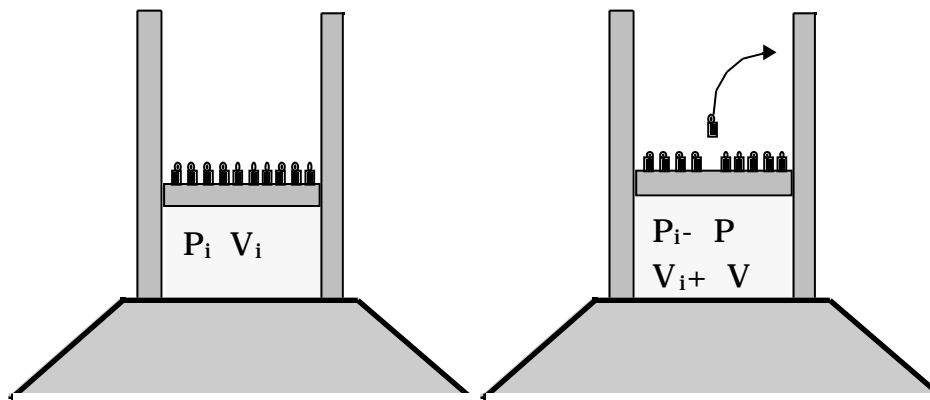
Ci si rende conto che, per il fatto che dopo ogni perturbazione infinitesima è necessario aspettare il tempo sufficiente perché il sistema si riporti nel nuovo stato di equilibrio termodinamico, è necessario un tempo molto lungo perché una trasformazione di questo tipo abbia luogo. Questo tipo di trasformazioni si chiamano *quasi statiche*: lo stato del sistema è in ogni istante uno stato di equilibrio o uno stato che differisce di un infinitesimo da uno stato di equilibrio e quindi può essere considerato a tutti gli effetti uno stato di equilibrio.

Le trasformazioni quasi statiche sono trasformazioni ideali e non possono mai essere rigorosamente realizzate in laboratorio. Tuttavia possono essere approssimate con buona precisione.

Se durante la trasformazione quasi statica che fa passare il sistema dallo stato iniziale  $i$  allo stato finale  $f$  non ci sono effetti dissipativi, allora la trasformazione risulterà anche *reversibile* nel senso che può essere percorsa a ritroso, da  $f$  a  $i$ . Naturalmente quando il sistema ritorna nello stato iniziale anche l'ambiente circostante viene riportato nella situazione iniziale.

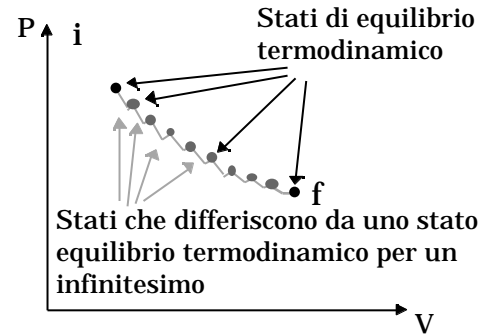
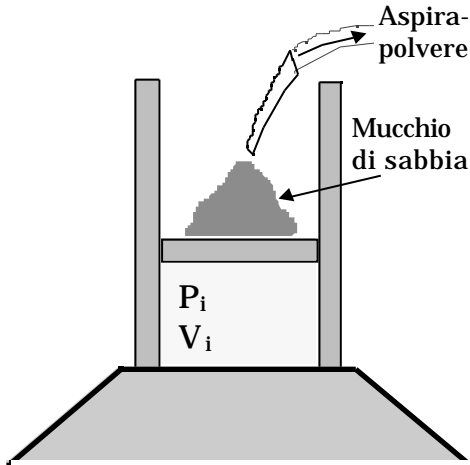
Consideriamo per esempio un sistema termodinamico costituito da una certa quantità di gas contenuta in un cilindro verticale chiuso da un pistone a tenuta. Supponiamo che inizialmente il gas si trovi alla pressione  $P_i$ , fornita dalla pressione atmosferica e da opportuni pesi poggiati sul pistone, ed occupi il volume  $V_i$ . Supponiamo inoltre di voler eseguire una trasformazione reversibile che porti il gas dal volume iniziale  $V_i$  al volume  $V_f$  più grande di  $V_i$  a temperatura costante. Questa trasformazione si chiama *espansione isoterma*. Lo stato iniziale del sistema, che è uno stato di equilibrio, è rappresentato da un punto nel piano  $PV$ . Se ora togliamo contemporaneamente tutti i pesi poggiati sul pistone, allora avviene una rapida espansione in cui pressione e

temperatura non sono più globalmente definite, il pistone acquista energia cinetica, si sviluppano degli attriti, etc. Si noti che gli stadi intermedi *non sono rappresentabili* nel piano PV, proprio perché non essendo stati di equilibrio, in essi le variabili termodinamiche non sono definite, nel senso che non hanno un unico valore in tutte le parti del sistema. Chiaramente questa trasformazione non ha le caratteristiche di una trasformazione reversibile. Per fare in modo che essa sia reversibile operiamo nel seguente modo: mettiamo innanzitutto il cilindro in contatto termico con un termostato a temperatura  $T$ . Per termostato si intende un dispositivo che sia in grado di mantenere costante la sua temperatura, in qualsiasi condizione.



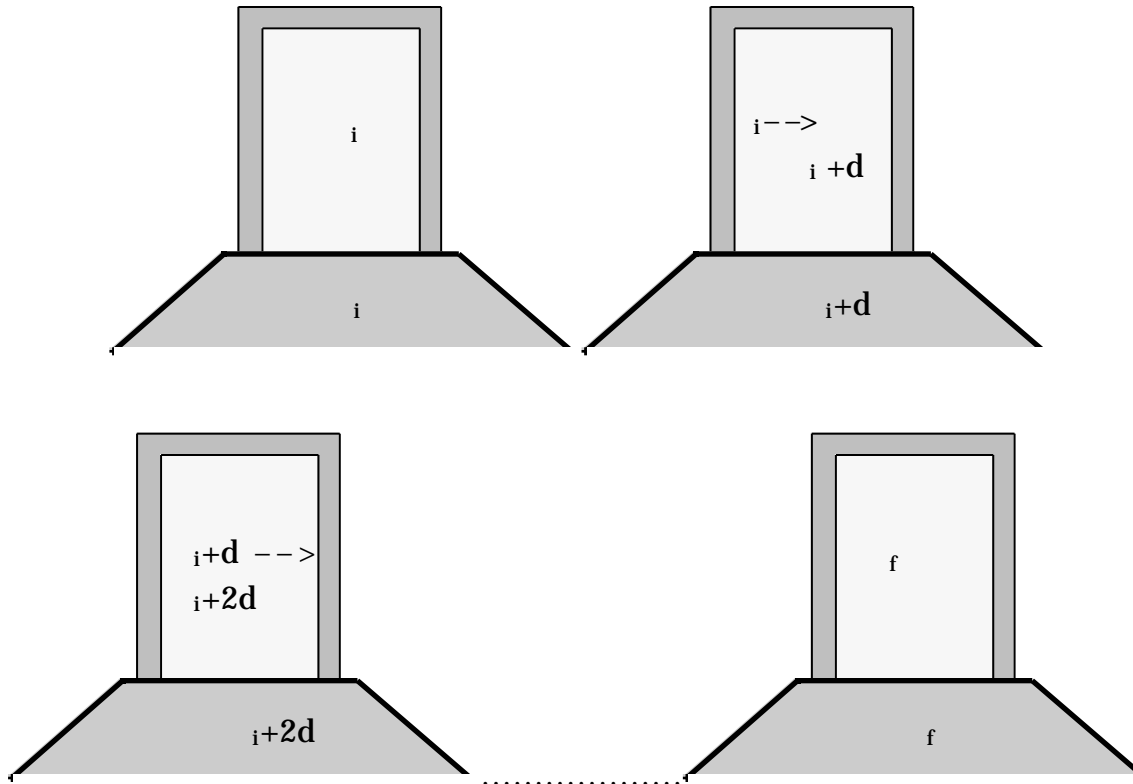
Poi si diminuisce la pressione iniziale  $P_i$  di una piccola quantità  $P$  per esempio togliendo uno solo dei piccoli pesi poggiati sul pistone, si aspetta che il gas abbia raggiunto il nuovo stato di equilibrio, con il volume che è diventato un po' più grande  $V_i + V$ , con la pressione che ha assunto il valore  $P_i - P$  in tutto il volume del gas e con la temperatura che si è riequilibrata al valore  $T$  attraverso scambi termici con il termostato. Continuando a rimuovere piccoli pesi dal pistone, cosa che corrisponde a ridurre la pressione di piccole quantità, attendendo ogni volta un tempo sufficientemente lungo, in maniera da essere sicuri che l'equilibrio si sia ristabilito, si può raggiungere lo stato finale caratterizzato dai valori delle variabili termodinamiche  $V_f$  e  $P_f$ . Durante ciascuna fase intermedia il sistema è o in uno stato di equilibrio o in uno stato che differisce da quello di equilibrio di un infinitesimo, e quindi anch'esso di equilibrio: ne segue che gli stati intermedi sono tutti rappresentabili nel piano PV. Il punto rappresentativo del sistema si muoverà nel piano PV lungo la spezzata che al limite, per decrementi infinitesimi

della pressione, tende ad una curva continua che collega lo stato iniziale allo stato finale. Questa linea indica una trasformazione costituita da una successione di stati intermedi di equilibrio e pertanto è un esempio di trasformazione quasi statica.



Se invece si vuole realizzare in maniera reversibile il riscaldamento di un corpo dalla temperatura  $T_i$  alla temperatura  $T_f$  occorre disporre di una serie infinita di termostati in cui, considerato uno qualsiasi di questi termostati a temperatura intermedia  $T$ , il termostato con temperatura immediatamente superiore ha una temperatura che differisce per un infinitesimo ( $+ dT$ ) da quella del termostato considerato (si tenga conto che  $dT$  può anche essere negativo).

Si mette quindi in contatto termico il corpo con un termostato dopo l'altro: il termostato seguente avrà una temperatura leggermente più grande di quello precedente se la temperatura finale da raggiungere è maggiore di quella iniziale. Si attende quindi ogni volta che si ristabilisca l'equilibrio termico, si attende cioè che il gas si porti alla temperatura del termostato ( $+ dT$ ). L'operazione viene ripetuta fino a che il sistema non raggiunga la temperatura finale  $T_f$ .



In entrambi gli esempi precedenti, se non ci sono fenomeni dissipativi, forze di attrito, dissipazione per effetto Joule all'interno di una resistenza, etc., le trasformazioni quasi statiche possono essere percorse anche in senso inverso, così che sia il sistema che l'ambiente circostante possono essere riportati nelle condizioni iniziali. In queste circostanze le trasformazioni quasi statiche sono anche reversibili.

### Lavoro.

Durante una trasformazione, il sistema può compiere lavoro sull'ambiente circostante. Indichiamo con  $F_e$  la forza esercitata dall'ambiente circostante sul sistema<sup>2</sup>: nel caso mostrato in figura, la forza esterna agisce sul pistone ed è costante dato che la pressione atmosferica è costante ed anche la massa  $M$  del peso appoggiato sul pistone è costante. Supponiamo, sempre facendo riferimento alla figura, che il pistone, a causa della espansione del sistema, subisca uno spostamento  $\ell$ , il lavoro  $W_e$  eseguito dalla forza esterna (costante), e quindi dall'ambiente esterno sul sistema, è dato da:

$$W_e = - F_e \ell$$

il segno negativo sta ad indicare che nel caso considerato lo spostamento è opposto alla forza.

Il lavoro  $W$  effettuato dal sistema sull'ambiente esterno è opposto a quello fatto dall'ambiente esterno ( $-W_e$ ). Pertanto:

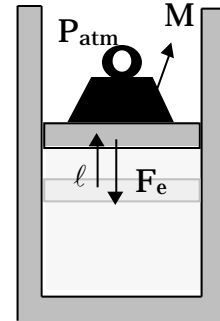
$$W = - W_e = F_e \ell$$

Tenendo conto che la  $F_e$  può essere espressa in termini della pressione esterna come

$$F_e = P_e S \quad \left( \text{nel caso della figura } P_e = P_{\text{atm}} + \frac{Mg}{S} \right)$$

$$F_e = P_{\text{atm}} S + Mg$$

( $S$  superficie del pistone)



---

<sup>2</sup> Come sistema termodinamico stiamo considerando una certa quantità di gas contenuta in un cilindro munito di un pistone a tenuta di area  $S$ . La pressione esterna è data dalla  $P_{\text{atm}}$  più quella dovuta ad un peso di massa  $M$  poggiato sul pistone:

$$P_e = P_{\text{atm}} + \frac{Mg}{S}$$

dove  $S$  è la superficie del pistone, l'espressione precedente diventa:

$$W = P_e S \ell = P_e V$$

Infatti  $S \ell$  è proprio la variazione di volume del sistema. Se la pressione esterna rimane costante, come nel caso mostrato in figura, l'espressione precedente può essere utilizzata sempre, sia se la trasformazione subita dal sistema è una trasformazione reversibile o una trasformazione irreversibile.

Se la trasformazione è quasi statica, tutti gli stati intermedi sono stati di equilibrio termodinamico e quindi la pressione esterna  $P_e$  è bilanciata dalla pressione  $P$  esercitata dal sistema sul pistone:

$$P_e = P$$

per cui il lavoro  $W$  fatto dal sistema sull'esterno può essere valutato utilizzando le coordinate termodinamiche del sistema al posto di quelle dell'ambiente circostante:

$$W = P V$$

Per una trasformazione infinitesima avremo:

- |                                     |               |
|-------------------------------------|---------------|
| 4. trasformazione non quasi statica | $dW = P_e dV$ |
| 5. trasformazione quasi statica     | $dW = P dV$   |

In conclusione per il calcolo del lavoro termodinamico, se la trasformazione non è quasi statica, e quindi non è reversibile, siamo costretti ad usare le coordinate termodinamiche dell'ambiente esterno, in quanto le coordinate termodinamiche del sistema non sono definite durante la trasformazione. Se invece la trasformazione è reversibile, e quindi anche quasi statica, essendo gli stati intermedi stati di equilibrio termodinamico in cui sia la pressione del sistema che la sua temperatura hanno lo stesso valore in tutte le parti del sistema che è anche uguale a quello dell'ambiente esterno se le pareti sono conduttrici e non rigide, allora è possibile utilizzare nel calcolo del lavoro le coordinate termodinamiche del sistema.

La definizione di lavoro in termodinamica è la stessa di quella data in meccanica. L'unica differenza consiste nel fatto che in Termodinamica il lavoro è considerato positivo se viene effettuato dal sistema sull'ambiente



circostante. La ragione di tale convenzione è legata al fatto che la termodinamica è stata sviluppata in connessione alle macchine termiche a cui è demandato il compito di trasformare l'energia interna di un sistema in lavoro meccanico.

Il lavoro eseguito da un sistema termodinamico in trasformazioni reversibili, e quindi quasi statiche, può essere espresso mediante due variabili di stato, una intensiva, l'altra estensiva<sup>(\*)</sup>. Se la particolare azione scambiata dal sistema con l'esterno può essere rappresentata della variabile intensiva  $Y$  e della corrispondente variabile estensiva  $X$ : il lavoro compiuto dal sistema per una trasformazione quasi statica infinitesima è dato da:

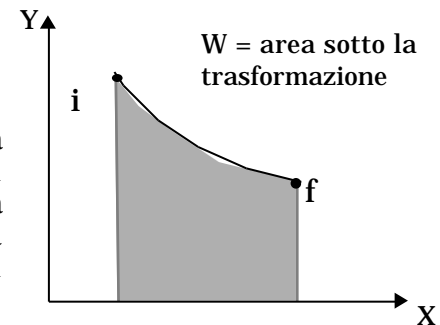
$$dW = Y dX$$

Se sono presenti più azioni contemporaneamente, il lavoro complessivo si otterrà come somma dei contributi dovuti alle singole azioni.

Il lavoro complessivo effettuato dal sistema durante la trasformazione quasi statica che lo fa passare dallo stato iniziale  $i$  allo stato finale  $f$ , è dato dalla somma dei lavori elementari effettuati dal sistema sui tratti infinitesimi di trasformazione, cioè:

$$W = \int_{C,i}^f dW = \int_{C,i}^f Y dX$$

dove l'integrale è calcolato lungo la trasformazione  $C$ . Siccome la trasformazione è quasi statica allora è rappresentabile mediante una curva nel diagramma  $XY$ . Il lavoro è dato dall'area sotto la curva che rappresenta la trasformazione, preso con il segno positivo se lo stato finale è caratterizzato da un valore della coordinata  $X$  maggiore di quello relativo allo stato iniziale, col segno negativo nel caso contrario.



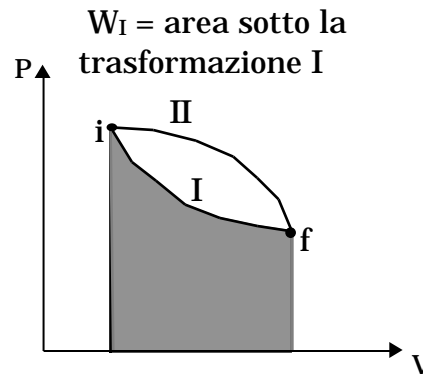
---

<sup>(\*)</sup> Le variabili intensive, temperatura, pressione, tensione nella corda, etc, sono quelle che non dipendono dalle dimensioni del sistema. Infatti se pensiamo di suddividere in due parti il sistema in equilibrio e supponendo che l'equilibrio si conservi, la temperatura, la pressione o la tensione sono le stesse nelle due parti. Le variabili estensive, massa, volume, lunghezza della corda, etc, invece dipendono dalle dimensioni del sistema.

Se il sistema è costituito da una certa quantità di gas contenuto in un cilindro munito di pistone a tenuta, il lavoro eseguito dal sistema in una trasformazione quasi statica che lo porta dallo stato iniziale  $i$  allo stato finale  $f$  è dato da:

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P dV$$

Se la trasformazione quasi statica è rappresentata nel piano PV, detto piano di Clapeyron, dalla curva I, il lavoro è pari all'area racchiusa dalla curva I, dall'asse dei volumi  $V$ , e dalle rette parallele all'asse delle ordinate,  $P$ , passanti per gli estremi della trasformazione. Il lavoro risulta positivo se  $V_f$  è maggiore di  $V_i$ , negativo nel caso contrario. Se la trasformazione anziché avvenire lungo la curva I avviene lungo la curva II, il lavoro compiuto in questa seconda trasformazione è diverso da quello effettuato nella trasformazione I, come si può intuire facendo confrontando le area al di sotto delle due trasformazioni.



In conclusione il lavoro compiuto da un sistema termodinamico nel suo passaggio dallo stato  $i$  allo stato  $f$  dipende sia dagli stati iniziale e finale ma anche dalla particolare trasformazione quasi statica eseguita per passare da  $i$  a  $f$ . A titolo di esempio consideriamo tre trasformazioni che portano il sistema dallo stesso stato iniziale  $i$  allo stesso stato finale  $f$ , composte da:

- a) isocora + isobara(\*)
- b) isobara + isocora
- 3) trasformazione rappresentata nel piano PV da un segmento di retta che connette lo stato iniziale con lo stato finale.

---

(\*) Si dice isocora una trasformazione che avviene a volume costante, isobara una trasformazione a pressione costante.

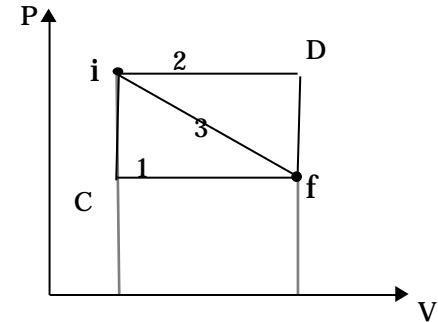
$$W_1 = \int_i^f PdV = \int_i^C PdV + \int_C^f PdV = P_f \int_C^f dV = P_f [V]_C^f = P_f (V_f - V_i)$$

$\underbrace{\int_i^C PdV}_{=0 \text{ isocora } dV=0}$

$$W_2 = \int_i^f PdV = \int_i^D PdV + \int_D^f PdV = P_i \int_i^D dV = P_i [V]_i^D = P_i (V_f - V_i)$$

$\underbrace{\int_i^D PdV}_{=0 \text{ isocora } dV=0}$

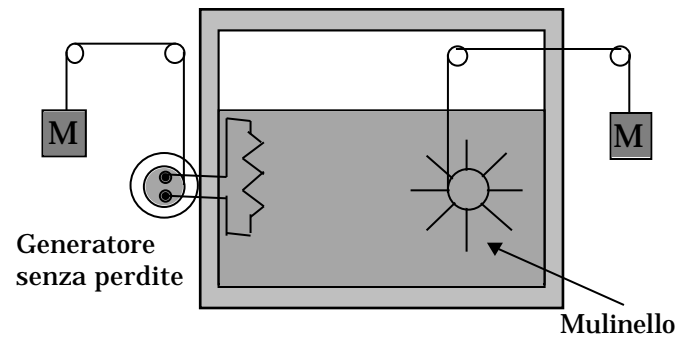
$$W_3 = \text{Area sotto la trasformazione} = W_1 + \frac{1}{2} (P_i - P_f) (V_f - V_i)$$



Questo esempio mostra chiaramente che il lavoro dipende dalla trasformazione seguita. Matematicamente questo si esprime dicendo che il lavoro infinitesimo  $W=PdV$  non è un differenziale esatto, cioè non è il differenziale di una funzione delle coordinate termodinamiche. Non esiste, cioè, una funzione delle coordinate termodinamiche tale che la differenza dei valori da essa assunti nello stato finale ed iniziale dia il lavoro effettuato nella trasformazione. E' per questo motivo che il lavoro infinitesimo si indica con il simbolo  $W$  anziché  $dW$ , proprio per ricordare che non è il differenziale di una funzione, ma solo una quantità infinitesima.

### Lavoro adiabatico.

Supponiamo di isolare il sistema dall'ambiente circostante con pareti adiabatiche in maniera da impedire, scambi termici, cioè interazioni con l'ambiente circostante derivanti da una differenza di temperatura tra il sistema e l'ambiente circostante. Possiamo considerare, tanto per fissare le idee, una certa quantità di acqua in un recipiente



adiabatico alla pressione atmosferica. Supponiamo che  $T_i$  sia la temperatura iniziale del sistema e di voler effettuare una trasformazione adiabatica, (senza cioè che ci siano interazioni con l'ambiente esterno causate da una differenza di temperatura tra l'ambiente ed il sistema stesso), che porti il sistema ad una temperatura più elevata  $T_f$  mentre la pressione resta costante: uguale alla pressione atmosferica.

Facendo riferimento al sistema rappresentato in figura, per portare l'acqua dalla temperatura iniziale  $T_i$  alla temperatura finale  $T_f$  si può far girare il mulinello eseguendo del lavoro meccanico. Le forze di attrito viscoso tra le pale del mulinello e l'acqua dissipano l'energia e danno luogo ad una variazione della temperatura dell'acqua. In maniera alternativa si può produrre energia elettrica eseguendo del lavoro meccanico su di un generatore elettrico senza perdite. L'energia elettrica viene poi dissipata all'interno di un resistore posto nell'acqua. Se si considera il generatore elettrico come parte del sistema anche questa seconda trasformazione viene realizzata con la sola esecuzione di lavoro adiabatico. Naturalmente ci sono infiniti modi per effettuare la trasformazione con l'esecuzione di solo lavoro adiabatico: si può per esempio variare la durata della trasformazione variando la rapidità di esecuzione del lavoro adiabatico, utilizzando per esempio corpi con massa diversa per azionare il mulinello o il generatore elettrico. Inoltre, si può realizzare la trasformazione utilizzando in parte il lavoro meccanico effettuato sul mulinello ed in parte quello effettuato sul generatore elettrico: variando i due contributi si ottengono trasformazioni diverse, etc.

*Si osserva che il lavoro eseguito dal sistema in una qualunque trasformazione adiabatica che porti il sistema dallo stato iniziale  $i$  allo stato finale  $f$ , è sempre lo stesso: esso cioè è indipendente dalla trasformazione.*

In meccanica l'osservazione che il lavoro effettuato da alcune forze fosse indipendente dal percorso seguito dal punto materiale per andare dalla posizione iniziale alla posizione finale ci aveva permesso di classificare tali forze come *forze conservative* e di *stabilire l'esistenza* di una funzione della posizione del punto materiale, caratteristica della particolare forza conservativa in considerazione, che ci consentiva di calcolare il lavoro effettuato dalla forza come differenza dei valori assunti dalla funzione nella posizione iniziale e in quella finale del percorso effettuato.

$$U_p = U_{pf} - U_{pi} = -W_{if}$$

Alla stessa maniera, in termodinamica, l'osservazione che il lavoro adiabatico fatto da un sistema termodinamico dipende soltanto dagli stati iniziale e finale, e non dalla particolare trasformazione seguita per passare da uno stato

all'altro, ci permette di dire che *deve esistere una funzione delle coordinate termodinamiche che rappresentano lo stato del sistema* tale che la differenza dei valori da essa assunti nello stato iniziale ed in quello finale è proprio uguale al lavoro eseguito dal sistema durante la trasformazione. Tale funzione delle variabili di stato del sistema (o, più semplicemente, *funzione di stato*) è detta *energia interna* del sistema e l'affermazione precedente si traduce nella relazione:

$$U_i - U_f = W_{\text{if(adiabatico)}} \quad U = U_f - U_i = -W_{\text{if(adiabatico)}}$$

Il segno negativo indica che quando il sistema esegue del lavoro adiabatico,  $W_{\text{if}} > 0$ , lo fa a spese della sua energia interna, che quindi diminuisce  $U < 0$

### **Funzione energia interna.**

La relazione

$$U = U_f - U_i = -W_{\text{if(adiabatico)}}$$

esprime il principio di conservazione dell'energia per una particolare classe di trasformazioni. Però esprime anche qualcosa in più: afferma cioè che esiste una funzione, l'energia interna  $U$ , che è funzione dello stato del sistema, è funzione cioè di tutte le coordinate termodinamiche necessarie e sufficienti per specificare lo stato del sistema.

Non sempre la funzione  $U$  può essere messa in una formula matematicamente semplice, anzi di solito si ignora completamente la sua espressione. *Quello che però è importante è che tale funzione esista, e sia una funzione di stato.*

Questo significa anche quando *la trasformazione che porta il sistema dallo stato iniziale  $i$  allo stato finale  $f$  non è adiabatica, la variazione dell'energia interna è la stessa che in una trasformazione adiabatica, dipende cioè solo dallo stato iniziale e dallo stato finale.*

Se il sistema termodinamico è una certa quantità di una sostanza pura, per esempio del gas contenuto in un recipiente, gli stati possono essere descritti mediante tre coordinate termodinamiche  $P, V,$  legate tra loro da una equazione di stato. In altri termini sono sufficienti due di queste coordinate per individuare lo stato del sistema. L'energia interna, essendo una funzione di stato, è dunque funzione di una qualunque coppia di queste due coordinate, per esempio  $U(, V)$ , oppure  $U(, P)$ , oppure ancora  $U(P, V)$ .

Per una trasformazione infinitesima la variazione di energia interna è pari a  $dU$ , dove  $dU$  è un differenziale esatto.

### **Il primo principio della termodinamica.**

E' ben noto che una trasformazione in cui la temperatura di una certa quantità di acqua viene portata a pressione costante, per esempio alla pressione atmosferica, dal valore iniziale  $T_i$  al valore  $T_f > T_i$ , si può realizzare senza bisogno di eseguire alcun lavoro. E' sufficiente infatti far interagire termicamente, attraverso pareti conduttrici, il sistema, nel nostro caso l'acqua, con la fiamma di un becco bunsen (o con un termostato). In questa trasformazione la variazione della funzione energia interna è la stessa che si può determinare nel caso di una trasformazione adiabatica che faccia passare il sistema dallo stesso stato iniziale allo stesso stato finale.

$$U = U_f - U_i$$

In questo caso però non è stato eseguito alcun lavoro, mentre sono stati consentiti scambi termici tra il sistema e l'ambiente circostante, interazioni cioè causate da una differenza di temperatura tra il sistema e l'ambiente circostante.

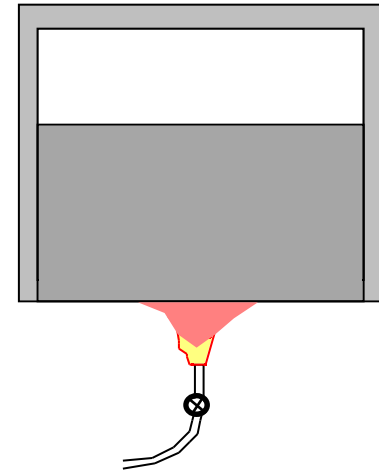
Si definisce **calore**,  $Q$ , ciò che è stato scambiato tra il sistema e l'ambiente circostante a causa di una differenza di temperatura.

Affinché il principio di conservazione dell'energia continui a valere occorre che il calore scambiato durante la trasformazione deve essere uguale alla variazione dell'energia interna del sistema:

$$U = Q$$

Per convenzione, legata al funzionamento delle macchine termiche, il calore è considerato positivo se assorbito dal sistema, negativo se ceduto.

Naturalmente, nel caso più generale, in cui la trasformazione da uno stato iniziale  $i$  ad uno stato finale  $f$  viene realizzata sia effettuando del lavoro, sia consentendo scambi di calore tra il sistema e l'ambiente circostante a causa di una differenza di temperatura, la variazione di energia interna è data da:



$$U = Q - W_{if}$$

L'espressione  $U = Q - W_{if}$  rappresenta la formulazione matematica del **primo principio della termodinamica**. Esso afferma che quando un sistema passa dallo stato iniziale  $i$  allo stato finale  $f$ , la variazione dell'energia interna non dipende dalla particolare trasformazione eseguita ma soltanto dallo stato iniziale e da quello finale, ed è pari all'energia acquisita dall'ambiente circostante come flusso di calore meno il lavoro eseguito sull'ambiente circostante.

Il primo principio della termodinamica può essere applicato in ogni processo che avviene in natura in cui intervengano scambi di energia anche sotto forma di calore. Esso vale sia per processi reversibili che per processi irreversibili.

Infatti nei processi irreversibili, non quasi statici, anche se le trasformazioni non sono rappresentate da una successione di stati di equilibrio termodinamico, purché tali trasformazioni colleghino due stati di equilibrio termodinamico, può essere applicato il primo principio perché nella sua formulazione intervengono solo gli stati iniziale e finale e non la trasformazione seguita.

Possiamo concludere sottolineando i punti salienti contenuti nella formulazione del primo principio della termodinamica:

- 1) esiste la funzione energia interna del sistema che è funzione dello stato del sistema;
- 2) l'energia si conserva;
- 3) il calore è una forma di energia, in particolare è l'energia scambiata tra il sistema e l'ambiente circostante a causa di una differenza di temperatura. In altri termini è l'energia che transita attraverso i confini del sistema a causa di una differenza di temperatura tra il sistema e l'ambiente circostante. Essendo il calore un'energia, nel Sistema Internazionale di Unità di Misura si misura in Joule.

### **Forma differenziale del primo principio della termodinamica.**

Se il sistema termodinamico subisce una trasformazione reversibile, essa passa per stati di equilibrio termodinamico e pertanto può essere suddivisa in tratti infinitesimi. Per ciascun tratto della trasformazione si può applicare il primo principio della termodinamica. Riferendosi ad un tratto infinitesimo di trasformazione, il primo

principio si scriverà nella forma:

$$dU = Q - W$$

Mentre il simbolo  $dU$  indica un differenziale esatto, cioè il differenziale di una funzione di stato, i simboli  $Q$  e

$W$  indicano soltanto delle quantità infinitesime in quanto né il calore né il lavoro scambiati sono delle funzioni di stato, essi infatti dipendono dalla trasformazione usata per passare da uno stato all'altro.

Se il sistema è un gas, essendo la trasformazione quasi statica, si avrà:

$$dU = Q - PdV$$

dove  $U$  è una funzione di due delle tre coordinate termodinamiche  $P, V, T$ .

### ***Il calore.***

Sulla base del primo principio della termodinamica un sistema può scambiare energia con l'ambiente circostante o scambiando calore o eseguendo del lavoro. Il calore dunque è energia in transito attraverso i confini del sistema, transito causato da un salto di temperatura tra il sistema e l'ambiente circostante: si può quindi parlare di assorbimento o cessione di calore ma non di calore contenuto in un sistema. Un sistema infatti possiede un'energia interna, non del calore. Lo scambio di calore attraverso i confini del sistema può avvenire con tre meccanismi diversi: conduzione termica, convezione termica, ed irraggiamento termico. Tutti e tre questi meccanismi di *trasmissione del calore* sono innescati da una differenza di temperatura tra il sistema e l'ambiente circostante.

Così come il lavoro anche il calore scambiato con l'ambiente circostante dipende oltre che dallo stato iniziale e dallo stato finale anche dalla trasformazione seguita per passare da  $i$  a  $f$ . È la quantità  $Q - W$ , cioè il calore assorbito meno il lavoro eseguito dal sistema che è indipendente dalla trasformazione effettuata: tale quantità è proprio uguale alla variazione di energia interna del sistema.

Se un sistema termodinamico esegue un ciclo, ritorna cioè nella situazione di partenza, la variazione dell'energia interna è nulla, sicché in un ciclo il calore assorbito è uguale al lavoro eseguito dal sistema:



$$U = 0$$

$$Q = W$$

il sistema può assorbire calore dall'ambiente circostante e restituire lavoro o assorbire lavoro e restituire calore. Il primo principio della termodinamica stabilisce dunque l'equivalenza tra calore e lavoro meccanico: è possibile quindi, in base al primo principio della termodinamica, assorbire calore da un termostato e trasformarlo in lavoro meccanico. Il primo principio della termodinamica è quindi particolarmente importante, perché per la prima volta permette di ottenere movimento (lavoro meccanico) partendo dal calore che movimento non è, almeno dal punto di vista macroscopico. Prima di questa equazione bisognava partire da qualcosa in moto per produrre movimento da qualche altra parte: cascate, vento, movimento prodotto dalla forza muscolare di animali o schiavi, ecc. E' chiaro che il primo principio della termodinamica apre nuove prospettive.

### ***La calorimetria***

Ancora prima che fosse stabilito il primo principio della termodinamica che identificava il calore come una forma di energia in transito attraverso i confini di un sistema termodinamico, il calore veniva identificato come ciò che veniva scambiato tra sistema e ambiente circostante a causa di una differenza di temperatura e definito in maniera operativa attraverso la definizione di un campione e di un metodo di misura. I metodi messi a punto da questa parte della fisica, che va sotto il nome di Calorimetria, vengono utilizzati ancora oggi per effettuare misure di quantità di calore: e' bene rivederli anche alla luce del primo principio della termodinamica.

### ***Capacità termica e calore specifico.***

Quando una certa quantità di calore viene ceduta ad un sistema, in generale<sup>3</sup> si produce un innalzamento della temperatura del sistema.

---

<sup>3</sup> Ci sono dei casi in cui questo non avviene: si pensi al sistema che realizza il punto triplo dell'acqua: il calore ceduto a questo sistema non provoca un innalzamento della temperatura del sistema ma solo la variazione della frazione di ghiaccio rispetto alla parte liquida e gassosa. Una cosa analoga avviene in ogni cambiamento di fase, il calore assorbito dal sistema non fa aumentare la sua temperatura, ma solo la parte di sostanza che ha cambiato fase ( da solido è passata a liquido, o da liquido è passata alla fase vapore.

Se il sistema assorbe una quantità di calore  $Q$  e la sua temperatura passa da  $\theta_1$  a  $\theta_2$ , si definisce *capacità termica media* nell'intervallo di temperatura  $\theta_1, \theta_2$  la quantità:

$$C_{\text{media}} = \frac{Q}{\theta_2 - \theta_1} = \frac{Q}{\Delta\theta}$$

La *capacità termica alla temperatura*  $\theta_1$  è data da:

$$C = \lim_{\theta_2 \rightarrow \theta_1} \frac{Q}{\theta_2 - \theta_1} = \lim_{d\theta \rightarrow 0} \frac{Q}{d\theta} = \frac{dQ}{d\theta}$$

Ripetendo l'operazione di limite per ogni valore di  $\theta_1$  si ottiene la capacità termica del sistema in funzione della temperatura.

Nel linguaggio comune, quando parliamo di capacità di un recipiente indichiamo la quantità di liquido che il recipiente può contenere: questo potrebbe portare alla falsa conclusione che con il termine capacità termica si vuole indicare la quantità di calore che un sistema può contenere. Osserviamo ancora una volta che è l'energia interna cioè che è contenuta in un sistema e non il calore, il quale assume un significato solo allorché dell'energia viene scambiata tra il sistema e l'ambiente circostante a causa di una differenza di temperatura. Quindi per capacità termica si intende semplicemente la quantità di calore che bisogna trasferire al sistema per aumentare la sua temperatura di un grado.

Si definisce *calore specifico* la capacità termica per unità di massa:

$$c = \frac{C}{m} = \frac{1}{m} \frac{dQ}{d\theta} \quad \text{da cui} \quad C = mc$$

Se nell'intervallo di temperatura considerato, la capacità termica (o il calore specifico) è costante, la capacità termica è uguale alla capacità termica media e vale la seguente relazione:

$$Q = C(\theta_2 - \theta_1) = mc(\theta_2 - \theta_1)$$

Questa espressione viene usata in *calorimetria* (la scienza che si occupa della misura del calore), per definire l'unità ed il metodo di misura del calore.

Sulla base di tale espressione si dirà che è stata scambiata una unità di calore quando un sistema di massa unitaria e calore specifico unitario subisce una variazione unitaria di temperatura alla pressione unitaria. Il sistema a cui è stato attribuito calore specifico unitario è l'acqua distillata a 14.5 °C ed alla pressione atmosferica. Se l'unità di massa è il grammo, l'unità di calore è la caloria.

La caloria è perciò definita come la quantità di calore necessaria per portare un grammo di acqua distillata dalla temperatura di 14.5 °C alla temperatura di 15.5 °C alla pressione di una atmosfera.

La Kilocaloria, uguale a 1000 calorie, è la quantità di calore necessaria per produrre la stessa variazione di temperatura in un Kg di acqua distillata.

Se la capacità termica o il calore specifico non sono costanti con la temperatura, la quantità di calore necessaria per produrre una variazione finita di temperatura è data da:

$$Q = mc \int_{t_1}^{t_2} dt$$

Il calore specifico dell'acqua diminuisce tra zero e 35°C e poi cresce nuovamente; esso vale 1.007 cal/g°C a 0°C e a 100 °C e .998 cal/g°C intorno a 35 °C. Come si vede il calore specifico dell'acqua varia di molto poco tra 0°C e 100°C, per nel risolvere i problemi, lo considereremo costante. Un'analogia considerazione può essere fatta anche per altre sostanze.

Molto spesso, si preferisce riferire il calore specifico ad una mole della sostanza, piuttosto che all'unità di massa. Si introduce perciò il *calore molare* dato da:

$$C_{\text{molare}} = \frac{C}{n} = \frac{1}{n} \frac{Q}{d\theta}$$

dove n è il numero di moli presenti nel sistema.

Usando quantità riferite alla mole, si riescono a mettere in evidenza quelle caratteristiche della sostanza che dipendono dalle proprietà dei costituenti. Una mole di una qualsiasi sostanza, infatti, contiene sempre lo stesso

numero di costituenti elementari dato dal numero di Avogadro,  $6.022 \cdot 10^{23}$ . Differenze o similitudini di comportamento a livello elementare saranno riscontrabili nelle grandezze riferite alla mole, perché riferite allo stesso numero di particelle elementari. Ricordiamo che una mole di una sostanza ha una massa pari alla massa molecolare  $M$  espresso in grammi. Pertanto il calore specifico molare  $C_{\text{molare}}$  è uguale alla massa molecolare  $M$  per il calore specifico  $c$ :

$$C_{\text{molare}} = Mc$$

### ***Trasformazioni a volume costante e a pressione costante.***

#### Attenzione.

La definizione di capacità termica data precedentemente non è univoca: sappiamo infatti che la quantità di calore scambiato tra il sistema e l'ambiente circostante dipende dalla trasformazione subita dal sistema, avremo perciò tanti valori della capacità termica, uno per ogni trasformazione che porti il sistema dallo stato a temperatura  $T_1$  allo stato a temperatura  $T_2$  (\*). E' possibile però trovare classi di trasformazioni per le quali il calore scambiato nel passaggio tra lo stato iniziale e lo stato finale dipende soltanto dagli stati iniziale e finale e non dalla particolare trasformazione subita. In questo caso il calore scambiato è una funzione di stato e il  $Q$  diventa un differenziale esatto,  $dQ$ .

Un esempio sono le trasformazioni adiabatiche: in questo caso infatti il calore assorbito è sempre nullo qualunque sia la trasformazione adiabatica subita dal sistema. La capacità termica corrispondente a questo tipo di trasformazioni è sempre uguale a zero.

Un'altra classe di trasformazioni in cui il calore scambiato dipende soltanto dallo stato iniziale e da quello finale è quella delle trasformazioni in cui il lavoro fatto dal sistema è nullo. In tal caso infatti:

$$dU = Q - W \quad \text{ma se} \quad W = 0 \quad dU = dQ$$

---

(\*) Questo è il motivo per cui nel dare la definizione della caloria abbiamo specificato che la variazione di temperatura deve avvenire alla pressione costante di 1 atmosfera.

La variazione di energia interna è uguale al calore assorbito e, quindi,  $dQ$  è un differenziale esatto e  $Q$  è una funzione di stato.

Il lavoro effettuato lungo la trasformazione è nullo se il volume finale è uguale a quello iniziale. Infatti se la trasformazione è irreversibile allora per calcolare il lavoro bisogna utilizzare la pressione esterna, che supporremo costante. Il lavoro sarà dato da:

$$W = P_{\text{est}}(V_f - V_i) = 0$$

Se invece la trasformazione è reversibile e quindi passa per stati di equilibrio termodinamico caratterizzati tutti dallo stesso volume, trasformazione isocora, allora il lavoro è nullo perché in ogni tratto infinitesimo della trasformazione il lavoro infinitesimo effettuato,  $dW = PdV$ , è nullo essendo nulla la variazione di volume  $dV$ .

In questa trasformazione il calore scambiato tra il sistema e l'ambiente circostante, sulla base del I principio della termodinamica è uguale alla variazione di energia interna:

$$U = Q$$

Quindi, come l'energia interna, anche il calore non dipende dal modo in cui è avvenuta la trasformazione, ma solo dallo stato finale e da quello iniziale purché la trasformazione sia avvenuta a volume costante.

Quindi quando si fa passare un certo volume di gas dalla temperatura iniziale  $T_1$  a quella finale  $T_2$  in modo tale che il volume finale è uguale a quello iniziale, il calore scambiato è lo stesso sia se la trasformazione usata è una trasformazione reversibile sia se la trasformazione è una irreversibile.

Ricordiamo che per far passare il gas dalla temperatura iniziale  $T_1$  a quella finale  $T_2$  in maniera irreversibile basta mettere a contatto il gas col termostato a temperatura  $T_2$  avendo cura di impedire variazioni del volume del gas stesso. Invece per effettuare la stessa trasformazione in maniera reversibile occorre procurarsi infiniti serbatoi di calore con temperature comprese tra  $T_1$  e  $T_2$ , e metterli successivamente in contatto termico con il sistema, facendo in modo che ad ogni passo la temperatura del sistema venga variata di un infinitesimo.

Per le trasformazioni a volume costante il calore specifico a volume costante e il calore molare a volume costante diventano:

Calore specifico a volume costante

Calore molare a volume costante

$$c = \frac{1}{m} \frac{Q}{d\theta} = \frac{1}{m} \frac{dU}{d\theta} \Big|_{V=\text{cost}}$$

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{Q}{d\theta} = \frac{1}{n} \frac{dU}{d\theta} \Big|_{V=\text{cost}}$$

Per le sostanze omogenee e pure, esiste anche un'altra classe di trasformazioni per le quali il calore scambiato dipende solo dallo stato iniziale e finale e non dalla particolare trasformazione, in altri termini il calore scambiato è una funzione di stato. Queste trasformazioni sono quelle a pressione costante.

Se la trasformazione è reversibile in modo che in ogni tratto infinitesimo della trasformazione la pressione sia sempre la stessa, si può scrivere:

$$dU = Q - W = Q - PdV$$

da cui possiamo ricavare il calore scambiato:

$$Q = dU + PdV = dU + \underbrace{d(PV)}_{\text{perché } P \text{ è costante}} = d(U + PV)$$

La quantità  $U + PV$ , dato che è la somma di una funzione di stato,  $U$ , e della quantità  $PV$  ottenuta moltiplicando due variabili di stato, è una funzione di stato. Essa si chiama "entalpia" e si indica con  $H$ . Ne segue che per trasformazioni a pressione costante, anche il calore scambiato  $Q$  è una funzione di stato ( $Q = H$ ) e pertanto  $dQ$  è un differenziale esatto ( $dQ = dH$ ).

Se viceversa la trasformazione è irreversibile, noi possiamo solo controllare che la pressione finale è uguale a quella iniziale perché la pressione negli stati intermedi non è definita. Poiché gli stati iniziali e finali sono comunque stati di equilibrio, è lecito supporre che la pressione esterna sia uguale alla pressione del sistema nello stato iniziale e in quello finale,  $P_{\text{est}} = P_{\text{sist,if}}$ .

Essendo per ipotesi la trasformazione irreversibile, il lavoro andrà calcolato utilizzando le coordinate termodinamiche dell'ambiente esterno  $W_{\text{if}} = P_{\text{est}}(V_f - V_i) = P_{\text{sist,if}}(V_f - V_i)$ . Il I principio della termodinamica applicato alla trasformazione si dà:

$$U = Q - W = Q - P_{\text{sist,if}} (V_f - V_i)$$

Risolvendo per il calore scambiato si ottiene:

$$Q = U + P_{\text{sist,if}} (V_f - V_i) = U_f - U_i + P_{\text{sist,f}} V_f - P_{\text{sist,i}} V_i = (U_f + P_{\text{sist,f}} V_f) - (U_i + P_{\text{sist,i}} V_i) = H_f - H_i = H$$

Da cui possiamo dedurre che il calore scambiato è lo stesso sia nella trasformazione reversibile che in quella irreversibile purché entrambe avvengano a pressione costante.

Per le trasformazioni a pressione costante il calore specifico a pressione costante e il calore molare a pressione costante diventano:

Calore specifico a pressione costante

Calore molare a pressione costante

$$c = \frac{1}{m} \frac{Q}{d\theta} = \frac{1}{m} \left. \frac{dH}{d\theta} \right|_{P=\text{cost}}$$

$$C_p = \frac{1}{n} \frac{Q}{d\theta} = \frac{1}{n} \left. \frac{dH}{d\theta} \right|_{P=\text{cost}}$$

Nel caso di corpi solidi o liquidi è molto facile eseguire trasformazioni a pressione costante, per esempio alla pressione atmosferica, e quindi è relativamente semplice determinare il calore molare a pressione costante. E' invece molto difficile determinare quello a volume costante, perché come abbiamo già osservato in precedenza, quando la temperatura dei corpi aumenta essi subiscono una dilatazione, quindi un aumento di volume che non è possibile impedire. Il calore molare a volume costante deve essere derivato da quello a pressione costante e dalla conoscenza del coefficiente di dilatazione volumetrica. Nel caso di sistemi gassosi invece, è facile sia eseguire delle trasformazioni a volume costante che a pressione costante e pertanto entrambi i calori molari possono essere determinati sperimentalmente.

Nel 1819 Dulong e Petit misero in evidenza il fatto che, alla temperatura ambiente, quasi tutte le sostanze solide hanno un calore molare molto vicino a 6 cal/mole °C: questo significa che per elevare la temperatura di tutto il sistema di una data quantità bisogna fornire a ciascuna molecola una quantità di calore che è approssimativamente la stessa per quasi tutte le sostanze ed è quindi indipendente dal tipo di molecola.

I calori molari variano con la temperatura: tendono a zero quando la temperatura tende a zero (assoluto) e al valore di Dulong e Petit, quando la temperatura tende all'infinito.

Se si riportano gli andamenti dei calori molari in funzione della temperatura per diverse sostanze si vede che gli

andamenti sono molto diversi tra loro.

Sulla base dell'osservazione precedente e cioè che i calori molari dipendono dal numero di molecole e non dal tipo di molecola, sarebbe stato più logico attendersi andamenti simili per tutte le sostanze.

In effetti si vede che è proprio così: se si riportano i calori molari anziché in funzione della temperatura, in funzione della variabile adimensionale  $\frac{C_p}{D}$  dove  $D$  è una temperatura caratteristica della sostanza, si osserva che tutte le sostanze seguono lo stesso andamento.  $D$  è detta temperatura di Debye che formulò questo modello.

### ***Equivalente meccanico del calore.***

Fu Joule a dimostrare sperimentalmente l'equivalenza tra calore e lavoro e ad effettuare le prime verifiche sperimentali del primo principio della termodinamica. Egli determinò infatti la corrispondenza tra le unità di misura del lavoro meccanico e le unità di misura del calore: l'equivalente meccanico del calore.

Egli utilizzò come sistema termodinamico esattamente lo stesso sistema che noi abbiamo utilizzato per introdurre il primo principio della termodinamica: una certa quantità di acqua mantenuta alla pressione atmosferica. Egli osservò che è possibile realizzare una trasformazione, cioè il passaggio da uno stato caratterizzato da una temperatura  $T_1$  ad uno stato caratterizzato da una temperatura  $T_2$ , maggiore di  $T_1$ , a pressione atmosferica o eseguendo dall'esterno soltanto lavoro adiabatico oppure scambiando soltanto del calore.

Il lavoro adiabatico sul sistema veniva effettuato mettendo in rotazione, mediante pesi che cadevano, un mulinello, oppure facendo strisciare, sempre mediante pesi che cadevano, dei corpi in contatto tra di loro: il lavoro fatto sul sistema veniva ricondotto così al lavoro fatto dalla forza peso durante la caduta dei corpi. Joule osservò che il lavoro adiabatico necessario per portare il sistema dallo stato 1 allo stato 2 era sempre lo stesso, indipendentemente dalla maniera in cui il lavoro veniva effettuato sul sistema.

La stessa variazione di stato poteva comunque essere ottenuta mettendo a contatto l'acqua con un corpo a temperatura più elevata, come per esempio la fiamma di un becco Bunsen. In questo secondo caso non si ha esecuzione di alcun lavoro, ma solo passaggio di calore dal corpo a temperatura più elevata all'acqua.

Segue da tutto questo che lo scambio di lavoro o di calore tra il sistema e l'ambiente circostante sono equivalenti per quanto concerne i cambiamenti di stato del sistema.

L'equivalenza tra lavoro e calore consente di utilizzare le stesse unità di misura del lavoro anche per misurare il calore. Prima però che Joule determinasse sperimentalmente l'equivalenza tra lavoro e calore, a questo era



assegnata una unità di misura, la caloria, e un metodo per la determinazione della quantità di calore scambiata<sup>(1)</sup>. Ricordiamo che la caloria era definita come la quantità di calore che deve essere scambiata tra l'ambiente circostante e un sistema costituito da una massa unitaria (1 g) di acqua per innalzare di un grado la temperatura del sistema<sup>(\*)</sup>. Con il suo esperimento Joule determinò il coefficiente di conversione tra l'unità di misura del calore, la *caloria*, C, e l'unità di misura del lavoro, ciò che noi attualmente indichiamo con joule. In definitiva egli determinò l'equivalente meccanico del calore. Egli trovò che:

$$1 \text{ caloria} = 4.155 \text{ J}$$

Misure più precise effettuate nel 1939 dal National Bureau of Standards (Usa) hanno portato alla seguente equivalenza:

$$1 \text{ caloria} = 4.1858 \text{ J}$$

Attualmente non è più necessario misurare il calore in calorie, nel S.I. esso infatti si misura in joule. Se però si ha a che fare con un sistema costituito da una certa quantità di acqua, l'uso della caloria, come unità di misura del calore, consente alcune semplificazioni. Per esempio la quantità di calore necessaria per portare 100 g di acqua dalla temperatura di 20 °C alla temperatura di 40 °C espressa in calorie è data da:

$$Q = mc = 100 \cdot 1 \cdot 20 = 2000 \text{ Calorie}$$

---

<sup>(1)</sup> I metodi di misura del calore saranno discussi più avanti.

<sup>(\*)</sup> Una definizione successiva più precisa fissò che la variazione di un grado doveva avvenire tra 14.5 e 15.5 °C: si osservò infatti che la quantità di calore necessaria per elevare un grammo di acqua di un grado non era indipendente dalla temperatura di partenza (vedi l'andamento del calore specifico dell'acqua in funzione della temperatura).

### **Serbatoio di calore o termostato.**

Abbiamo introdotto i termostati dicendo che sono dispositivi la cui temperatura rimane costante in qualsiasi situazione.

Dopo l'introduzione della capacità termica possiamo identificare meglio un termostato. Consideriamo un corpo di massa molto grande, meglio se infinita, alla temperatura  $T$ . Se cediamo una quantità finita di calore a tale corpo, la variazione della sua temperatura sarà trascurabile. La stessa cosa succederà se invece di essere ceduto, del calore viene assorbito dal corpo di massa molto grande. Un corpo siffatto rappresenta quindi un termostato o serbatoio di calore.

*Si definisce pertanto un serbatoio di calore come un corpo di massa talmente grande da poter assorbire o fornire quantità di calore illimitate senza che la sua temperatura o le altre coordinate termodinamiche varino apprezzabilmente.*

Se un sistema compie una trasformazione quasi statica mentre si trova a contatto con un serbatoio di calore, la trasformazione sarà isoterma.

Allora per descrivere un flusso di calore quasi statico che implichi una variazione di temperatura, si deve pensare di porre il sistema a contatto con una serie di serbatoi di calore in successione. Un meccanismo di questo tipo è sottinteso quando noi valutiamo la quantità di calore scambiata nella trasformazione mediante la relazione:

$$Q = \int_1^2 m c dT \quad (\text{se } c = \text{cost} \quad Q = mc \Delta T)$$

### **Conduzione del calore.**

Consideriamo due serbatoi di calore, il primo a temperatura  $T_1$ , il secondo temperatura  $T_2$  più bassa di  $T_1$ .

Indichiamo con  $\Delta T$  la differenza di temperatura. Supponiamo inoltre che tra i due termostati sia interposto uno strato di materiale avente sezione  $A$  e spessore  $L$ . Attraverso questo materiale si stabilisce un flusso di calore dal serbatoio a temperatura più elevata verso quello a temperatura più bassa.

La potenza trasmessa attraverso lo strato di materiale, ossia il calore che fluisce nello strato nell'unità di tempo, è tanto più grande quanto più grande è la sezione  $A$  dello strato, quanto più piccolo è il suo spessore  $L$ , quanto più

grande è la differenza di temperatura tra i due serbatoi, e infine dipende dalle caratteristiche del materiale interposto. In definitiva:

$$P = \frac{Q}{t} = kA \frac{\Delta T}{x}$$

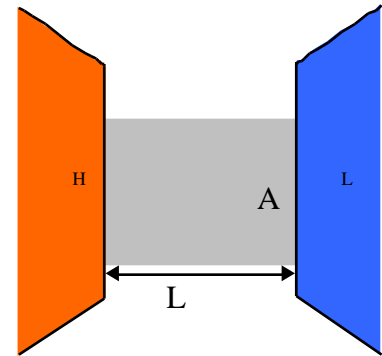
dove  $k$  è il coefficiente di conducibilità termica ed è caratteristico del materiale interposto.

### **Convezione**

Anche in questo caso è necessario che ci sia del materiale interposto, in particolare un fluido fra le due sorgenti perché ci sia trasferimento di calore.

Questo meccanismo è quello utilizzato dai termosifoni per riscaldare un ambiente. Esso si manifesta anche quando si riscalda una pentola di acqua, per portarla alla ebollizione, utilizzando una fiamma. Le parti di fluido più vicine alla sorgente calda assorbono calore dalla sorgente calda, aumentano così la loro temperatura, per questo si dilatano e quindi diventano più leggeri del resto del fluido.

La differenza di densità tra le parti di fluido più calde e quelle più fredde fa sì che le parti di fluido più calde risentono di una spinta di Archimede superiore al loro peso che tende a spostarle verso l'alto. Il posto liberato dalle parti di fluido più caldo a causa di questo meccanismo, vengono occupate da fluido più freddo. Queste a loro volta, trovandosi vicine alla sorgente calda si riscaldano, si espandono e tendono a muoversi verso l'alto. Si viene a stabilire un moto, che viene chiamato convettivo, attraverso il quale le parti di fluido più calde vengono continuamente sostituite da parti di fluido più fredde. Le parti di fluido riscaldate dalla sorgente di calore allontanandosi da essa trasportano il calore verso la sorgente fredda e quindi trasportano il calore dalla sorgente più calda a quella più fredda.



### **Irraggiamento**

Questo meccanismo di trasferimento di calore non richiede la presenza di un mezzo materiale tra le due sorgenti, come discusso nei paragrafi precedenti, ma il calore può propagarsi anche attraverso lo spazio vuoto.

Il calore in questo caso viene trasferito tra la sorgente calda e quella fredda sotto forma di onde elettromagnetiche, sia nell'ottico, luce vera e propria, ma anche come raggi infrarossi. È il meccanismo con cui il sole riscalda la terra. Esso è particolarmente efficace quando la temperatura della sorgente calda è grande, infatti la potenza emessa, il calore emesso nell'unità di tempo, dipende dalla temperatura alla quarta potenza:

$$P = \epsilon A T^4$$

in cui  $\epsilon$  vale  $5.6 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4}$  ed è la costante di Stefan-Boltzmann,  $\epsilon$  è il potere emissivo della sorgente ed è un numero compreso tra 0 e 1 che dipende dalla natura della sorgente,  $A$  è l'area della superficie che emette la radiazione e  $T$  la sua temperatura. Il potere emissivo  $\epsilon$  assume il valore limite 1 nel caso in cui la superficie emittente è assimilabile ad un corpo nero.

Si osservi infine che se una superficie irradia calore con grande efficienza, essa è altrettanto efficiente nell'assorbire radiazione:

$$P_{\text{ass}} = \epsilon A T_{\text{amb}}^4$$

in cui l'unica differenza con l'espressione dell'emissione sta nel fatto che l'assorbimento dipende dalla temperatura della radiazione incidente sulla superficie e, quindi, dalla temperatura dell'ambiente.

L'evoluzione della sorgente dipende quindi dal bilancio tra l'energia emessa e quella assorbita.

## Gas perfetto.

Consideriamo una massa  $m$  di gas contenuta in un recipiente avente volume  $V$ .

La quantità di gas contenuta nel volume  $V$  può essere anche espressa in termini di moli.

Ricordiamo che una mole di una qualunque sostanza è quella quantità di sostanza contenente esattamente un numero di Avogadro  $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$  costituenti elementari. Per costituente elementare si deve intendere “atomo” se il mattone fondamentale della sostanza è l’atomo, per esempio nel caso dei metalli quali il rame Cu, ferro Fe, ecc, o dei gas nobili come elio He, neon Ne, argon Ar, ecc. Si deve invece intendere “molecola” il mattone fondamentale è la molecola, come per esempio nel caso dell’acqua  $H_2O$ , anidride carbonica  $CO_2$ , idrogeno  $H_2$ , ossigeno  $O_2$ , azoto  $N_2$ , ecc.

La massa di una mole di sostanza, la quantità di sostanza contenente esattamente un numero di Avogadro  $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$  costituenti elementari, è uguale a un numero di grammi pari al peso atomico o molecolare, a seconda dei casi.

La relazione tra la massa  $m$ , il numero di moli e il peso molecolare  $M$  è data da:

$$m = nM$$

Tornando alla massa  $m$  di gas contenuta nel volume  $V$ , si può determinare la densità del gas contenuto nel recipiente attraverso la relazione:

$$= \frac{m}{V}$$

Si è osservato che a densità sufficientemente basse, tutti i gas, indipendentemente dalla loro composizione chimica, hanno una equazione di stato molto semplice che collega tra loro i valori delle coordinate termodinamiche  $P, V, \dots$

$$PV = nR$$

in cui  $n$  è il numero di moli ed  $R$  è la costante universale dei gas.

$$R = 0.08205 \frac{\text{litri atm}}{\text{mole K}} = 8.314 \frac{\text{joule}}{\text{mole K}} = 1.986 \frac{\text{cal}}{\text{mole K}}$$

Si definisce *gas perfetto, o ideale, un gas che ha questo semplice comportamento in qualsiasi condizione* ( quindi anche per valori elevati della densità).

Questa equazione sintetizza alcune regole empiriche che erano state determinate studiando il comportamento dei gas quando si trovano a bassa densità.

- Legge di Boyle (1660): a temperatura costante, il volume del gas varia in proporzione inversa alla pressione. Quindi se un gas passa dallo stato di equilibrio caratterizzato dalle coordinate termodinamiche  $P_1, V_1, T_1$  allo stato caratterizzato dalle coordinate  $P_2, V_2, T_2$  vale la seguente relazione:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \quad (T_1 = T_2 = \text{cost, trasformazione isoterma})$$

- Legge di Charles, Gay-Lussac: Essi trovarono che a pressione costante, in particolare alla pressione atmosferica, il gas, come tantissimi altri sistemi termodinamici, subisce una dilatazione all'aumentare della temperatura. Indicando con  $t_C$  la temperatura espressa in gradi Celsius e con  $V_0$  il volume occupato dal gas alla pressione atmosferica,  $P_0$ , e alla temperatura di zero gradi Celsius ( $t_0$  di 273.15 K) essi trovarono che il volume varia con la temperatura  $t_C$  secondo la relazione:

$$V_1 = V_0 (1 + \alpha t_C)$$

in cui  $\alpha$  è il coefficiente di dilatazione volumetrica del gas.

Essi trovarono inoltre che, per i gas rarefatti, che quindi si comportavano come un gas ideale, il valore di  $\alpha$  era lo stesso per tutti i gas e pari a  $1/273.15$ .

Sostituendo questo valore nell'espressione precedente, e tenendo conto della relazione tra la temperatura del gas perfetto, espressa in kelvin, e quella in gradi Celsius, si ottiene:

$$V_1 = V_0 (1 + \alpha t_C) = V_0 \left( 1 + \frac{1}{273.15} t_C \right) = V_0 \frac{273.15 + t_C}{273.15} = V_0 \frac{T_1}{T_0}$$

in cui  $T_1$  è la temperatura finale in kelvin,  $T_0$  è la temperatura in kelvin corrispondente a zero gradi Celsius

(273.15 K). Da questa espressione si vede che il volume alla temperatura finale  $V_1$  è proporzionale alla temperatura  $T_1$ .

- 3) Legge di Avogadro: i gas, quando si comportano in maniera ideale, soddisfano anche alla legge di Avogadro: volumi uguali di gas nelle stesse condizioni di pressione e temperatura contengono lo stesso numero di molecole.

Determinazione dell'equazione di stato dei gas perfetti partendo dalle leggi di Boyle e Gay-Lussac.

Consideriamo una certa quantità di gas che alla temperatura di  $0^\circ\text{C}$  (corrispondente alla temperatura kelvin di 273.15 K) occupi un volume  $V_0$  alla pressione atmosferica  $P_0$ . Indichiamo con  $n$  il numero di moli. La legge di Avogadro ci dice che le  $n$  moli di gas occupano, nelle condizioni descritte, tutto lo stesso volume, ossia

$$V_0 = nV_{\text{om}}$$

dove  $V_{\text{om}}$  è il volume occupato da una mole di gas alla pressione atmosferica e alla temperatura di  $0^\circ\text{C}$ . Ogni mole di gas infatti, essendo formata da un identico numero di molecole,  $N_A$ , occupa, a parità di pressione e temperatura, sempre lo stesso volume.

Passando, a pressione costante alla temperatura  $T_1$ , il volume finale  $V_1$ , in base alla legge di Charles – Gay Lussac, sarà proporzionale alla temperatura finale, ossia:

$$V_1 = V_0 \frac{T_1}{T_0} = nV_{\text{om}} \frac{T_1}{T_0}$$

Passando infine a temperatura costante  $T_1$ , al volume finale  $V$  e alla pressione finale  $P$ , si avrà in base alla legge di Boyle:

$$PV = P_0 V_1 = P_0 V_0 \frac{T_1}{T_0} = n \frac{P_0 V_{\text{om}} T_1}{T_0}$$

La quantità  $\frac{P_0 V_{\text{om}}}{T_0}$  è una costante: infatti  $P_0$  è la pressione atmosferica,  $T_0$  è la temperatura in kelvin

corrispondente a zero gradi Celsius ( 273.15 K),  $V_{mo}$  il volume occupato da una mole di gas nelle condizioni appena specificate.

Ma la legge di Avogadro ci dice anche che il volume molare  $V_{mo}$ , cioè il volume occupato da una mole di gas alla pressione  $P_o$  e alla temperatura  $T_o$ , è lo stesso per tutti i gas ( $V_{mo} = 22.414$  litri per tutti i gas). La quantità

$$\frac{P_o V_{mo}}{T_o}$$

è dunque una costante ed è la stessa per tutti i gas.

Essa è cioè una costante *universale* che indicheremo con R: la costante universale dei gas.

Con tale posizione l'equazione di stato dei gas perfetti diventa:

$$PV = nR$$

La costante R ha un valore che dipende dalle unità di misura usate per la pressione, il volume e la temperatura:

$$R = \frac{P_o V_{om}}{T_o} = \frac{1 \text{ atm } 22.414 \text{ litri/mole}}{273.15 \text{ K}} = 0.08205 \frac{\text{litri atm}}{\text{mole K}} = 8.314 \frac{\text{joule}}{\text{mole K}} = 1.986 \frac{\text{cal}}{\text{mole K}}$$

### **Energia interna di un gas perfetto. Esperienza di Joule.**

Per cercare di capire la dipendenza dell'energia interna di un gas perfetto dalle sue coordinate termodinamiche rifacciamo idealmente l'esperienza di Joule e studiamo la trasformazione che va sotto il nome di *espansione libera*. Consideriamo un recipiente a pareti rigide, suddiviso in due parti da una strozzatura munita di un rubinetto.

Uno dei due scomparti è riempito con una certa quantità di gas, mentre l'altro è vuoto. Aprendo il rubinetto, il gas si espande fino ad occupare

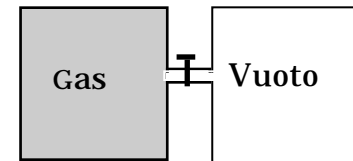


fig. A



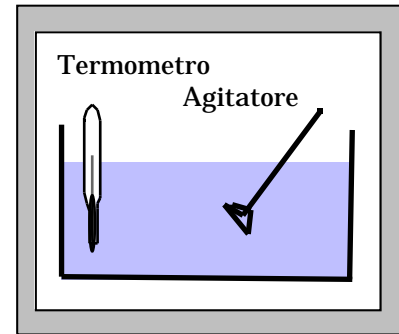
entrambi gli scomparti, cioè tutto il volume a disposizione. Questo tipo di trasformazione viene denominata espansione libera, proprio perché inizialmente la pressione nella seconda metà del recipiente è nulla. Si tratta di una trasformazione irreversibile in quanto sicuramente durante la trasformazione non è verificato l'equilibrio meccanico: all'inizio della trasformazione per esempio in una parte del volume occupata dal sistema la pressione è uguale alla pressione iniziale  $P_i$ , mentre nel secondo recipiente la pressione è nulla, quindi la pressione non è uniforme su tutto il volume a disposizione del sistema. Essendo una trasformazione irreversibile non si possono usare le coordinate termodinamiche del sistema per calcolare il lavoro. Si può osservare però che durante la trasformazione la pressione esterna rimane costante e quindi il lavoro compiuto dal sistema può essere determinato utilizzando la relazione

$$W = P_e \cdot V$$

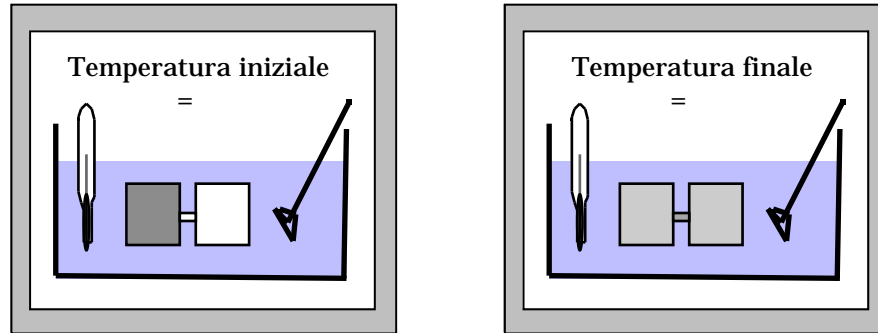
Inoltre, essendo il recipiente a pareti rigide, durante la trasformazione non si ha alcuna variazione del volume su cui agisce la pressione esterna  $P_e$ , e, pertanto, il lavoro effettuato durante la trasformazione è nullo. Per valutare il calore scambiato durante la trasformazione si può usare un calorimetro.

Questo strumento normalmente è costituito da un recipiente che contiene un liquido, per esempio dell'acqua, isolato termicamente dall'ambiente circostante. Un termometro consente di misurare la temperatura del liquido e un agitatore consente di rendere più rapidamente uniforme la temperatura all'interno del liquido. Indichiamo con  $C$  la capacità termica a pressione costante del liquido, del recipiente, del termometro e dell'agitatore. Se a causa di una trasformazione la temperatura del calorimetro varia di  $\Delta T$ , allora la quantità di calore scambiata con il calorimetro è data da:

$$Q = C \Delta T$$



Joule effettuò l'espansione libera di un gas tenendo il recipiente dell'espansione libera all'interno del liquido del calorimetro, come mostrato in fig., e confrontò la temperatura del calorimetro prima e dopo l'espansione.



Egli trovò che la temperatura finale del calorimetro era uguale a quella iniziale.  
Da questo egli dedusse che:

- Il calore  $Q$  scambiato dal gas con il calorimetro durante l'espansione libera era uguale a zero: infatti poiché  $\Delta T = 0$ ,  $Q = C \Delta T = 0$ .
- La temperatura finale del gas era uguale alla temperatura iniziale (nello stato finale il gas è in equilibrio termico con il calorimetro così come lo era all'inizio dell'espansione).

C'è comunque da osservare che l'apparato sperimentale usato da Joule non era particolarmente sensibile in quanto la capacità termica del calorimetro a liquido è molto maggiore di quella del gas in esame (la capacità termica di un sistema è proporzionale alla sua massa) e quindi una piccola variazione di temperatura nel gas provocherà una variazione ancora più piccola nel calorimetro (se si tiene conto che i rapporti di densità tra un liquido ed un gas sono dell'ordine di 1000, questo è anche l'ordine di grandezza che ci si deve aspettare per il rapporto tra le variazioni di temperatura del gas e del calorimetro).

L'esperienza è stata ripetuta diverse volte ed in condizioni sperimentali più favorevoli: si è trovato che effettivamente esiste una variazione di temperatura a seguito di una espansione libera, ma la differenza tra la temperatura finale e quella iniziale è tanto più piccola quanto più il gas usato è vicino alle condizioni di gas perfetto. Questa conclusione inoltre vale anche se si cambiano le dimensioni dei due scomparti (quello pieno di gas e quello vuoto).

Possiamo dunque considerare per il gas perfetto  $Q$  e  $W$  nulli. Dal primo principio della termodinamica si ha che

anche la variazione di energia interna è nulla:

$$U = 0 \quad \text{e quindi} \quad U_f = U_i$$

*Questo risultato consente di affermare che per il gas perfetto l'energia interna è funzione della sola temperatura.*

Infatti lo stato di un sistema costituito da  $n$  moli di gas perfetto può essere individuato specificando solo due coordinate termodinamiche, per esempio  $V$  e  $T$ : l'altra, la pressione  $P$ , è fissata dall'equazione di stato. L'energia interna, che è una funzione di stato, può dunque essere espressa come una funzione del volume  $V$  e della temperatura  $T$ , cioè  $U(V, T)$ . Poiché durante l'espansione libera il volume del gas è variato da  $V_i$  a  $V_f$  mentre la temperatura dello stato finale è la stessa di quella dello stato di partenza, allora, dato che neppure l'energia interna è variata durante l'espansione, possiamo scrivere:

$$U(V_f, T) = U(V_i, T)$$

e questa relazione deve valere per qualunque valore di  $V_i$  e  $V_f$ .

Questo è possibile solo se la funzione  $U$  non dipende dal volume occupato dal gas e cioè se essa è funzione soltanto della temperatura:

$$U = U(T)$$

Scegliendo come variabili indipendenti la pressione e la temperatura è possibile dimostrare con un ragionamento analogo al precedente che l'energia interna non dipende neppure da  $P$ .

In conclusione la funzione energia interna di un gas perfetto dipende soltanto dalla temperatura.

### **Calori specifici di un gas perfetto. Relazione di Mayer.**

Abbiamo fatto vedere che i calori molari a volume e pressione costante di sistema termodinamico descritto dalle variabili di stato  $P, V$  e  $T$ , sono dati rispettivamente da:

$$C_v = \left. \frac{1}{n} \frac{dU}{d} \right|_v \quad C_p = \left. \frac{1}{n} \frac{dH}{d} \right|_p \quad \text{dove } H = U + PV$$

Per un gas perfetto  $PV = nR$ , pertanto

$$H(\ ) = U(\ ) + nR \quad C_p = \left. \frac{1}{n} \frac{dH}{d} \right|_p = \left. \frac{1}{n} \frac{d(U(\ ) + nR)}{d} \right|_p = \frac{1}{n} \underbrace{\left. \frac{d(U(\ ))}{d} \right|_p}_{\substack{\text{Dato che } U \text{ non dipende da } P \\ \text{fare la derivata rispetto a} \\ \text{a pressione costante o a volume} \\ \text{costante è la stessa cosa} \\ = C_v}} + R = C_v + R$$

dove è stato fatto uso della proprietà che l'energia interna di un gas perfetto è funzione solo della temperatura e pertanto

$$\left. \frac{dU}{d} \right|_v = \left. \frac{dU}{d} \right|_p$$

Si ricava pertanto che il calore molare di un gas perfetto a pressione costante è sempre più grande del calore molare a volume costante di una quantità pari alla costante universale dei gas.

$$C_p = C_v + R$$

Questa relazione va sotto il nome di relazione di Mayer.

Sperimentalmente si trova che per i gas monoatomici, essenzialmente per i gas nobili (elio, neon, argon, kripton, etc.)

$$C_V = \frac{3}{2} R \quad C_P = \frac{5}{2} R$$

Il rapporto tra il calore molare a pressione costante e quello a volume costante si indica con  $\gamma$  e per un gas monoatomico vale:

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = \frac{5}{3} = 1.6$$

Per i gas biatomici ( $O_2$ ,  $N_2$ ,  $CO$ ,  $NO$ ) invece si trova

$$C_V = \frac{5}{2} R \quad C_P = \frac{7}{2} R$$

e quindi  $\gamma = 1.40$ .

Per i gas triatomici ( $CO_2$ ,  $N_2O$ ) si trova  $\gamma = 1.3$ .

***Energia interna di un gas perfetto. Teorema dell'equipartizione dell'energia.***

Un semplice modello per interpretare i valori misurati dei calori molari per i gas monoatomici e biatomici, consiste nel considerare un gas perfetto costituito da molecole identiche. Le forze tra le molecole sono nulle quando esse sono distanti e invece sono impulsive nel caso che ci sia qualche urto tra di esse.

L'ipotesi di considerare nulle le forze di interazione tra le molecole quando esse sono distanti, significa che il gas non può immagazzinare energia sotto forma di energia potenziale delle forze di interazione. Di conseguenza l'energia interna di un gas perfetto può essere solo cinetica:

$$U = \sum_{i=1}^N K_i = N \underbrace{\langle K \rangle}_{\text{energia cinetica media}} = N \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = N \frac{1}{2} m \underbrace{\langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle}_{v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = N \frac{1}{2} m \underbrace{\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle}_{\substack{\text{è la somma dei valori medi} \\ \text{lungo i tre assi, che peraltro sono} \\ \text{uguali.}}} = N \frac{3}{2} m \langle v_x^2 \rangle$$

dove N è il numero di molecole contenute nel gas, m è la massa di ciascuna molecola,  $\langle v^2 \rangle$  è la velocità quadratica media (la velocità al quadrato media),  $\langle v_x^2 \rangle$  la velocità quadratica media lungo l'asse x (per ragioni di simmetria, dato che le molecole si muovono completamente a caso e non esistono direzioni privilegiate, le velocità quadratiche medie lungo i tre assi sono uguali:  $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$ ).

Possiamo interpretare l'ultima espressione dicendo che un gas monoatomico ha tre gradi di libertà e la sua energia interna sarà la somma dell'energia cinetica relativa a ciascun grado di libertà<sup>4</sup>.

$$U = \sum_{i=1}^N K_i = N \underbrace{\langle K \rangle}_{\text{energia cinetica media}} = N \frac{1}{2} m \underbrace{\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle}_{\substack{\text{è la somma dei valori medi} \\ \text{lungo i tre assi, che peraltro sono} \\ \text{uguali.}}} = N (\langle K_x \rangle + \langle K_y \rangle + \langle K_z \rangle)$$

Il teorema dell'equipartizione dell'energia (che si dimostra in meccanica statistica), mostra che l'energia cinetica media delle molecole relativa a ciascun grado di libertà è proporzionale alla temperatura a cui si trova il gas.

$$\langle K_x \rangle = \frac{1}{2} m \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2} k \quad \begin{array}{l} k \text{ costante di Boltzmann} \\ N_A k = R \end{array}$$

in cui k è la costante di Boltzmann che è legata alla costante universale dei gas dalla relazione dal fatto che il prodotto del numero di Avogadro per la costante di Boltzmann è uguale alla costante universale dei gas  $R = N_A k$ .

---

<sup>4</sup> Con questo non si deve intendere che l'energia cinetica è una grandezza vettoriale, ma semplicemente che essa è composta di tre contributi, ciascuno relativo al moto lungo ciascuno dei tre assi x, y e z.

Risulta quindi che:

$$U = \sum_{i=1}^N K_i = N \underbrace{\langle K \rangle}_{\substack{\text{energia} \\ \text{cinetica} \\ \text{media}}} = N (\langle K_x \rangle + \langle K_y \rangle + \langle K_z \rangle) = N \left( \frac{1}{2} k + \frac{1}{2} k + \frac{1}{2} k \right) = \frac{3}{2} N k = \frac{3}{2} n N_A k = \frac{3}{2} n R$$

Se calcoliamo, utilizzando l'espressione ottenuta, i calori molari si ha:

$$C_V = \frac{dU}{d} = \frac{d\left(\frac{3}{2} R\right)}{d} = \frac{3}{2} R \quad C_P = C_V + R = \frac{3}{2} R + R = \frac{5}{2} R$$

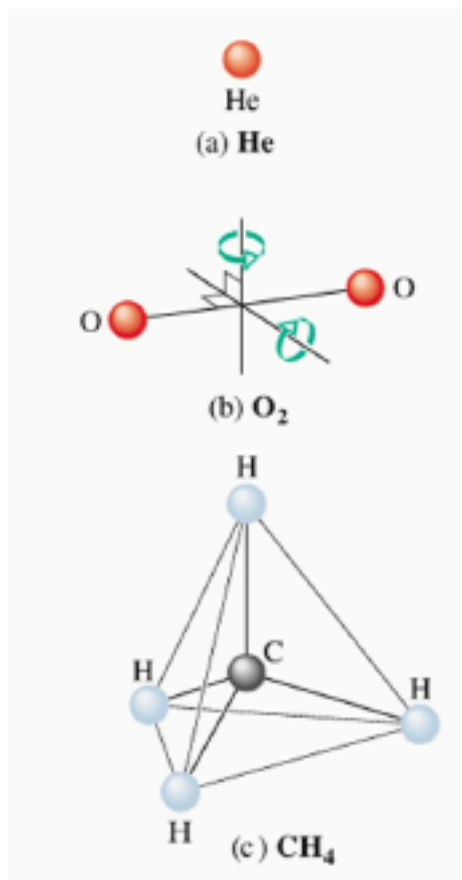
$$= \frac{C_P}{C_V} = \frac{5}{3} = 1.66$$

che corrisponde perfettamente con i valori sperimentali dei calori molari e del rapporto dei gas monoatomici, come i gas nobili (argon, elio, neon, etc.) hanno una struttura simile a quella utilizzata nel modello.

Le molecole biatomiche o poliatomiche, al contrario di quelle monoatomiche, possono avere oltre a dei moti di traslazione anche dei moti di rotazione.

Prendiamo una molecola biatomica e consideriamo la retta che congiunge i nuclei dei due atomi. Siccome la distanza tra i due atomi è più grande delle dimensioni del nucleo atomico, il momento di inerzia della molecola rispetto a quest'asse è molto più piccolo del momento di inerzia calcolato rispetto ad un asse passante per il centro di massa della molecola e perpendicolare alla congiungente i centri degli atomi. Di conseguenza, l'energia cinetica immagazzinata nel moto di rotazione attorno all'asse che passa per i centri degli atomi è molto più piccola rispetto a quella relativa alla rotazione attorno ad un asse perpendicolare a questo.

In conclusione nel caso di un gas biatomico l'energia può essere immagazzinata come energia cinetica di traslazione (tre gradi di libertà, x, y e z) nonché nel moto di rotazione della molecola attorno a due assi perpendicolari tra loro e perpendicolari alla retta congiungente i centri dei due atomi (due gradi di libertà).



Bisogna inoltre osservare che, nel caso di gas biatomico, le molecole non sono rigide, ma i costituenti possono oscillare attorno alla distanza di equilibrio. Ulteriore energia potrà essere immagazzinata come energia del moto di oscillazione.

Possiamo immaginare la molecola come un oscillatore armonico. Sappiamo che l'energia dell'oscillatore è fatta da due termini: l'energia cinetica e l'energia potenziale. In media queste due energie devono essere uguali.

Se le molecole biatomiche oscillano vanno considerati altri due gradi di libertà.

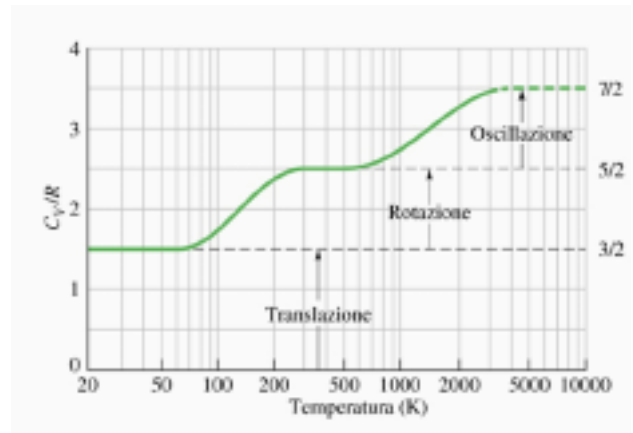
Complessivamente una molecola biatomica ha quindi 7 gradi di libertà (tre di traslazione, due di rotazione, due di oscillazione). Utilizzando il teorema dell'equipartizione dell'energia si ottiene:

$$U = \frac{7}{2} R T \quad C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{d\left(\frac{7}{2} R T\right)}{dT} = \frac{7}{2} R = \frac{9}{7} R = 1,28 R$$

Se confrontiamo con i risultati sperimentali ci accorgiamo che il nostro modello fallisce ad interpretare correttamente le misure sperimentali (  $C_{V, \text{teorico}} = 1,28 R$   $C_{V, \text{sperimentale}} = 1,40 R$  ).

Se però andiamo più nel dettaglio e studiamo l'andamento dei calori molari dei gas biatomici in funzione della temperatura si osserva che allo zero assoluto  $C_V$  è nullo, per basse temperature  $C_V$  vale  $(3/2)R$ , come per i gas perfetti monoatomici; quando la temperatura viene aumentata,  $C_V$  diventa  $(5/2)R$ , come se le molecole biatomiche potessero solo ruotare ma non vibrare, mentre quando la temperatura viene ancora aumentata,  $C_V$  diventa uguale a  $(7/2)R$  come previsto dalla teoria cinetica. Nella determinazione dei calori specifici delle molecole biatomiche solo a temperature molto elevate si ha accordo tra i valori sperimentali e quelli predetti dalla teoria cinetica (questa infatti vorrebbe che  $C_V$  fosse uguale a  $(7/2)R$  a tutte le temperature).

Si scopre così il limite della meccanica classica e la sua incapacità di descrivere il moto delle molecole. Il fatto che a basse temperature le molecole biatomiche si comportano come quelle monoatomiche vuol dire che esse a bassa temperatura non riescono ad immagazzinare energia nel moto di rotazione e in quello di vibrazione. Solo quando la temperatura aumenta, e quindi cresce l'energia cinetica media delle molecole si attiva la





possibilità di immagazzinare energia nel moto di rotazione ed in fine solo ad energia molto elevata si attiva la possibilità di immagazzinare energia nel moto di vibrazione. E' come se ci fossero delle soglie: quando l'energia supera la soglia allora dell'energia può essere immagazzinata nella rotazione e nel moto di oscillazione.

Non c'è nessun meccanismo classico con il quale si può impedire alle molecole biatomiche di ruotare o di vibrare a basse temperatura: la meccanica classica pretende anzi che l'energia si ripartisca in maniera uniforme tra tutti i gradi di libertà delle molecole sempre.

Abbiamo quindi raggiunto il limite della meccanica classica: il comportamento dei calori molari viene infatti correttamente interpretato dalla meccanica quantistica.

Qual è il succo del discorso: alle temperature ordinarie la gran parte dei gas biatomici può solo ruotare ma non oscillare, solo 5 gradi di libertà sono attivi. L' energia interna sarà data da:

$$U = \frac{5}{2} R \quad C_V = \frac{dU}{d} = \frac{d\left(\frac{5}{2} R\right)}{d} = \frac{5}{2} R = \frac{7}{5} = 1,40$$

$C_V$  sarà uguale a  $(5/2)R$ ,  $C_P = C_V + R = (7/2)R$ ,  $= C_P/C_V = (7/5) = 1.4$ .

Un gas poliatomico invece ha sempre i tre gradi di libertà del moto di traslazione, se gli atomi non sono allineati nella molecola, ha tre gradi di libertà del moto di rotazione ed avrà  $2\ell$  gradi di libertà relativi agli  $\ell$  possibili modi i oscillare della molecola. L'energia interna sarà allora data da:

$$U = \frac{1}{2} (3 + 3 + 2\ell)nR$$

Utilizzando queste nuove espressioni dell'energia interna possiamo tornare a calcolarci i calori molari a pressione e a volume costante ed il loro rapporto .

Se alle temperature ambiente, come nel caso delle molecole biatomiche, un gas poliatomico che ha solo la possibilità di ruotare non vibrare:

Invece per

$$U = \frac{1}{2} (3 + 3)nR = 3nR$$

$C_V$  sarà uguale a  $3R$ ,  $C_P = C_V + R = 4R$ ,  $\gamma = C_P/C_V = (4/3) = 1.33$ .

### **Calcolo della variazione di energia interna del gas perfetto.**

Consideriamo una trasformazione qualsiasi, quindi anche non reversibile, che porti un sistema costituito da una certa quantità di gas perfetto da uno stato iniziale  $i (V_i, P_i, T_i)$  ad uno stato finale  $f (V_f, P_f, T_f)$ . Vogliamo calcolare la variazione di energia interna prodotta dalla trasformazione.

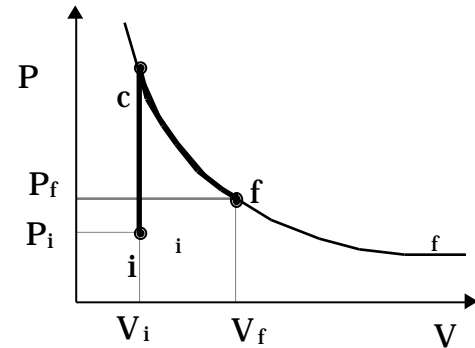
Poiché l'energia interna è una funzione di stato, si può effettuare il calcolo della variazione dell'energia interna, sostituendo la trasformazione originale con una trasformazione che porti il sistema dallo stesso stato iniziale  $i$  allo stesso stato finale  $f$  e che renda il calcolo più semplice.

Pertanto scegliamo una trasformazione reversibile costituita da una trasformazione a volume costante (isocora) che porti il gas perfetto dalla temperatura  $T_i$  alla temperatura  $T_f$ , seguita poi da una trasformazione isoterma che porti il sistema nello stato finale.

Indichiamo con  $c$  lo stato finale della trasformazione isocora e iniziale per la trasformazione isoterma. La variazione di energia interna tra lo stato iniziale  $i$  e lo stato finale  $f$ , è pari alla somma delle variazioni relative alle due trasformazioni  $i \rightarrow c$  e  $c \rightarrow f$ :

$$U_{if} = U_{ic} + U_{cf}$$

Poiché abbiamo mostrato che l'energia interna di un gas perfetto è funzione soltanto della temperatura, la variazione  $U_{cf}$  risulta nulla in quanto lungo l'isoterma la temperatura non varia:  $U_{cf} = 0$ . Lungo la



trasformazione ic, isocora, il lavoro compiuto dal sistema è nullo, perciò per il primo principio della termodinamica si ha:

$$U_{ic} = Q$$

Il calore  $Q$  è, per ipotesi, scambiato reversibilmente. Per effettuare la trasformazione ic, occorrono quindi infiniti serbatoi di calore ciascuno con una temperatura che differisce da quella del serbatoio precedente per un infinitesimo,  $d$ , e che verranno messi successivamente a contatto con il sistema in maniera da elevare reversibilmente la sua temperatura da  $T_i$  a  $T_f$ .

Il calore scambiato con ciascun serbatoio è pari a:

$$Q = nC_V d$$

In questa espressione è stato usato il calore molare a volume costante perché la trasformazione è isocora. Il calore totale, nella ipotesi che il calore molare a volume costante non dipenda dalla temperatura nell'intervallo di temperature considerato ed osservando che la temperatura dello stato intermedio  $c$  è uguale a quello dello stato finale  $f$ , è dato da:

$$Q = \int_{T_i}^{T_c} nC_V dT = nC_V [T]_i^c = nC_V (T_c - T_i) = nC_V (T_f - T_i)$$

Possiamo concludere che in una qualsiasi trasformazione subita da un sistema costituito da  $n$  moli di gas perfetto la variazione di energia interna è data da:

$$U_{if} = nC_V (T_f - T_i)$$

e, per una trasformazione infinitesima, da:

$$dU = nC_V dT$$

## **Trasformazioni adiabatiche reversibili di un gas perfetto. Equazione di Poisson.**

Consideriamo una trasformazione adiabatica reversibile di un gas perfetto. Vogliamo mostrare che per tale trasformazione vale la relazione:

$$PV = \text{costante}$$

Consideriamo un tratto infinitesimo di una trasformazione adiabatica reversibile. Per tale trasformazione il calore scambiato  $Q$  è nullo, e quindi la variazione di energia interna per il primo principio della termodinamica vale:

$$dU = Q - W = -W = -PdV \quad (1)$$

L'uso delle coordinate termodinamiche per il calcolo del lavoro è possibile dal momento che la trasformazione è, per ipotesi, reversibile.

Il primo membro della (1) vale:

$$dU = nC_v d$$

dal momento che  $U$  è solo funzione della temperatura. Il secondo si può calcolare utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti,  $PV = nR$  :

$$PdV = \frac{nR}{V} dV$$

Pertanto si ha:

$$nC_v d = -nR \frac{dV}{V} \quad \frac{C_v}{R} \frac{d}{V} = -\frac{dV}{V} \quad \frac{C_v}{C_p - C_v} \frac{d}{V} = -\frac{dV}{V} \quad \frac{1}{-1} \frac{d}{V} = -\frac{dV}{V}$$

Integrando ambo i membri tra lo stato iniziale e quello finale:

$$\int_i^f \frac{1}{-1} \frac{d}{V} = - \int_i^f \frac{dV}{V}$$

Se  $\gamma$  è costante si ottiene:

$$\frac{1}{-1} [\ln V]_i^f = -[\ln V]_i^f \quad \frac{1}{-1} \ln \frac{V_f}{V_i} = -\ln \frac{V_f}{V_i} \quad \ln \frac{V_f}{V_i}^{-1} = \ln \frac{V_i}{V_f}$$

$$\frac{V_f}{V_i}^{-1} = \frac{V_i}{V_f} \quad V_f \frac{1}{V_f^{-1}} = V_i \frac{1}{V_i^{-1}} \quad V \frac{1}{V^{-1}} = V_o \frac{1}{V_o^{-1}} = \text{cost}$$

Elevando a (-1) si ottiene:

$$V^{-1} = V_o^{-1} \quad V_o = \text{cost'}$$

Usando l'equazione di stato si ottiene:

$$V^{-1} \frac{PV}{nR} = V_o^{-1} \frac{P_o V_o}{nR} = \text{cost'} \quad PV = p_o V_o = \text{cost''}$$

Questa relazione è nota come equazione di Poisson ed è valida per qualunque stato iniziale purché la trasformazione adiabatica sia quasi statica. Si noti che l'espansione libera, pur essendo una trasformazione adiabatica, non essendo quasi statica non obbedisce all'equazione di Poisson.

Consideriamo ora il problema di disegnare nel piano PV una trasformazione adiabatica reversibile.

Sappiamo che una trasformazione isocora è una trasformazione rappresentata da una retta parallela all'asse delle pressioni, mentre una trasformazione isobara è rappresentata da una retta parallela all'asse dei volumi.

Una trasformazione isoterma, soddisfa alla relazione  $PV = \text{cost}$ . Essa pertanto è rappresentata da una iperbole in cui gli assi P e V rappresentano gli asintoti.

Una trasformazione adiabatica è rappresentata dall'equazione  $PV^\gamma = \text{cost}$  ed anche per questa curva gli assi P e V rappresentano degli asintoti.

Supponiamo per esempio di voler tracciare l'isoterma e l'adiabatica passante per il punto di coordinate  $V_o$  e  $P_o$ .

L'equazione dell'isoterma e dell'adiabatica per  $V_0$ ,  $P_0$  sono date rispettivamente da:

$$PV = P_0 V_0 \quad PV^\gamma = P_0 V_0$$

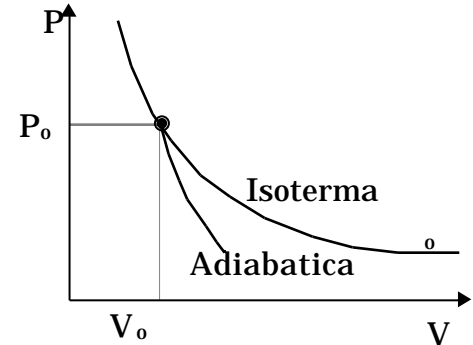
Esplicitando la pressione in funzione del volume otteniamo:

$$P = \frac{P_0 V_0}{V} \quad P = \frac{P_0 V_0}{V^\gamma}$$

Se ora calcoliamo la pendenza delle due curve nel punto  $V_0$ ,  $P_0$  si ottiene:

per l'isoterma 
$$\left. \frac{dP}{dV} \right|_{V_0} = P_0 V_0 \left. -\frac{1}{V^2} \right|_{V_0} = -\frac{P_0}{V_0}$$

per l'adiabatica 
$$\left. \frac{dP}{dV} \right|_{V_0} = P_0 V_0 \left. -\frac{\gamma}{V^{\gamma+1}} \right|_{V_0} = -\frac{\gamma P_0}{V_0}$$



Entrambe le pendenze sono negative. per quel che riguarda il loro valore assoluto si vede che l'adiabatica ha una pendenza maggiore essendo  $\gamma$  maggiore di 1. Quindi in ogni punto del piano PV l'adiabatica reversibile ha una pendenza maggiore, in valore assoluto, della isoterma.

## Studio di alcune trasformazioni del gas perfetto

### Trasformazioni isocore

Per trasformazione isocora si intende una trasformazione in cui il volume occupato dal sistema rimane costante durante la trasformazione.

Come appare dal diagramma a lato, la pressione finale  $P_2$  è maggiore di quella iniziale  $P_1$ . Durante la trasformazione anche la temperatura varia: indichiamo con

$T_1$  la temperatura dello stato iniziale e con  $T_2$  quella dello stato finale. Applicando l'equazione di stato sia allo stato iniziale che a quello finale si ottiene:

$$P_1 V_0 = nR T_1 \quad P_2 V_0 = nR T_2$$

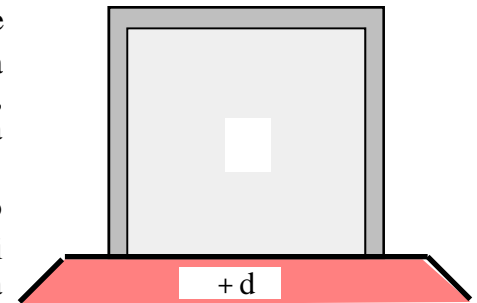
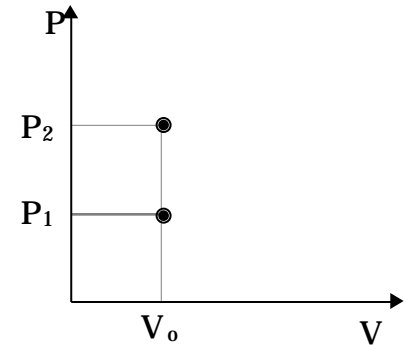
da cui si vede che la temperatura dello stato finale è maggiore di quella dello stato iniziale. Una trasformazione isocora consiste dunque nel far variare la temperatura del sistema da  $T_1$  a  $T_2$  mantenendo il volume costante.

Per effettuare una trasformazione isocora in maniera reversibile occorre disporre di infiniti termostati con temperatura compresa tra  $T_1$  e  $T_2$ , ciascuno con una temperatura che differisce da quella del termostato precedente per un infinitesimo, che vengono messi in successione a contatto termico con il sistema in maniera da portarlo dalla temperatura iniziale  $T_1$  a quella finale  $T_2$ .

Supponiamo che, giunti ad un certo punto delle operazioni, il gas sia in contatto termico con il serbatoio a temperatura  $T$  ed abbia raggiunto la condizione di equilibrio termico con questo serbatoio. A questo punto sostituiamo il serbatoio a temperatura  $T$  con quello a temperatura  $T + dT$ . A causa della differenza

infinitesima di temperatura  $dT$  tra il gas ed il serbatoio, una certa quantità calore viene scambiato dal gas con il serbatoio in maniera che la temperatura del gas aumenti di  $dT$ , il gas raggiunga così la condizione di equilibrio termico con il serbatoio a temperatura  $T + dT$ , ed il flusso di calore si interrompa. Il calore scambiato dal sistema con il serbatoio a temperatura  $T + dT$  è dato da:

$$Q = nC_V dT$$



dove  $C_V$  è il calore molare a volume costante ed  $n$  il numero di moli. Il calore scambiato lungo tutta la trasformazione si ottiene sommando il calore scambiato con gli infiniti serbatoi successivamente messi a contatto con il gas:

$$Q = \int_1^2 Q = \int_1^2 nC_V dT$$

Se  $C_V$  può essere considerato costante nell'intervallo di temperatura tra  $T_1$  e  $T_2$ , allora si ottiene:

$$Q = \int_1^2 nC_V dT = nC_V [T]_1^2 = nC_V (T_2 - T_1)$$

Naturalmente il lavoro  $W$  fatto dal sistema sull'ambiente circostante è nullo: infatti per ogni tratto infinitesimo di trasformazione si ha:

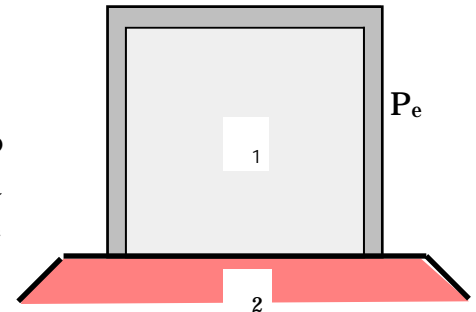
$$W = PdV \quad \text{ma} \quad dV = 0 \quad \text{per cui anche} \quad W=0$$

Ma se per ogni tratto infinitesimo  $dW$  è nullo, sarà anche nullo il lavoro effettuato su tutta la trasformazione, che infatti corrisponde alla somma di tutti i lavori infinitesimi effettuati.

La variazione di energia interna è data da:

$$U = Q - W \underset{(W=0)}{=} Q = nC_V (T_2 - T_1)$$

Se la trasformazione viene eseguita in maniera irreversibile, per esempio mettendo a contatto termico il gas a temperatura  $T_1$  con il serbatoio a temperatura  $T_2$ , la variazione di energia interna sarà la stessa di prima dato che gli stati iniziale e finale sono gli stessi:





$$U = nC_V( T_2 - T_1 )$$

Il lavoro effettuato dal sistema anche in questo caso è nullo, anche se in questo caso bisogna usare la pressione esterna per il calcolo del lavoro perché, essendo la trasformazione irreversibile, la pressione interna non è definita negli stati intermedi:

$$W = P_e \Delta V = 0$$

Risulta pertanto che anche il calore scambiato nella trasformazione è uguale a quello scambiato nella trasformazione reversibile:

$$U = Q \quad Q = nC_V( T_2 - T_1 )$$

D'altro lato avevamo già osservato che il calore scambiato in trasformazioni a volume costante è una funzione di stato, non dipende cioè da come viene effettuata la trasformazione a volume costante, per esempio se in maniera reversibile o irreversibile, ma solo dallo stato iniziale e da quello finale. E' chiaro che, quando il calore scambiato è una funzione di stato, conviene calcolarlo sulla trasformazione reversibile, dato che per questa trasformazione sappiamo come fare.

### **Trasformazioni isobare**

Per trasformazioni isobare si intendono trasformazioni in cui la pressione esterna è costante: se la trasformazione è reversibile anche la pressione del sistema sarà costante ed uguale alla pressione esterna, se invece la trasformazione non è reversibile e passa per stati di non equilibrio termodinamico allora la pressione dello stato finale è uguale alla pressione dello stato iniziale.

Come appare dal diagramma a lato, il volume finale  $V_f$  è maggiore di quello iniziale  $V_i$ . Durante la trasformazione anche la temperatura varia: indichiamo con  $T_i$  la temperatura dello stato iniziale e con  $T_f$  quella dello stato finale. Applicando l'equazione di stato sia allo stato iniziale che a quello finale si ottiene:

$$P_i = \frac{PV_i}{nR} \quad P_f = \frac{PV_f}{nR}$$

da cui si vede che la temperatura dello stato finale è maggiore di quella dello stato iniziale. Una trasformazione isobara consiste dunque nel far variare la temperatura del sistema da  $T_i$  a  $T_f$  mantenendo la pressione costante.

Per realizzare una trasformazione isobara reversibile è necessario disporre di infiniti serbatoi di calore con temperatura compresa tra la temperatura dello stato iniziale e quella dello stato finale: ogni termostato ha una temperatura che differisce di un infinitesimo  $dT$  dalla temperatura del termostato precedente.

Una volta che il gas ha raggiunto l'equilibrio termodinamico con il serbatoio a temperatura intermedia  $T$ , il termostato a temperatura  $T$  viene sostituito dal termostato a temperatura  $T + dT$ . A causa della differenza di temperatura (infinitesima) tra il serbatoio ed il gas, del calore sarà trasferito dal serbatoio al gas che subirà una leggera espansione ed un aumento della propria temperatura. Quando la temperatura del gas raggiungerà la temperatura  $T + dT$  il flusso di calore si interromperà non essendoci più alcuna differenza di temperatura.

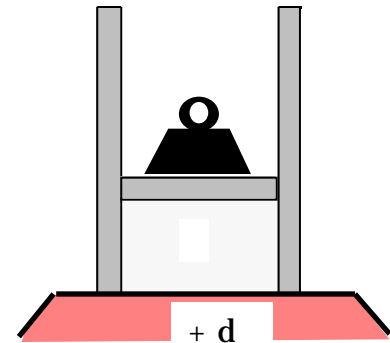
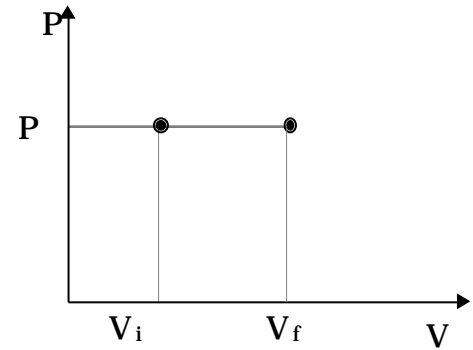
Il calore scambiato con il serbatoio a temperatura  $T + dT$  è dato dalla relazione:

$$Q = nC_p dT$$

E' stato usato il calore molare a pressione costante,  $C_p$ , perché la trasformazione infinitesima avviene a pressione costante.

A questo punto si sostituisce il termostato a temperatura  $T + dT$ , con il successivo e così via fino al raggiungimento della temperatura dello stato finale. Il calore complessivamente scambiato tra i serbatoi ed il sistema si ottiene sommando i calori infinitesimi scambiati con gli infiniti serbatoi utilizzati:

$$Q = \int_{T_i}^{T_f} nC_p dT = nC_p [T]_{T_i}^{T_f} = nC_p (T_f - T_i)$$



Come al solito si è fatta l'ipotesi che  $C_p$  è costante nell'intervallo di temperature tra  $T_i$  e  $T_f$ .

La variazione di energia interna  $\Delta U$  è data come al solito da:

$$\Delta U = nC_v(\Theta_f - \Theta_i)$$

Mentre il lavoro fatto dal sistema è dato da:

$$W = \int_i^f P dV = P \int_i^f dV = P[V]_i^f = P(V_f - V_i)$$

È possibile verificare che il primo principio della termodinamica è soddisfatto. Infatti

$$Q = \Delta U + W \quad Q = nC_p(\Theta_f - \Theta_i) = nC_v(\Theta_f - \Theta_i) + nR(\Theta_f - \Theta_i)$$

sulla base della relazione di Mayer. Inoltre utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti nello stato iniziale,  $PV_i = nRT_i$ , e finale  $PV_f = nRT_f$ , si ottiene:

$$Q = \Delta U + P(V_f - V_i) = \Delta U + W$$

Se la trasformazione fosse stata irreversibile, eventualmente caratterizzata da stati intermedi non di equilibrio come accade per esempio nel caso in cui il sistema viene messo direttamente a contatto con il serbatoio alla temperatura finale  $T_f$ , il lavoro effettuato dal sistema è lo stesso che nella trasformazione reversibile. In questo caso il lavoro va calcolato utilizzando la pressione esterna che è costante durante la trasformazione:

$$W = \int_i^f P_e dV = P_e \int_i^f dV = P_e [V]_i^f = P_e(V_f - V_i)$$

e poiché nello stato iniziale e finale la pressione esterna è uguale a quella del sistema, il lavoro così calcolato è uguale a quello effettuato durante la trasformazione reversibile.

D'altro lato anche la variazione di energia interna deve essere la stessa: l'energia interna è una funzione di stato e dipende solo dallo stato iniziale e da quello finale:

$$U = nC_v(\Theta_f - \Theta_i)$$

Ne deriva che anche il calore scambiato dal sistema è lo stesso trovato per la trasformazione reversibile, infatti abbiamo già mostrato che per trasformazioni a pressione costante il calore scambiato è una funzione di stato.

$$Q = U + P(V_f - V_i) = U_f - U_i + PV_f - PV_i = (U_f + PV_f) - (U_i + PV_i) = H_f - H_i = H$$

Il calore scambiato a pressione costante è uguale alla variazione della funzione entalpia  $H = U + PV$  che è una funzione di stato.

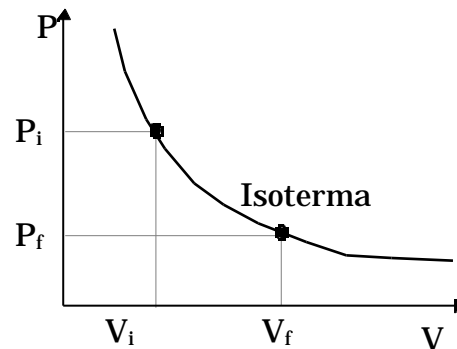
### **Trasformazione isoterma (reversibile)**

Una trasformazione isoterma è una trasformazione in cui la temperatura del sistema rimane costante durante la trasformazione stessa. Questo ci dice che una trasformazione isoterma è una trasformazione reversibile, se così non fosse non potendo conoscere il valore della temperatura negli stati intermedi, non potremmo stabilire se la temperatura del sistema è rimasta costante o meno.

Poiché la temperatura del gas perfetto non cambia durante la trasformazione, avendo già mostrato che l'energia interna di un gas perfetto è funzione soltanto della temperatura, la variazione di energia interna su una trasformazione isoterma è nulla:

$$U = 0$$

Dal primo principio della termodinamica segue che:



$$Q = W$$

Il lavoro  $W$  si può calcolare utilizzando le coordinate termodinamiche del sistema, poiché abbiamo osservato che la trasformazione isoterma è reversibile.

$$W = \int_i^f P dV \qquad \text{Utilizzando l'equazione di stato di un gas perfetto } PV=nR \qquad W = nR \int_i^f \frac{dV}{V}$$

dove  $T$  è la temperatura costante a cui avviene la trasformazione. La costante  $nR$  può essere portata fuori dal segno di integrale:

$$W = nR \int_i^f \frac{dV}{V} = nR [\ln V]_i^f = nR \ln \frac{V_f}{V_i}$$

Se il volume finale è maggiore di quello iniziale, espansione isoterma, il rapporto  $\frac{V_f}{V_i}$  è maggiore di uno ed il suo logaritmo è maggiore di zero: quindi il lavoro effettuato è positivo, ossia viene eseguito dal sistema e subito dall'ambiente circostante. Alla stessa maniera anche il calore scambiato è positivo, si tratta di calore assorbito dal sistema e ceduto dalla sorgente di calore a temperatura  $T$ . Se il volume finale è più piccolo di quello iniziale, allora il lavoro è negativo, viene subito dal sistema, così anche il calore è negativo, cioè viene ceduto dal sistema. Si noti che se si inverte il verso di percorrenza della trasformazione reversibile gli scambi energetici cambiano segno.

### **Trasformazione adiabatica reversibile**

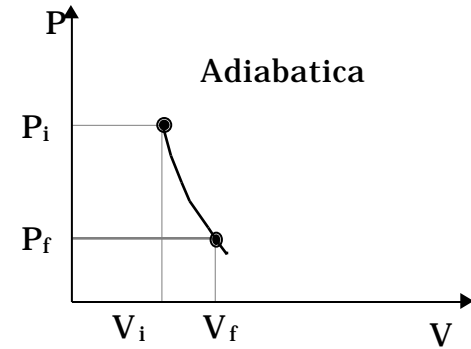
In una trasformazione adiabatica reversibile il calore scambiato tra il sistema e l'ambiente è nullo. Anche in questo caso la variazione di energia interna si può calcolare utilizzando la solita espressione:

$$U = nC_V(\Theta_f - \Theta_i)$$

Essendo il calore scambiato nullo, sulla base del primo principio della termodinamica il lavoro effettuato dal sistema sarà uguale all'opposto della variazione di energia interna:

$$U = Q - W \quad Q=0 \quad W = -U = -nC_V(\Theta_f - \Theta_i)$$

In maniera alternativa, il lavoro si può calcolare facendo l'integrale di PdV e tenendo conto che l'adiabatica reversibile può essere espressa mediante l'equazione di Poisson



$$PV = \text{cost} \quad \text{nel nostro caso} \quad PV = P_i V_i$$

$$W = \int_i^f PdV = \int_i^f P_i V_i \frac{dV}{V} = P_i V_i \int_i^f V^{-1} dV = P_i V_i \left[ \ln V \right]_i^f =$$

$$W = \frac{1}{1-\gamma} P_i V_i (V_f^{-\gamma+1} - V_i^{-\gamma+1}) = \frac{1}{1-\gamma} (P_f V_f V_f^{-\gamma+1} - P_i V_i V_i^{-\gamma+1}) = \frac{1}{1-\gamma} (P_f V_f - P_i V_i)$$

$$W = \frac{1}{1-\gamma} (nR \Theta_f - nR \Theta_i) = \frac{1}{1-\frac{C_p}{C_v}} nR(\Theta_f - \Theta_i) = \frac{C_v}{C_v - C_p} nR(\Theta_f - \Theta_i) = \frac{C_v}{-R} nR(\Theta_f - \Theta_i)$$

$$W = -nC_V(\Theta_f - \Theta_i)$$

## Macchine termiche

Il primo principio della termodinamica stabilisce l'equivalenza tra calore e lavoro. Questo risultato è importante perché apre una serie di prospettive in quanto, almeno in linea di principio, stabilisce la possibilità di progettare e realizzare delle macchine che siano in grado di trasformare l'energia interna di un serbatoio di calore in lavoro meccanico.

Senza il primo principio della termodinamica, l'unica possibilità di produrre movimento di qualche oggetto (lavoro meccanico) è quella di partire da qualcosa già in moto, da qualcosa cioè che possiede energia meccanica, cinetica e/o potenziale. Ad esempio si può sfruttare il vento, la caduta dell'acqua, la forza muscolare dell'uomo o degli animali. Con lo sviluppo della termodinamica si scopre che è possibile produrre lavoro meccanico assorbendo calore, che può essere ottenuto bruciando un combustibile (legna, carbone, uranio, etc).

Il primo principio della termodinamica non pone alcuna limitazione sulla quantità di calore che può essere trasformata in lavoro: in particolare non vieta il cosiddetto moto perpetuo di seconda specie (= funzionamento di una macchina termica che sfrutta l'energia interna di un solo serbatoio di calore).

Si potrebbe quindi pensare di estrarre calore da un serbatoio praticamente inesauribile come l'oceano e trasformarlo completamente in lavoro. Tuttavia si trova che non è possibile trasformare interamente in lavoro quantità di calore estratta continuamente da una sorgente a temperatura costante.

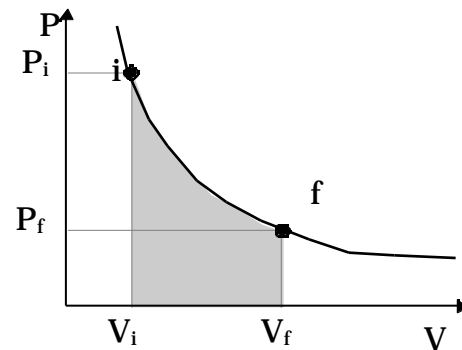
Il compito di realizzare con continuità la trasformazione di calore in lavoro è affidato alle macchine termiche.

Per trasformare calore in lavoro meccanico possiamo per esempio utilizzare una trasformazione isoterma di un gas perfetto. La variazione di energia interna in questa trasformazione è nulla: pertanto il calore assorbito dall'esterno è uguale al lavoro fatto sull'esterno:

$$U = 0 \quad Q = W$$

Tuttavia durante l'espansione, la pressione del gas si riduce: quando essa raggiunge la pressione esterna la trasformazione cessa e, di conseguenza, anche la trasformazione del calore in lavoro meccanico.

Con una singola trasformazione non siamo in grado di ottenere del lavoro meccanico in maniera continua. Per realizzare un dispositivo che produce lavoro meccanico con continuità occorrerebbe far ripercorrere la stessa trasformazione più volte, occorre quindi riportare il sistema nello stato di partenza, farlo lavorare cioè su un ciclo. Il dispositivo



meccanico che fa compiere al sistema il ciclo si chiama macchina termica.

Scopo di una macchina termica è quello di fornire continuamente lavoro meccanico all'esterno facendo percorrere al sistema più volte lo stesso ciclo.

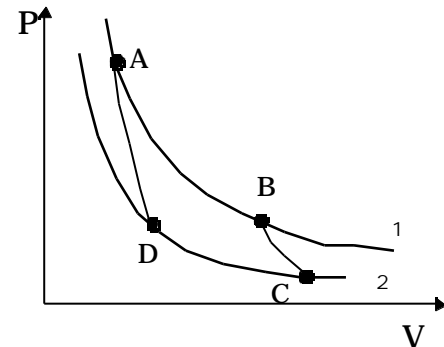
E' evidente che una macchina termica non può operare rimanendo sempre alla stessa temperatura. Se infatti cerchiamo di portare indietro il sistema ripercorrendo all'inverso la stessa isoterma, cioè mantenendo il sistema in contatto con lo stesso serbatoio di calore, ci accorgiamo che il lavoro fatto durante la seconda parte del ciclo è esattamente uguale ed opposto a quello fatto dal sistema durante l'espansione. Il lavoro complessivo compiuto dal sistema durante il ciclo è nullo. Per ottenere un lavoro netto positivo durante il ciclo dobbiamo far avvenire la compressione del gas ad una temperatura più bassa della temperatura dell'espansione. In questo modo l'aria racchiusa nel ciclo è diversa da zero, in particolare essa è positiva e quindi rappresenta un lavoro eseguito dalla macchina termica sull'esterno.

Possiamo concludere affermando che una macchina termica per poter produrre del lavoro sull'esterno deve operare almeno con due serbatoi di calore a due diverse temperature.

### **Ciclo di Carnot.**

Il ciclo più semplice che opera tra due serbatoi di calore a temperature diverse è il ciclo di Carnot.

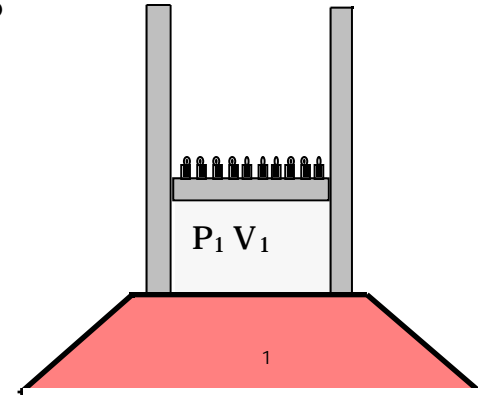
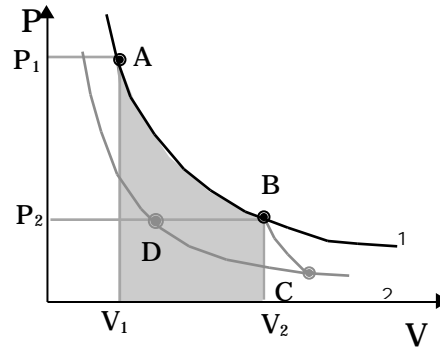
Questo è un ciclo realizzato con quattro trasformazioni reversibili, due isoterme e due adiabatiche. Un ciclo che deve operare tra due soli serbatoi a temperatura diversa ed essere reversibile deve necessariamente essere un ciclo di Carnot. (Le due isoterme sono perfettamente compatibili con i due serbatoi e l'ipotesi di reversibilità delle trasformazioni, l'eventuale problema riguarderebbe le trasformazioni adiabatiche che chiudono il ciclo. Supponiamo per assurdo che esse non siano adiabatiche: questo significa che c'è trasferimento di calore. Siccome queste due trasformazioni connettono stati a temperatura differente, per far avvenire uno scambio di calore in maniera reversibile lungo queste trasformazioni occorre utilizzare dei serbatoi di calore a temperatura intermedia tra le temperature delle due isoterme. Questo è contrario alla ipotesi che lo sorgenti di calore siano solo due: pertanto le due trasformazioni che collegano le isoterme devono avvenire senza scambio di calore, devono essere perciò delle adiabatiche).





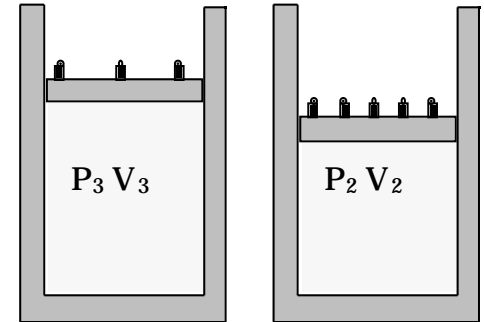
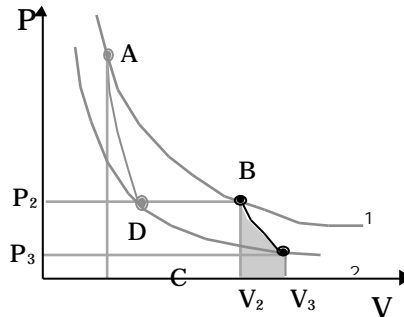
Supponiamo che la sostanza che descrive il ciclo sia un gas perfetto contenuto in un cilindro munito di pistone.

- Sia A il punto rappresentativo del sistema nello stato iniziale caratterizzato da un volume  $V_1$  e da una pressione  $P_1$ . Poniamo il cilindro a contatto termico con la sorgente a temperatura  $T_1$ , e facciamo espandere isotermicamente il gas fino a che la



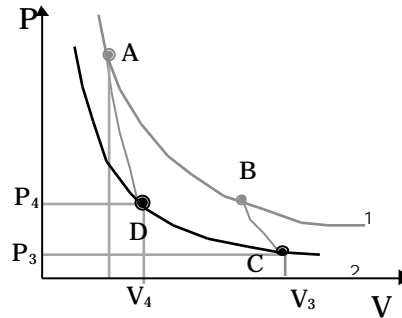
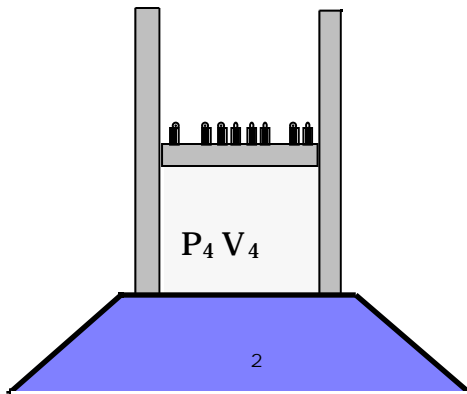
pressione si riduce al valore  $P_2$  e il volume diventa  $V_2$ . La scelta di questo punto sulla isoterma è arbitraria<sup>5</sup> ma determina l'evoluzione successiva del ciclo. Durante l'espansione, il sistema assorbe dal serbatoio di calore alla temperatura  $T_1$  la quantità di calore  $Q_1 (>0)$  e compie sull'esterno una equivalente quantità di lavoro  $W_1$  pari all'area racchiusa al di sotto dell'isoterma tra le ascisse  $V_1$  e  $V_2$ .

- Il cilindro viene isolato termicamente ed il gas viene fatto espandere adiabaticamente finché si porta alla temperatura  $T_2 < T_1$ . Il volume e la pressione corrispondenti siano  $V_3$  e  $P_3$ . Durante questa espansione adiabatica il sistema compie del lavoro sull'esterno.



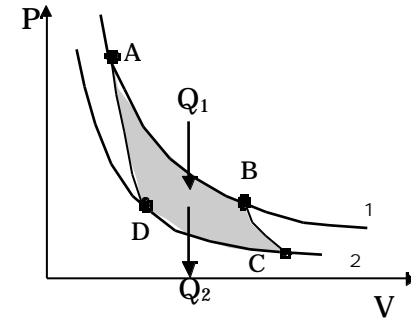
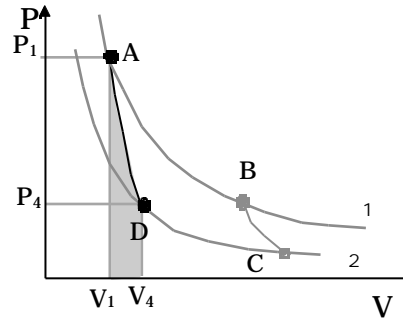
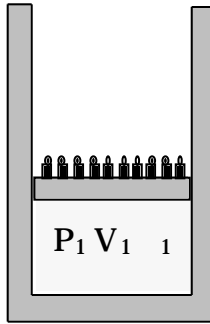
<sup>5</sup> Variando la posizione di questo punto sulla isoterma siamo in grado di variare l'area racchiusa dal ciclo, quindi il lavoro fatto dalla macchina di Carnot in un ciclo.

4. il cilindro viene messo in contatto con il serbatoio a temperatura  $T_2$  e compresso isotermicamente fino al punto D ( $P_4, V_4$ ) che giace sulla adiabatica passante per A. Durante questa fase il sistema cede al serbatoio una quantità di calore  $Q_2$  ( $<0$ ), mentre un lavoro pari a  $Q_2$  viene eseguito dall'esterno sul sistema.



- 4) il cilindro è isolato termicamente ed il gas viene compresso fino a riportarlo nelle condizioni iniziali. Durante la compressione del lavoro viene eseguito sul sistema.

Il lavoro netto compiuto dal sistema durante il ciclo è dato dall'area racchiusa tra le due isoterme e le due adiabatiche nel piano PV. Ripetendo il ciclo più volte si può ottenere una trasformazione continua di calore in lavoro meccanico. Ma è evidente che non tutto il calore  $Q_1$  assorbito dal serbatoio di calore a temperatura  $T_1$  è stato trasformato in lavoro, giacché una parte di esso,  $Q_2$ , è stato ceduto alla sorgente a temperatura  $T_2$ .



Utilizzando il primo principio della termodinamica per questo ciclo, si ottiene:

$$U = 0 = Q_{\text{tot}} - W$$

$$Q_{\text{tot}} = Q_1 + Q_2 = Q_1 - |Q_2| = W$$

Il rendimento di una macchina termica è definito come il rapporto tra il lavoro eseguito durante il ciclo ed il calore assorbito:

$$= \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} < 1$$

Il rendimento è sempre minore di 1, perché  $Q_2$  non può esser mai nullo.  $Q_2$  rappresenta la parte di calore assorbita durante un ciclo che non può essere trasformata in lavoro.

Una macchina termica che esegua un ciclo di Carnot viene detta macchina di Carnot. Per quanto abbiamo detto all'inizio una macchina termica che lavori su di un ciclo reversibile scambiando calore solo con due sorgenti a temperatura diversa è una macchina di Carnot, lavora cioè su di un ciclo di Carnot.

{macchina di Carnot } <macchina reversibile che lavora tra due soli serbatoi >

Il ciclo di Carnot può partire da qualunque punto, e poiché è reversibile può essere percorso al contrario. In tal caso la quantità di calore  $Q_2$  ( $>0$ ) è assorbita dalla sorgente a temperatura più bassa e la quantità di calore  $Q_1$  ( $<0$ ) è ceduta al serbatoio a temperatura più alta, mentre una certa quantità di lavoro è eseguito dall'esterno sul sistema.

Quando una macchina termica funziona in questo modo viene detta macchina refrigerante o frigorifero (un comune frigorifero, infatti, assorbe calore dalla cella frigorifero, a temperatura più bassa, e cede del calore all'ambiente, a temperatura più alta, assorbendo anche dell'energia elettrica dalla rete).

Si definisce coefficiente di prestazione di un frigorifero il rapporto:

$$= \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{|Q_1| - Q_2}$$

che è tanto maggiore quanto più grande è il calore sottratto alla sorgente a temperatura più bassa a parità di lavoro eseguito sul sistema. può, a seconda dei casi, essere maggiore, minore o uguale ad 1.

Noi abbiamo fatto riferimento ad un gas perfetto come sostanza che descrive il ciclo di Carnot. Le stesse considerazioni valgono comunque per qualunque altra sostanza che compie il ciclo. La forma del ciclo nel piano PV tra le temperature  $T_1$  e  $T_2$  varia a seconda dell'equazione di stato della sostanza che compie il ciclo.

### **Rendimento di un ciclo di Carnot descritto da un gas perfetto.**

Valutiamo il rendimento di una macchina di Carnot che utilizza il gas perfetto come sostanza che percorre il ciclo.

Indichiamo con  $T_1$  e  $T_2$  le temperature, misurate nella scala di temperatura del gas perfetto, dei due serbatoi tra cui lavora la macchina di Carnot. Il rendimento per definizione è:

$$= \frac{W}{Q_1}$$

Per valutare il rendimento dobbiamo calcolare il calore assorbito dalla sorgente a temperatura più elevata ed il lavoro complessivo eseguito nel ciclo. Per ottenere il lavoro complessivo effettuato nel ciclo occorre sommare algebricamente i lavori effettuati nelle singole trasformazioni.

a) espansione isoterma alla temperatura  $T_1$ .

Dato che l'energia interna di un gas ideale dipende solo dalla temperatura, per questa trasformazione risulta:

$$U = Q_1 - W_1 = 0 \quad Q_1 = W_1$$

$$Q_1 = W_1 = \int_i^f PdV = \int_i^f nR \frac{dV}{V} = nR \int_i^f \frac{dV}{V} = nR \ln V \Big|_i^f = nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

b) compressione isoterma alla temperatura  $T_2$ .

$$Q_2 = W_2 = \int_i^f PdV = \int_i^f nR \frac{dV}{V} = nR \int_i^f \frac{dV}{V} = nR \ln V \Big|_i^f = nR \ln \frac{V_4}{V_3}$$

Osserviamo infine che lungo le adiabatiche il calore scambiato tra il sistema e l'esterno è nullo, quindi la variazione di energia interna è uguale all'opposto del lavoro eseguito dal sistema. Siccome l'energia interna dipende solo dalla temperatura la variazione di energia interna lungo le due adiabatiche è uguale ed opposta e tale risulta anche il lavoro fatto dal sistema. Pertanto il lavoro complessivo eseguito dal sistema sulle due trasformazioni adiabatiche è nullo.

$$Q_{BC} = 0 \quad W_{BC} = - \int_B^C dU = - \int_1^2 nC_V dT = -nC_V(T_2 - T_1)$$

$$Q_{DA} = 0 \quad W_{DA} = - \int_D^A dU = - \int_2^1 nC_V dT = -nC_V(T_1 - T_2) = -W_{BC}$$

I quattro punti che delimitano il ciclo A,B,C,D si trovano su isoterme ed adiabatiche per cui varranno le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
 P_1 V_1 &= P_2 V_2 \\
 P_2 V_2 &= P_3 V_3 \\
 P_3 V_3 &= P_4 V_4 \\
 P_4 V_4 &= P_1 V_1
 \end{aligned}
 \qquad
 P_1 V_1 P_2 V_2 P_3 V_3 P_4 V_4 = P_2 V_2 P_3 V_3 P_4 V_4 P_1 V_1$$

da cui:

$$V_1 V_2 V_3 V_4 = V_2 V_3 V_4 V_1 \qquad V_2^{-1} V_4^{-1} = V_3^{-1} V_1^{-1} \qquad \frac{V_2^{-1}}{V_1^{-1}} = \frac{V_3^{-1}}{V_4^{-1}} \qquad \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

Pertanto:

$$= \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{nR \int_2 \ln \frac{V_4}{V_3}}{nR \int_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{2}{1}$$

Il rapporto tra i calori scambiati con i due serbatoi è uguale al rapporto delle temperature misurate nella scala di temperature del gas perfetto.

In conclusione il rendimento per un ciclo di Carnot descritto da un gas perfetto vale:

$$= \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{2}{1}$$

Esso cioè dipende solo dalle temperature, misurate con un termometro a gas ideale, dei due termostati tra cui il ciclo lavora.

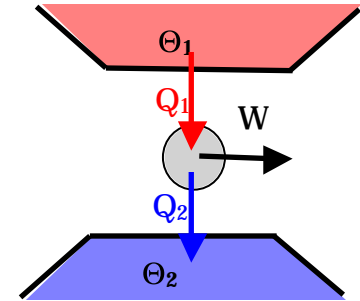
## **Il secondo principio della termodinamica.**

La termodinamica si occupa del funzionamento delle macchine termiche, che sono dispositivi, che lavorando su un ciclo, sono in grado di trasformare calore in lavoro meccanico con continuità

Le caratteristiche essenziali di queste macchine possono essere così riassunte:

- C'è una trasformazione o una serie di trasformazioni in cui viene assorbito calore da un serbatoio esterno a temperatura elevata ( $\Theta_1$ ).
- C'è una trasformazione o una serie di trasformazioni in cui viene ceduto del calore a un serbatoio a una temperatura inferiore ( $\Theta_2$ ).
- Come risultato complessivo si ha una produzione di lavoro verso l'esterno.

Queste caratteristiche sono rappresentate schematicamente dalla figura.



### **Enunciato di Kelvin-Planck**

***Non è possibile costruire una macchina capace di convertire completamente in lavoro tutto il calore assorbito da un solo serbatoio: una certa quantità di calore deve essere ceduta ad un serbatoio a temperatura più bassa.***

Questa affermazione costituisce l'enunciato del secondo principio della termodinamica secondo Kelvin-Planck: *è impossibile realizzare un processo il cui unico risultato sia quello di assorbire calore da un serbatoio e di convertirlo completamente in lavoro.*

Il secondo principio della termodinamica non vieta la trasformazione integrale del calore assorbito in lavoro (vedi per esempio il caso dell'espansione isoterma del gas perfetto), solo che la trasformazione in cui questo accade deve essere accompagnata da qualche modifica delle condizioni del sistema o dell'ambiente circostante. Infatti il gas dopo l'espansione isoterma rimane in una situazione che è completamente diversa da quella iniziale. In una trasformazione ciclica invece le condizioni iniziali vengono ripristinate: durante il ciclo però non tutto il calore assorbito viene convertito in lavoro, una parte di esso viene ceduto ad una sorgente a temperatura più bassa.

Il secondo principio della termodinamica implica che il rendimento di una macchina termica deve essere *sempre minore* di 1.

Se il secondo principio non fosse vero si potrebbe pensare di estrarre energia dall'oceano e trasformarlo in lavoro meccanico per esempio per far muovere una nave su di esso. Oppure si potrebbe pensare di estrarre energia interna dall'aria e far funzionare in questo modo una centrale elettrica. Sia l'oceano che l'atmosfera hanno una energia interna elevatissima. Nessuna delle due trasformazioni menzionate è contraria al primo principio della termodinamica; la loro realizzazione è vietata dal II principio della termodinamica, che pertanto non è contenuto

nel primo, ma si presenta come una legge di natura indipendente che contempla un aspetto dei fenomeni naturali non considerato dal primo principio.

Possiamo perciò chiamare moto perpetuo di prima specie quello realizzato da una macchina che crei l'energia di cui ha bisogno, violando in questo modo il primo principio della termodinamica. Si chiama invece moto perpetuo di seconda specie il moto realizzato da una macchina termica che scambia calore con un solo serbatoio di calore violando in questo modo il secondo principio della termodinamica.

La formulazione di Kelvin-Planck del secondo principio della termodinamica esclude dunque che possano esistere macchine termiche che trasformano in lavoro meccanico il calore estratto da un unico serbatoio di calore (macchine monoterme), del tipo cioè mostrato in figura.

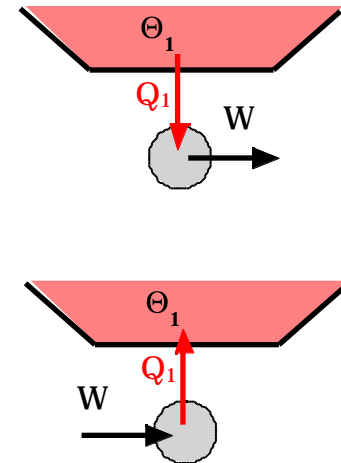
La formulazione di Kelvin-Planck del secondo principio della termodinamica non esclude invece che possano esistere macchine termiche che trasformino lavoro meccanico in calore trasferito ad un unico serbatoio di calore.

Si può concludere che nelle macchine monoterme il calore scambiato con l'unico serbatoio di calore deve essere minore (calore ceduto dal sistema all'ambiente esterno) o al massimo uguale a zero, devono cioè soddisfare alla seguente condizione:

$$Q_1 < 0 \quad \text{macchina monoterma}$$

Se la macchina è reversibile allora il calore scambiato dovrà essere uguale a zero.

$$Q_1 = 0 \quad \text{macchina monoterma reversibile}$$



### Enunciato di Clausius.

Questo enunciato è legato al funzionamento delle macchine termiche come frigorifero. Una macchina frigorifera è schematizzata in figura.

In una macchina frigorifera è possibile sottrarre calore ad un serbatoio a temperatura inferiore ( $\Theta_2$ ) e trasferirlo a un serbatoio a temperatura più alta ( $\Theta_1 > \Theta_2$ ) purché venga compiuto del lavoro dall'esterno. Nei frigoriferi

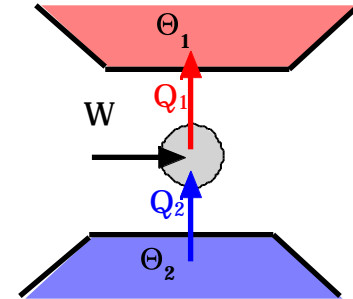


domestici questo lavoro viene compiuto dal motorino elettrico, ed il costo dell'energia consumata appare sulla bolletta dell'ENEL.

Sarebbe un grande vantaggio se i frigoriferi potessero funzionare senza bisogno di energia esterna ma l'esperienza mostra che ciò è impossibile. Questa osservazione è alla base dell'enunciato del secondo principio della termodinamica secondo Clausius, che afferma:

*non è possibile realizzare un processo il cui **unico** risultato sia quello di far passare del calore da un corpo più freddo ad uno più caldo.*

Se ci accorgiamo che del calore è passato da una sorgente fredda ad un'altra a temperatura maggiore, dobbiamo aspettarci che qualche altra cosa è stata modificata nel sistema o nell'ambiente circostante.

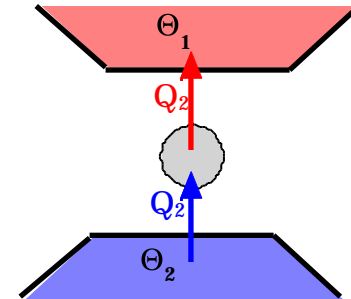
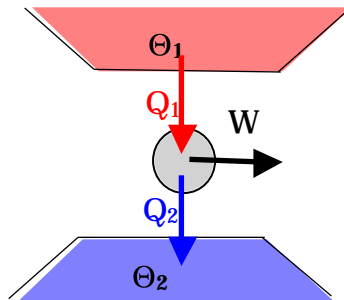


### Equivalenza degli enunciati di Kelvin-Planck e di Clausius.

Si può facilmente dimostrare che i due enunciati sono equivalenti, facendo vedere che se uno dei due enunciati viene violato, lo stesso accade per l'altro e viceversa.

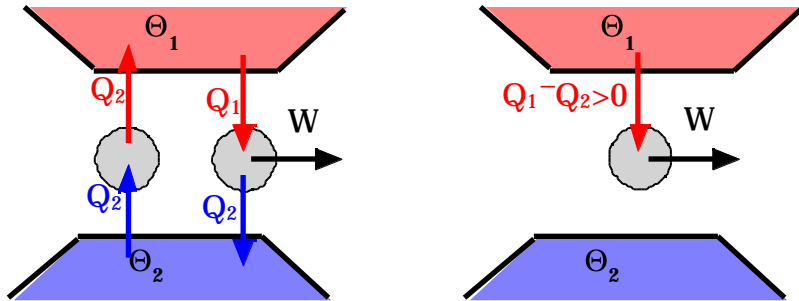
- Supponiamo che per esempio sia violato l'enunciato di Clausius: supponiamo cioè che sia possibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia quello di trasferire una certa quantità di calore,  $Q_2$ , da una sorgente più fredda, a temperatura  $\Theta_2$ , ad una sorgente più calda, a temperatura  $\Theta_1$  maggiore di  $\Theta_2$ . Questa trasformazione quindi lascia il sistema e l'ambiente circostante completamente inalterati e non richiede

l'esecuzione di alcun lavoro esterno. Possiamo far vedere che in questo caso è violato anche l'enunciato di Kelvin-Planck.



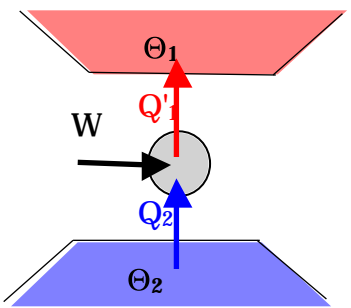
Infatti possiamo costruire una macchina termica che operi tra le stesse sorgenti a temperatura  $\Theta_1$  e  $\Theta_2$ , e che assorba il calore  $Q_1$  dalla sorgente a temperatura  $\Theta_1$ , ceda il calore  $Q_2$  alla sorgente a temperatura  $\Theta_2$  (esattamente la stessa quantità di calore trasferita tra i due serbatoi dal

frigorifero perfetto) ed esegua il lavoro  $W = Q_1 - Q_2$  sull'ambiente circostante. Se consideriamo il dispositivo ottenuto accoppiando la macchina termica al frigorifero perfetto, questo corrisponde ad una macchina termica che sottrae il calore  $Q_1 - Q_2$  alla sorgente a temperatura  $\Theta_1$  e lo trasforma completamente in lavoro, senza causare altre modifiche nel sistema o nell'ambiente circostante.

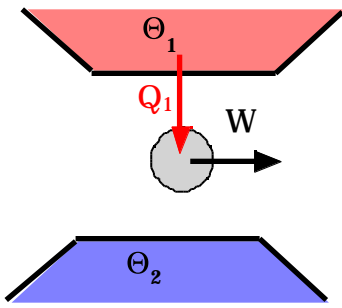


Questa macchina quindi viola l'enunciato del secondo principio della termodinamica secondo Kelvin-Planck.

- Supponiamo ora che l'enunciato di Kelvin-Planck sia violato e mostriamo che è violato anche quello di Clausius.

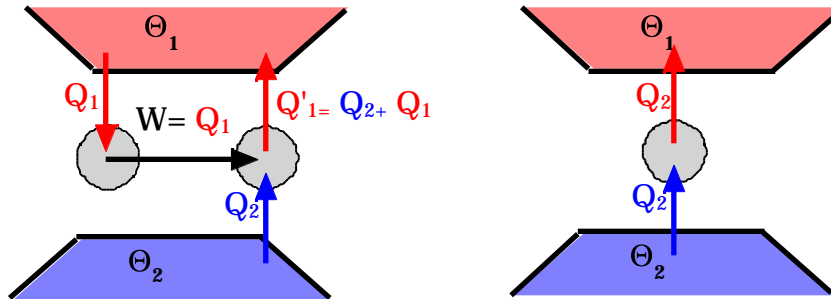


Supponiamo che esista una trasformazione il cui unico risultato sia l'assorbimento del calore  $Q_1$  dalla sorgente a temperatura  $\Theta_1$  e la trasformazione di tale calore in lavoro, senza che alcun cambiamento venga prodotto nel sistema e nell'ambiente circostante. Possiamo allora costruire un frigorifero che lavori tra due sorgenti a temperatura  $\Theta_1$  e  $\Theta_2$ , utilizzi il lavoro  $W = Q_1$  prodotto dalla macchina



perfetta per assorbire il calore  $Q_2$  dalla sorgente a temperatura  $\Theta_2$  e cederlo alla sorgente a temperatura  $\Theta_1$  insieme con il lavoro  $W$  ( $Q'_1$ , il calore ceduto alla sorgente a temperatura  $\Theta_1$  è quindi uguale a  $Q'_1 = W + Q_2 = Q_1 + Q_2$ ).

L'insieme della macchina e del frigorifero è quindi un dispositivo in grado di trasferire il calore  $Q_2$  dalla sorgente fredda a quella calda senza produrre altre modifiche nel sistema e nell'ambiente circostante e, quindi, senza bisogno di lavoro esterno. Questo frigorifero viola l'enunciato di Clausius.



In conclusione i due enunciati sono equivalenti.

### ***Irreversibilità e Il principio della termodinamica.***

Il secondo principio della termodinamica riconosce il fatto che molti fenomeni naturali avvengono in un verso ben preciso e che pertanto sono intrinsecamente irreversibili: non è possibile realizzare una combinazione di fenomeni naturali che ripristini esattamente lo stato iniziale.

Consideriamo per esempio il passaggio di calore da un corpo a un altro a temperatura più bassa: il secondo principio della termodinamica vieta il processo inverso cioè il passaggio di calore dal corpo a temperatura più bassa a quello a temperatura più alta senza produrre alcuna modifica nel sistema stesso o nell'ambiente circostante (affinché il calore venga trasferito dal corpo freddo a quello caldo occorre eseguire del lavoro esterno).

Un altro esempio è fornito da un pendolo che oscilla e che, a causa degli attriti, tende a ridurre l'ampiezza delle sue

oscillazioni. Anche in questo caso il secondo principio della termodinamica impedisce il processo inverso cioè il ripristino dell'ampiezza delle oscillazioni in quanto per fare ciò bisognerebbe estrarre calore dall'aria e trasformarlo completamente in lavoro meccanico, bisognerebbe cioè produrre del lavoro usando solo un serbatoio di calore.

In ogni trasformazione naturale c'è la trasformazione di qualche forma di energia in energia interna, con un conseguente aumento della temperatura. Queste trasformazioni risultano irreversibili perché bisognerebbe trasformare del calore pari  $U_f - U_i$  in lavoro, in contrasto con il secondo principio della termodinamica che afferma che la trasformazione di calore in lavoro non può essere completa.

Le limitazioni espresse dal secondo principio della termodinamica sono intimamente connesse alle cause che rendono i processi reali irreversibili e che quindi fissano il verso delle trasformazioni spontanee di un sistema che non sia in equilibrio.

### **Teorema di Carnot.**

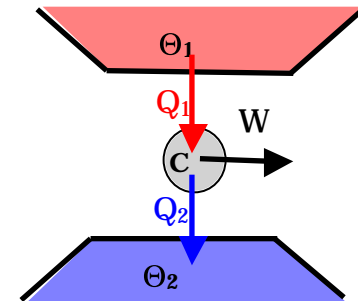
Il teorema di Carnot afferma che:

*nessuna macchina irreversibile che lavori tra due termostati può avere un rendimento superiore a quello di una macchina di Carnot che lavori tra gli stessi due termostati, mentre tutte le macchine reversibili(\*) che lavorano tra gli stessi termostati hanno lo stesso rendimento.*

Consideriamo una macchina termica E che lavori tra due termostati a temperature  $\theta_1$  e  $\theta_2$  ( $\theta_1 > \theta_2$ ). Consideriamo anche una macchina di Carnot che lavori tra gli stessi due termostati. Regolando il ciclo della macchina di Carnot possiamo sempre fare in modo che il lavoro W effettuato in un ciclo dalle due macchine sia lo stesso e che i cicli delle due macchine vengano percorsi nello stesso tempo.

Supponiamo che la macchina di Carnot assorba dal termostato caldo la quantità di calore  $Q_1$ , esegue in un ciclo esattamente lo stesso lavoro W della macchina E, e cede il calore  $Q_2 = Q_1 - W$  al termostato freddo. La sua efficienza è data da:

$$c = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$



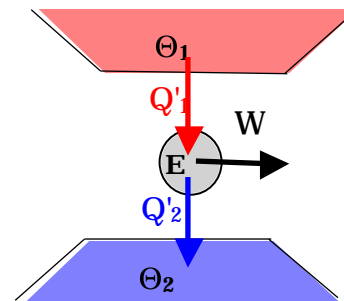
(\*) Abbiamo già mostrato in precedenza che tutte le macchine reversibili che lavorano tra due termostati sono macchine di Carnot.

La macchina E invece assorbe il calore  $Q'_1$  dal termostato caldo, esegue il lavoro  $W$ , e cede la quantità di calore  $Q'_2 = Q'_1 - W$  al termostato freddo. Il suo rendimento è dato da:

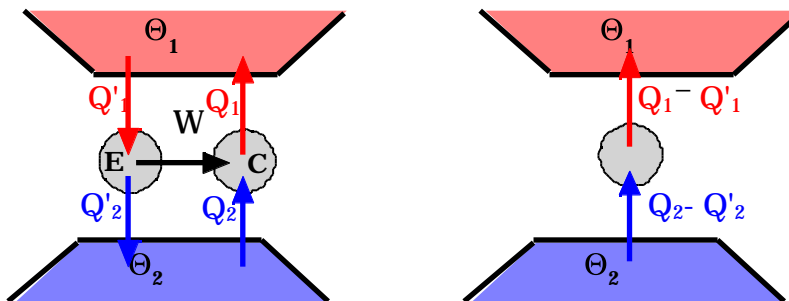
$$\eta_E = \frac{W}{Q'_1} = \frac{Q'_1 - Q'_2}{Q'_1}$$

Supponiamo per assurdo che  $\eta_E > \eta_C$ . Questo implica che:

$$\frac{W}{Q'_1} > \frac{W}{Q_1} \quad Q_1 > Q'_1$$



Supponiamo quindi che la macchina E venga utilizzata per produrre il lavoro necessario a far funzionare la macchina di Carnot come frigorifero. L'insieme delle due macchine accoppiate costituisce un dispositivo che funziona senza richiedere del lavoro esterno, dal momento che il lavoro necessario per far funzionare la macchina di Carnot come frigorifero è fornito dalla macchina E.



Il termostato freddo cede il calore:



$$Q_2 - Q'_2 = Q_1 - W - Q'_1 + W = Q_1 - Q'_1 > 0$$

Esso è positivo perché abbiamo mostrato che  $Q_1 > Q'_1$ .



Il termostato caldo assorbe il calore:

$$Q_1 - Q'_1 = Q_2 - Q'_2$$

Questo significa che la macchina composta è capace di trasferire la quantità di calore  $Q_2 - Q'_2$  dal termostato freddo a quello caldo, senza richiedere lavoro esterno, contraddicendo quindi l'enunciato di Clausius.

Se ne deduce che l'ipotesi di partenza era errata e quindi deve essere:

$$E \quad C$$

Questa disuguaglianza vale sia se nel caso in cui la macchina E è reversibile sia nel caso in cui è irreversibile: essa mostra che il rendimento massimo di una macchina che operi tra due termostati è uguale a quello di una macchina di Carnot che operi tra gli stessi due termostati.

Se la macchina E è una macchina reversibile allora si può invertire il ruolo delle due macchine: infatti essendo in questo caso la macchina E reversibile, è possibile invertire il suo ciclo e farla funzionare come frigorifero. Riprendendo la dimostrazione precedente ma con il ruolo delle macchine invertite si perverrà al seguente risultato:

$$C \quad E$$

Poiché le due relazioni devono valere contemporaneamente, segue che solo il segno di eguaglianza è quello compatibile con entrambe le relazioni:

$$E = C$$

L'ultima relazione mostra che tutte le macchine di Carnot (o tutte le macchine reversibili), che operano tra gli stessi due termostati hanno lo stesso rendimento, indipendentemente dalla sostanza che compie il ciclo e dall'estensione delle trasformazioni che lo costituiscono.

Dal teorema di Carnot si deducono due importanti risultati:

- avendo a disposizione due termostati a temperatura diversa, la maniera più efficiente per trasformare calore in lavoro meccanico è quello di utilizzare una macchina reversibile che operi tra questi due termostati, cioè di usare una macchina di Carnot.
- il rendimento di una tale macchina è indipendente dalla sostanza impiegata per percorrere il ciclo: siccome sappiamo fare i calcoli con il gas perfetto, possiamo calcolare il rendimento di una qualunque macchina di Carnot operante tra gli stessi due termostati supponendo di far percorrere il ciclo ad un gas perfetto.

Abbiamo già calcolato il rendimento di una macchina di Carnot che utilizzi un gas perfetto ed operi tra due termostati rispettivamente a temperatura  $T_1$  e  $T_2$ ; abbiamo dimostrato che il rendimento è dato da:

$$\eta_{\text{C, gas perfetto}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Pertanto il rendimento di una qualsiasi altra macchina reversibile che lavori tra gli stessi termostati, cioè di una qualsiasi altra macchina di Carnot che lavori tra le stesse temperature  $T_1$  e  $T_2$ , sarà dato da:

$$\eta_{\text{C}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

### **Scala termodinamica delle temperature.**

Il teorema di Carnot afferma che il rendimento di una macchina di Carnot non dipende dalla natura della sostanza che compie il ciclo, ma soltanto dalle temperature dei due termostati tra cui la macchina lavora.

Possiamo usare questa proprietà per definire la temperatura termodinamica.

Consideriamo una macchina di Carnot che lavori tra un serbatoio di cui si vuole misurare la temperatura, e il sistema del punto triplo. Sia  $Q_T$  il calore assorbito dal serbatoio di cui si vuole misurare la temperatura e  $Q_r$  quella scambiata con il serbatoio del punto triplo.

Possiamo definire la temperatura termodinamica in accordo con la seguente espressione:

$$T = 273.16 \frac{Q_T}{Q_r} \text{ K}$$

Il vantaggio di questa nuova definizione deriva dal fatto che essendo il rendimento di una macchina di Carnot indipendente dalla sostanza utilizzata nella macchina, anche la definizione della temperatura nella scala termodinamica effettuata mediante una macchina di Carnot è indipendente dalle proprietà della sostanza impiegata.

Da quanto detto si evince che per misurare una temperatura termodinamica è necessario usare un'opportuna macchina di Carnot. Ora noi sappiamo che una macchina di Carnot è una macchina ideale, e pertanto potrebbe sembrare irrealizzabile la possibilità di misurare temperature termodinamiche. In realtà quello che occorre fare è di misurare il calore assorbito o ceduto lungo due trasformazioni isoterme comprese tra due adiabatiche: una volta fissate le adiabatiche tra cui si vuole operare si riesce ad identificare il tratto di isoterma che bisogna percorrere alla temperatura di riferimento, per esempio quella del punto triplo, e alla temperatura incognita. Effettuando queste trasformazioni isoterme in maniera quasistatica si riescono a determinare le due quantità di calore necessarie per determinare la temperatura termodinamica incognita: è possibile in questo modo determinare temperature inferiori ad 1 K.

### **Scala di temperatura termodinamica e del gas perfetto.**

Il rendimento di una macchina di Carnot, che opera tra due serbatoi di calore alle temperature termodinamiche  $T_1$  e  $T_2$ , è dato, per definizione di temperatura termodinamica, da:



$$= 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

D'altro lato abbiamo determinato che se la sostanza che compie il ciclo è un gas perfetto, il rendimento della macchina può essere scritto nella forma:

$$= 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

dove  $T_1$  e  $T_2$  sono le temperature dei due termostati misurate nella scala delle temperature del gas perfetto. Quest'ultima espressione, d'altronde, può essere utilizzata anche quando la sostanza che compie il ciclo non è il gas perfetto, dato che il rendimento di una macchina di Carnot non dipende dalla sostanza che realizza il ciclo. Dal confronto di queste due espressioni e per il fatto che la temperatura del punto triplo è la stessa in tutte e due le scale di temperatura, si ricava che, nell'intervallo di temperatura in cui entrambe le scale sono definite, la temperatura termodinamica coincide con quella del gas perfetto.

$$= T$$

Naturalmente la definizione della temperatura termodinamica estende l'intervallo di temperature misurabili rispetto a quello coperto dal termometro a gas perfetto. Per poter effettuare delle misure di temperature con la scala di temperatura del gas perfetto, occorre avere a disposizione del gas da far lavorare in condizioni il più possibili vicine a quelle del gas perfetto.

A temperature molto basse, non si trovano più sostanze sottoforma di gas, per cui non è possibile con il termometro a gas perfetto misurare temperature vicine allo zero assoluto.

La scala termodinamica della temperatura, basata sulla macchina di Carnot, e quindi su una qualsiasi sostanza che percorre il ciclo di Carnot, permette di misurare quelle temperature per le quali non si ritrovano sostanze sottoforma di gas. Con la definizione della temperatura termodinamica è addirittura possibile definire lo "Zero" assoluto (lo stato in cui la temperatura è 0K).

### Lo zero assoluto.

Consideriamo la famiglia delle isoterme di una particolare sostanza. Possiamo realizzare vari cicli di Carnot, tutti limitati dalle stesse due adiabatiche, che operano tra una isoterma di riferimento (per esempio quella del punto triplo) ed una isoterma a temperatura variabile più bassa di quella di riferimento.

Dalla definizione di temperatura termodinamica:

$$T = 273.16 \frac{Q_T}{Q_{tr}} \text{ K}$$

si vede che quando la temperatura del serbatoio a temperatura inferiore diventa molto piccola, vicina a 0 K, la quantità di calore ceduta dalla macchina di Carnot al serbatoio a bassa temperatura diventa anch'essa molto piccola. Il valore più piccolo di  $Q$  è 0 J (zero joule) e la temperatura a cui questo accade è lo zero assoluto. Cioè se *un sistema compie una trasformazione isoterma reversibile senza scambio di calore, la temperatura cui ha luogo questa trasformazione si chiama zero assoluto*. L'isoterma relativa allo zero assoluto è anche adiabatica.

La definizione dello zero assoluto vale qualunque sia la sostanza ed è quindi indipendente dalle specifiche proprietà di ciascuna sostanza. Inoltre la definizione di zero assoluto si fonda solo su proprietà macroscopiche e non fa alcun riferimento alle molecole o alle energie molecolari.

Lo zero assoluto va considerato come una temperatura limite in quanto non esiste nessun processo in grado di portare una sostanza a tale temperatura. L'efficienza dei processi di raffreddamento, infatti, diminuisce al diminuire della temperatura. Per esempio se si usa una macchina di Carnot per abbassare la temperatura di un corpo, si può vedere che il lavoro necessario per estrarre il calore  $Q$  per abbassare la temperatura  $T$  diventa molto grande quando  $T$  diventa piccola. Infatti:

$$= \frac{Q_T}{W} = \frac{Q_T}{Q_{tr} - Q_T} = \frac{T}{T_{tr} - T} \quad \frac{W}{Q_T} = \frac{T_{tr} - T}{T} \quad T \rightarrow 0$$

Il rapporto  $W/Q$  diverge quando  $T$  tende a zero. Queste stesse difficoltà si incontrano anche quando la temperatura viene abbassata con altri metodi.

L'impossibilità di raggiungere lo zero assoluto è stata codificata nel terzo principio della termodinamica o principio di Nernst. Esso afferma che *nessun sistema può essere portato allo zero assoluto con un numero finito di operazioni*.

Come conseguenza di ciò si ha che il rendimento di un ciclo di Carnot è sempre più piccolo dell'unità dato che non

esiste, per la terza legge della termodinamica, un serbatoio allo zero assoluto:

$$= 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} < 1 \quad \text{perchè } T_2 \text{ è sempre maggiore di zero}$$

La temperatura  $T_2$  del serbatoio più freddo, a cui il ciclo di Carnot cede il calore  $Q_2$ , è sempre diversa da zero.

### **Teorema di Clausius.**

Il teorema di Carnot ha mostrato che il rendimento di una qualsiasi macchina che operi tra due soli serbatoi a temperature  $T_1$  e  $T_2$ , è minore o al massimo uguale al rendimento della macchina di Carnot che operi tra gli stessi due serbatoi:

$$= 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} - 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Da questa relazione si ricava che:

$$\frac{Q_2}{Q_1} - \frac{T_2}{T_1}$$

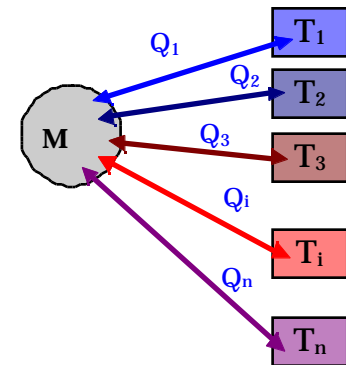
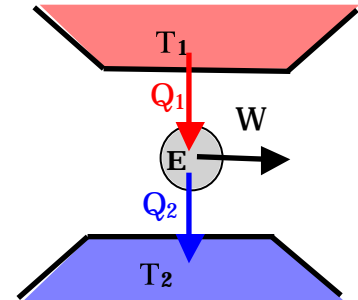
Moltiplicando entrambi i membri per  $Q_1$  e dividendo per  $T_2$ , poiché entrambe le quantità sono positive ( $T_2$  è una temperatura che è sempre positiva,  $Q_1$  è un calore assorbito e pertanto positivo), il verso della disuguaglianza non cambia:

$$\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} = \sum_{i=1}^2 \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

Si può concludere affermando che per una macchina che lavora tra due soli serbatoi, la somma dei calori scambiati con ciascun serbatoio divisi per la temperatura del serbatoio con cui avviene lo scambio risulta minore, o al massimo uguale, a zero. (Si osservi che i calori scambiati vanno presi con il proprio segno: positivo se il calore è assorbito dal sistema, negativo se è ceduto dal sistema).

Questa relazione è stata generalizzata da Clausius ad una macchina che, durante il ciclo, scambia calore con più di due sorgenti.

Il teorema di Clausius (detto anche disuguaglianza di Clausius) afferma che data una macchina  $M$  che durante il suo ciclo scambia i calori  $Q_1, Q_2, \dots, Q_i, \dots, Q_n$  con ciascuno degli  $n$  serbatoi aventi rispettivamente temperatura  $T_1, T_2, \dots, T_i, \dots, T_n$ , la somma dei calori scambiati, presi con il segno opportuno, divisi per la temperatura del



serbatoio è minore o uguale a zero:

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

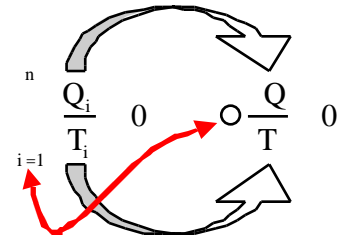
Qualora, durante il ciclo, la macchina M scambia calore con infiniti serbatoi di calore, allora la disuguaglianza di Clausius si scriverà:

$$\oint \frac{Q}{T} \leq 0$$

in cui il cerchietto sull'integrale sta a significare che l'integrale è fatto su di un ciclo,  $Q$  è una quantità di calore infinitesima scambiata con un serbatoio di calore e  $T$  è la temperatura del serbatoio con cui il sistema ha scambiato il calore  $Q$ . Confrontando l'ultima espressione con quella utilizzata per un numero finito di serbatoi, si vede che la sommatoria è stata rimpiazzata con l'integrale, il calore  $Q_i$  scambiato con l' $i$ -esimo serbatoio di calore con la quantità infinitesima  $Q$ , la temperatura  $T_i$  del termostato con cui veniva scambiato il calore  $Q_i$  con la temperatura  $T$  del termostato con cui la macchina scambia il calore  $Q$ .

Si osservi che la temperatura  $T$  che compare nell'integrale non è la temperatura del sistema, se così fosse l'integrale di Clausius non sarebbe valutabile per tutti i cicli irreversibili, in quanto ci sarebbero parti del ciclo, o al limite l'intero ciclo, nelle quali la temperatura del sistema non è definita. Viceversa la quantità infinitesima di calore

$Q$  scambiata con un serbatoio e la temperatura  $T$  del serbatoio sono perfettamente valutabili anche in un ciclo irreversibile. Se infine il ciclo fosse reversibile allora la temperatura  $T$  del serbatoio è uguale a quella del sistema al momento del trasferimento del calore  $Q$ . In un ciclo reversibile si può quindi usare indifferentemente la temperatura del serbatoio con cui viene scambiato  $Q$  o la temperatura del sistema quando avviene lo scambio: queste due temperature in un ciclo reversibile sono uguali.

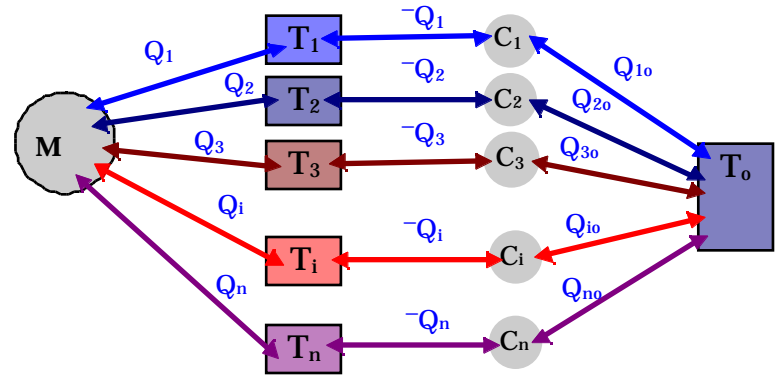


### Dimostrazione del teorema di Clausius

Consideriamo ora una macchina termica che, durante il suo ciclo, scambia calore con  $n$  sorgenti. Indichiamo con  $Q_i$  il calore scambiato in un ciclo con la sorgente  $i$ -esima la cui temperatura è  $T_i$ .

Introduciamo ora  $n$  macchine di Carnot i cui cicli hanno la stessa durata del ciclo della macchina  $M$ . La prima scambia in un ciclo, il calore  $-Q_1$  con il serbatoio a temperatura  $T_1$  e il calore  $Q_{10}$  con un serbatoio a temperatura  $T_0$  comune a tutte le macchine di Carnot. La  $i$ -esima macchina di Carnot scambia il calore  $-Q_i$  con il serbatoio a temperatura  $T_i$  e il calore  $Q_{i0}$  con il serbatoio comune a temperatura  $T_0$ .

Poiché la quantità di calore complessivamente scambiata da ciascun serbatoio intermedio è nulla in quanto riceve  $Q_i$  dalla macchina  $M$  e

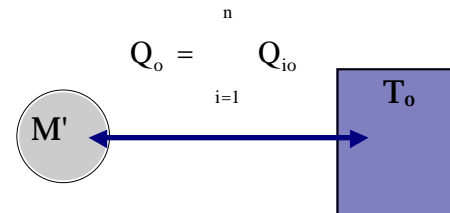


cede  $-Q_i$  alla macchina di Carnot  $C_i$ , essi vengono lasciati inalterati, pertanto l'insieme della macchina  $M$ , dei serbatoi intermedi e delle  $n$  macchine di Carnot è equivalente ad una macchina termica  $M'$  che scambia il calore

$$Q_o = \sum_{i=1}^n Q_{i0}$$

con il serbatoio a temperatura  $T_0$ .

La macchina  $M'$  lavora con un solo serbatoio di calore: si tratta quindi di una macchina monoterma. Affinché la macchina  $M'$  possa funzionare in accordo al II principio della Termodinamica, occorre che il calore scambiato sia minore o al massimo uguale a zero nel caso in cui le trasformazioni siano reversibili:



$$Q_o = \sum_{i=1}^n Q_{io} = 0$$

D'altra parte, per ciascuna delle macchine di Carnot,  $C_i$ , come è stato osservato all'inizio del paragrafo, possiamo scrivere:

$$\begin{array}{ll} \frac{-Q_1}{T_1} + \frac{Q_{1o}}{T_o} = 0 & \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_{1o}}{T_o} \\ \frac{-Q_2}{T_2} + \frac{Q_{2o}}{T_o} = 0 & \frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_{2o}}{T_o} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \frac{-Q_i}{T_i} + \frac{Q_{io}}{T_o} = 0 & \frac{Q_i}{T_i} = \frac{Q_{io}}{T_o} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \frac{-Q_n}{T_n} + \frac{Q_{no}}{T_o} = 0 & \frac{Q_n}{T_n} = \frac{Q_{no}}{T_o} \end{array}$$

Sommando membro a membro si ottiene:

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} = \sum_{i=1}^n \frac{Q_{io}}{T_o} = \frac{\sum_{i=1}^n Q_{io}}{T_o}$$

Dall'osservazione che  $\sum_{i=1}^n Q_{io} = 0$ , e dal fatto che  $T_o$  è positiva, segue che:

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} = 0$$

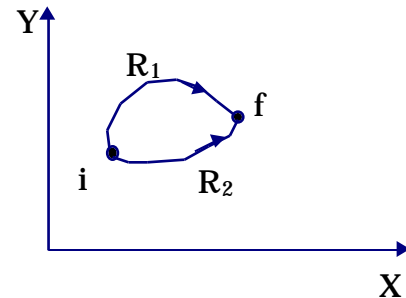
in cui il segno di uguaglianza vale nel caso in cui la macchina M sia reversibile (In tal caso infatti è possibile far funzionare la macchina M al contrario ed invertire così tutti gli scambi di calore. Questo porta alla condizione

finale  $\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} = 0$ . Le due relazioni devono però essere valide contemporaneamente e solo il segno di uguaglianza è compatibile con entrambe le relazioni).

La relazione precedente va sotto il nome di disuguaglianza di Clausius ed esprime il teorema di Clausius. Si noti che, nella disuguaglianza di Clausius,  $Q_i$  è la quantità di calore scambiata dal sistema con il serbatoio a temperatura  $T_i$ . E' opportuno precisare quindi che  $T_i$  non è la temperatura del sistema quando scambia il calore  $Q_i$ , infatti tale calore potrebbe essere scambiato dal sistema in maniera irreversibile e, in tal caso, la temperatura del sistema risulterebbe non definita. Solo se la trasformazione è reversibile, e quindi avviene passando per stati di equilibrio termodinamico (e quindi anche termico), la temperatura del sistema è la stessa di quella del serbatoio con cui scambia calore.

### **Entropia.**

Consideriamo un sistema termodinamico descritto dalle variabili termodinamiche  $X, Y$  inizialmente nello stato  $i$ . Supponiamo di portare il sistema dallo stato  $i$  allo stato  $f$  mediante una trasformazione reversibile  $R_1$  e poi di riportarlo allo stato iniziale mediante una trasformazione  $R_2$  diversa dalla prima. L'insieme della due trasformazioni reversibili costituisce un ciclo reversibile. A questo ciclo possiamo applicare il teorema di Clausius:





$$\oint_C \frac{Q_R}{T} = 0$$

perchè il ciclo è reversibile  
 dQ<sub>R</sub> calore scambiato reversibilmente

$$\int_{R_1}^i \frac{Q_R}{T} + \int_{R_2}^f \frac{Q_R}{T} = 0$$

Si noti che la temperatura T che compare nell'integrale di Clausius è la temperatura del serbatoio con cui il sistema scambia il calore Q<sub>R</sub>, ma, essendo il ciclo reversibile, T coincide con la temperatura del sistema. Nell'eseguire l'integrale si possono usare le coordinate termodinamiche del sistema e non le grandezze relative ai serbatoi. Sulla trasformazione reversibile R<sub>2</sub> si ha che:

$$\int_{R_2}^f \frac{Q_R}{T} = - \int_{R_2}^i \frac{Q_R}{T}$$

perché cambiando il verso della trasformazione, per ogni tratto infinitesimo di trasformazione, Q<sub>R</sub> cambia di segno (quello che prima era calore ceduto ora diventa calore assorbito e viceversa), mentre T rimane invariata. Si ottiene così:

$$\int_{R_1}^f \frac{Q_R}{T} = \int_{R_2}^i \frac{Q_R}{T}$$

Data l'arbitrarietà delle trasformazioni reversibili R<sub>1</sub> ed R<sub>2</sub> possiamo affermare che la quantità:

$$\int_R \frac{Q_R}{T}$$

non dipendente dalla trasformazione reversibile che connette i con f.

Possiamo allora affermare che esiste una funzione S delle coordinate termodinamiche del sistema la cui variazione, tra lo stato iniziale e quello finale, è uguale a

$$S = S_f - S_i = \int_i^f \frac{Q_R}{T}$$

La funzione di stato S si chiama Entropia,  $\Delta S$  rappresenta la variazione di entropia.

Per una trasformazione infinitesima reversibile risulta:

$$dS = \frac{Q_R}{T}$$

dS come differenziale di una funzione di stato è un differenziale esatto.

L'entropia si misura in cal/°K o J/°K.

### **Calcolo di variazioni di entropia.**

Per capire il significato fisico dell'entropia, occorre determinarne le variazioni che si verificano a seguito di una trasformazione. E' importante valutare, oltre alla *variazione di entropia del sistema*, anche quella di ciò che circonda il sistema, la *variazione di entropia dell'ambiente circostante*: Questo consente di determinare la variazione complessiva dell'entropia causata dalla trasformazione, che va sotto il nome di *variazione di entropia dell'universo*.

#### **1) Variazione di entropia di un serbatoio di calore.**

Cominciamo col calcolare la variazione di entropia di un serbatoio di calore che assorbe o cede una certa quantità finita di calore Q. Un serbatoio di calore è un sistema con una massa molto grande, l'assorbimento o la cessione di una quantità finita di calore produce una piccolissima variazione delle sue coordinate termodinamiche. Il serbatoio si porta cioè in uno stato che differisce da uno stato di equilibrio per un infinitesimo e per questo praticamente confondibile con uno stato di equilibrio. Durante il trasferimento di calore il serbatoio si trova in uno stato di equilibrio o in uno stato molto prossimo ad uno stato di equilibrio: questo significa che la trasformazione può

essere considerata reversibile. La variazione di entropia del serbatoio è perciò  $Q/T$ .

Variazione di entropia di un serbatoio di calore:	$S_{\text{sorg}} = \frac{Q}{T}$
---	---------------------------------

## 2) Variazione di entropia in una trasformazione reversibile.

In generale durante la trasformazione c'è uno scambio di calore tra il sistema e una serie di serbatoi di calore. Durante ogni parte infinitesima di trasformazione una certa quantità di calore  $Q_R$  viene scambiata tra il sistema ed uno dei serbatoi messi a contatto. Per esempio se il sistema assorbe la quantità di calore  $Q_R$ , la sua entropia varia di:

$$dS_{\text{Sistema}} = \frac{Q_R}{T}$$

mentre la variazione di entropia del serbatoio è data da:

$$dS_{\text{Serbatoio}} = -\frac{Q_R}{T}$$

in quanto se  $Q_R$  è un calore assorbito dal sistema, visto dal punto di vista della sorgente di calore è un calore ceduto, quindi negativo.

La variazione di entropia dell'universo è perciò nulla in ogni tratto infinitesimo della trasformazione.

$$dS_{\text{Universo}} = dS_{\text{Sistema}} + dS_{\text{Serbatoio}} = \frac{Q_R}{T} - \frac{Q_R}{T} = 0$$

Poiché la variazione di entropia dell'universo è nulla in ogni parte infinitesima della trasformazione reversibile, si può concludere che la variazione di entropia dell'universo lungo tutta la trasformazione reversibile è nulla.

Variazione di entropia dell'universo su una trasformazione reversibile	$S_u = 0$
--	-----------

**3) Variazione di entropia in una trasformazione generica di un gas perfetto.**

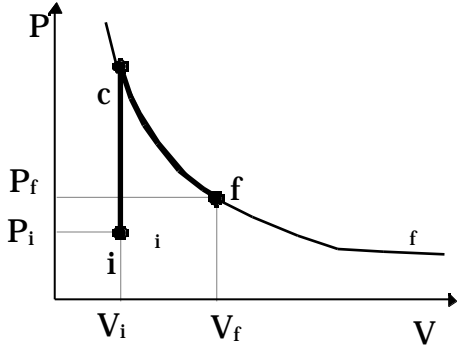
Su un tratto infinitesimo di una trasformazione reversibile subita da un gas perfetto possiamo scrivere applicando il I principio della termodinamica:

$$dQ_R = dU + dW = nC_V dT + PdV$$

in cui la pressione è legata al volume e alla temperatura dall'equazione di stato  $PV = nRT$ . Pertanto:

$$dS = \frac{Q_R}{T} = \frac{nC_V dT}{T} + \frac{nRTdV}{VT} = nC_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

Poiché l'entropia è una funzione di stato, la sua variazione tra lo stato iniziale  $i$  e quello finale  $f$  può essere calcolata scegliendo una opportuna trasformazione reversibile che connette lo stato iniziale  $i$  e lo stato finale  $f$ . In questo caso è comodo scegliere una trasformazione costituita da un tratto di isocora e da un tratto di isoterma.



$$S = \int_i^f \frac{Q_R}{T} = \int_i^c nC_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} =$$

$$= \int_i^c nC_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} + \int_c^f nC_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_i^c nC_v \frac{dT}{T} + \int_c^f nR \frac{dV}{V} = nC_v \ln T_i^c + nR \ln V_c^f = nC_v \ln \frac{T_c}{T_i} + nR \ln \frac{V_f}{V_c} = \\
&= nC_v \ln \frac{T_f}{T_i} + nR \ln \frac{V_f}{V_i}
\end{aligned}$$

Naturalmente l'espressione trovata vale per tutte le trasformazioni del gas perfetto, sia reversibili che irreversibili, che portano il sistema dallo stato iniziale  $i$  allo stato finale  $f$ .

Se si vuole esprimere la variazione dell'entropia in termini di  $(P,T)$  anziché di  $(V,T)$ , oppure in termini di  $(P,V)$ , basta far ricorso all'equazione di stato dei gas perfetti. Infatti:

$$P_i V_i = nRT_i \quad V_i = \frac{nRT_i}{P_i}$$

$$P_f V_f = nRT_f \quad V_f = \frac{nRT_f}{P_f}$$

Andando a sostituire si ottiene:

$$\begin{aligned}
S &= nC_v \ln \frac{T_f}{T_i} + nR \ln \frac{V_f}{V_i} = nC_v \ln \frac{T_f}{T_i} + nR \ln \frac{nRT_f}{P_f} \frac{P_i}{nRT_i} \\
&= nC_v \ln \frac{T_f}{T_i} + nR \ln \frac{T_f}{T_i} + nR \ln \frac{P_i}{P_f} = n(C_v + R) \ln \frac{T_f}{T_i} - nR \ln \frac{P_f}{P_i} = \\
&= nC_p \ln \frac{T_f}{T_i} - nR \ln \frac{P_f}{P_i}
\end{aligned}$$

Oppure:

$$\begin{aligned}
 S &= nC_V \ln \frac{T_f}{T_i} + nR \ln \frac{V_f}{V_i} = nC_V \ln \frac{P_f V_f}{nR} \frac{nR}{P_i V_i} + nR \ln \frac{V_f}{V_i} = \\
 &= nC_V \ln \frac{P_f}{P_i} + nC_V \ln \frac{V_f}{V_i} + nR \ln \frac{V_f}{V_i} = nC_V \ln \frac{P_f}{P_i} + n(C_V + R) \ln \frac{V_f}{V_i} = \\
 &= nC_V \ln \frac{P_f}{P_i} + nC_p \ln \frac{V_f}{V_i}
 \end{aligned}$$

Ricapitolando:

Trasformazioni del gas perfetto:	$S = nC_V \ln \frac{T_f}{T_i} + nR \ln \frac{V_f}{V_i}$ $S = nC_p \ln \frac{T_f}{T_i} - nR \ln \frac{P_f}{P_i}$ $S = nC_V \ln \frac{P_f}{P_i} + nC_p \ln \frac{V_f}{V_i}$
----------------------------------	---

#### 4) **Variazione di entropia in una transizione di fase.**

Tra tutte le trasformazioni naturali il cambiamento di fase è forse quella che più si avvicina ad una trasformazione reversibile. Supponiamo ad esempio di voler calcolare la variazione di entropia in una transizione dalla fase solida alla fase liquida ad una determinata temperatura. Per il calcolo si sostituisca la trasformazione con una reversibile, la fusione reversibile, a temperatura e pressione costanti.

Si ha:

$$S = S_{\text{liq}} - S_{\text{sol}} = \underset{\text{sol}}{\overset{\text{liq}}{\frac{Q_R}{T_{\text{fusione}}}}} = \underset{\text{sol}}{\overset{\text{liq}}{\frac{1}{T_{\text{fusione}}}}} \quad Q_R = \frac{m_{\text{fusione}}}{T_{\text{fusione}}}$$

la temperatura di fusione è costante

dove  $m$  è la massa del sistema che ha cambiato fase e  $q_{\text{fusione}}$  è il calore latente di fusione e  $T_{\text{fusione}}$  la temperatura di fusione alla pressione di lavoro. Una relazione simile vale anche per l'evaporazione e per l'ebollizione. Si osservi che passando dalla fase solida a quella liquida il calore è assorbito e questo corrisponde ad una variazione positiva dell'entropia, passando invece dalla fase liquida a quella solida il calore è ceduto dal sistema e quindi si ha una diminuzione dell'entropia del sistema.

Cambiamenti di fase:	$S = \pm \frac{m_{e,f}}{T_{e,f}}$ <p>e = evaporazione o ebollizione f = fusione</p>
----------------------	---

### **Calcolo della variazione di entropia su alcune trasformazioni irreversibili.**

Finora abbiamo considerato solo trasformazioni reversibili. E' però possibile valutare la variazione di entropia del sistema in una trasformazione irreversibile tra i due stati di equilibrio  $i$  ed  $f$  (iniziale e finale). Sapendo che l'entropia è una funzione di stato e quindi non dipende dalla particolare trasformazione che connette gli stati  $i$  ed  $f$ , la variazione di entropia del sistema si ottiene valutando l'integrale

$$S = S_f - S_i = \int_i^f \frac{Q_R}{T}$$

su una qualunque trasformazione reversibile che colleghi lo stato iniziale  $i$  allo stesso stato finale  $f$ .

L'integrale non può essere eseguito sulla trasformazione irreversibile, che non è rappresentabile per mezzo di

coordinate termodinamiche, ma la trasformazione irreversibile deve essere sostituita da una reversibile che connetta gli stessi stati  $i$  ed  $f$ .

### 1) Lavoro meccanico trasformato in energia interna di un sistema isolato.

Il processo è irreversibile perché, in base al secondo principio, non è possibile ritrasformare tutto il calore estratto dal corpo in lavoro meccanico: una parte deve essere ceduta a un serbatoio a temperatura più bassa.

Supponiamo che il processo sia avvenuto a pressione costante e che, a seguito dell'esecuzione del lavoro, la temperatura sia aumentata dal valore  $T_i$  al valore  $T_f$ . Per calcolare la variazione di entropia del sistema possiamo usare una trasformazione reversibile che porti il sistema a pressione costante dalla temperatura  $T_i$  alla temperatura  $T_f$ . Questa trasformazione si effettua mettendo a contatto con il corpo, uno dopo l'altro, infiniti serbatoi di calore ciascuno con una temperatura che differisce da quello precedente per un infinitesimo  $dT$ . In tal caso il calore infinitesimo scambiato reversibilmente con uno qualsiasi degli infiniti serbatoi è

$$Q_R = m c dT$$

dove  $m$  è la massa del corpo e  $c$  il calore specifico a pressione costante. La variazione di entropia è data da:

$$S_{\text{sist}} = \int_i^f \frac{m c dT}{T} = m c \int_i^f \frac{dT}{T} = m c \ln \frac{T_f}{T_i}$$

avendo considerato costante il calore specifico del corpo nell'intervallo di temperatura tra  $T_i$  e  $T_f$ . Poiché  $T_f$  è maggiore di  $T_i$ , la variazione di entropia del sistema è maggiore di zero:

$$\frac{T_f}{T_i} > 1 \qquad \ln \frac{T_f}{T_i} > 0$$

$$S_{\text{sist}} = m c \ln \frac{T_f}{T_i} > 0$$



Nel caso considerato, inoltre, non essendoci alcuno scambio di calore con l'ambiente circostante, la variazione di entropia dell'ambiente circostante è nulla; ne consegue che la variazione di entropia dell'universo coincide con quella del sistema. Pertanto per questa trasformazione irreversibile la variazione di entropia dell'universo è maggiore di zero.

$$S_u = S_{\text{sist}} > 0$$

## 2) Espansione libera.

L'espansione libera è un processo irreversibile in quanto una volta aperto il rubinetto che collega i due volumi, si perde il controllo del sistema: negli stadi intermedi sicuramente la pressione ha valori diversi nelle due parti del sistema (appena si apre il rubinetto in una zona la pressione è uguale alla pressione iniziale, nell'altra zona la pressione è nulla. La pressione non assume lo stesso valore in tutte le parti del recipiente, non c'è equilibrio meccanico. La trasformazione, passando per stati in cui non c'è l'equilibrio termodinamico, è irreversibile).

Se il gas che esegue l'espansione libera è un gas ideale, allora la temperatura finale è uguale alla temperatura iniziale.

In una espansione libera il calore scambiato con l'ambiente esterno è nullo e quindi anche la variazione di entropia dell'ambiente esterno è nulla.

Per calcolare invece la variazione di entropia del sistema<sup>6</sup> sostituiamo la trasformazione irreversibile con una reversibile che porti il sistema dallo stato caratterizzato dalle coordinate  $V_i, T$  allo stato finale  $V_f, T$ . Conviene scegliere una espansione isoterma a temperatura  $T$  tra il volume  $V_i$  e  $V_f$ .

$$S = S_f - S_i = \int_{i \text{ isoterma}}^f \frac{Q_R}{T} = \int_{i \text{ isoterma}}^f \frac{1}{T} Q_R = \frac{Q_{\text{totale}}}{T}$$

---

<sup>6</sup> Naturalmente si può fare direttamente ricorso alla relazione che dà la variazione di entropia per un gas perfetto:

$$S = nC_V \ln \frac{T_f}{T_i} + nR \ln \frac{V_f}{V_i} = nR \ln \frac{V_f}{V_i}$$

Per calcolare il calore scambiato durante la trasformazione reversibile isoterma, teniamo conto del fatto che l'energia interna è funzione solo della temperatura e quindi non varia tra lo stato iniziale e lo stato finale; dal primo principio della termodinamica otteniamo che la quantità di calore assorbita dal serbatoio a temperatura  $T$  è uguale al lavoro effettuato sull'ambiente esterno:

$$Q_{\text{totale}} = W = \int_i^f PdV = \int_i^f \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_i^f \frac{dV}{V} = nRT \ln V \Big|_i^f = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$$

usando  
l'equazione  
di stato  
 $PV=nRT$ 
 $nRT$   
è costante

Possiamo calcolare la variazione di entropia del sistema che è data da:

$$S_{\text{Sistema}} = \frac{Q_{\text{totale}}}{T} = \frac{nRT \ln \frac{V_f}{V_i}}{T} = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$$

La variazione di entropia dell'universo coincide con la variazione di entropia del sistema ed è una quantità positiva. In altre parole, in questo processo, l'entropia dell'universo aumenta. D'altro lato nell'espansione libera nessun lavoro è stato compiuto sull'ambiente circostante: quindi nella trasformazione irreversibile il sistema ha perduto la capacità a compiere del lavoro sull'esterno pari a

$$W = nRT \ln \frac{V_f}{V_i} = T S$$

### 3) Conduzione del calore.

Consideriamo due corpi uguali sotto ogni aspetto che si trovino a temperature differenti  $T_1$  e  $T_2$  con  $T_1 > T_2$ . Mettiamo a contatto i corpi, dopo averli isolati termicamente dall'ambiente circostante, e manteniamo costante la pressione. Quando vengono fatti interagire termicamente essi si portano ad uno stato di equilibrio termico caratterizzato da un valore comune della temperatura  $T_m$ . La trasformazione a cui sono sottoposti è una trasformazione irreversibile perché non è verificato l'equilibrio termico (all'inizio della trasformazione le temperature dei due corpi sono differenti)

Avendo isolato i due corpi dall'esterno, non c'è scambio di calore con l'ambiente esterno. Pertanto la variazione di entropia dell'ambiente circostante è nulla.

Per calcolare la variazione di entropia di ciascuno dei due corpi, dobbiamo sostituire la trasformazione irreversibile con una reversibile fra lo stesso stato iniziale e lo stesso stato finale. Possiamo pensare di avere infiniti serbatoi di calore, con temperature comprese tra  $T_2$  e  $T_m$  e tra  $T_m$  e  $T_1$  e con salti infinitesimi di temperatura tra un serbatoio e il successivo.

Ponendo successivamente a contatto il corpo 1 con i vari termostati, esso cederà a ciascuno di questi una quantità di calore data da:

$$Q_R = m_1 c_1 dT$$

dove  $c_1$  è il calore specifico, a pressione costante, ed  $m_1$  la massa del corpo 1. La sua variazione di entropia sarà:

$$S_1 = \int_i^f \frac{Q_R}{T} = \int_i^f \frac{m_1 c_1 dT}{T} \underset{\substack{\text{considerando} \\ \text{costanti } m_1 \\ \text{e } c_1}}{=} m_1 c_1 \ln T \Big|_i^f = m_1 c_1 \ln \frac{T_m}{T_1}$$

Procedendo in maniera analoga per il corpo 2 si avrà:

$$S_2 = \int_i^f \frac{Q_R}{T} = \int_i^f \frac{m_2 c_2 dT}{T} \underset{\substack{\text{considerando} \\ \text{costanti } m_2 \\ \text{e } c_2}}{=} m_2 c_2 \ln T \Big|_i^f = m_2 c_2 \ln \frac{T_m}{T_2}$$

La variazione di entropia del sistema sarà data da:

$$S_1 + S_2 = m_1 c_1 \ln \frac{T_m}{T_1} + m_2 c_2 \ln \frac{T_m}{T_2}$$

Per calcolare il calore ceduto dal corpo 1 durante la trasformazione dobbiamo innanzitutto osservare che il corpo 1 ha subito una trasformazione irreversibile (assenza di equilibrio termico) però a pressione costante. Per trasformazioni a pressione costante noi abbiamo già osservato che il calore scambiato è una funzione di stato, e

quindi non dipende dal tipo di trasformazione a pressione costante subita dal sistema ma solo dallo stato iniziale e dallo stato finale. Possiamo perciò calcolare il calore assorbito dal corpo 1 sulla trasformazione reversibile a pressione costante che lo porta dalla temperatura iniziale  $T_1$  alla temperatura finale  $T_m$ , utilizzando la relazione:

$$Q_1 = m_1 c_1 dT \quad Q_1 = \int_i^f dQ_1 = \int_i^f m_1 c_1 dT \underset{\substack{\text{considerando} \\ \text{costanti } m_1 \\ \text{e } c_1}}{=} m_1 c_1 \int_i^f dT = m_1 c_1 (T_m - T_1)$$

Mentre quello assorbito dal corpo 2 è dato da:

$$Q_2 = m_2 c_2 dT \quad Q_2 = \int_i^f dQ_2 = \int_i^f m_2 c_2 dT \underset{\substack{\text{considerando} \\ \text{costanti } m_2 \\ \text{e } c_2}}{=} m_2 c_2 \int_i^f dT = m_2 c_2 (T_m - T_2)$$

Il calore  $Q_1$  è negativo, ceduto dal corpo 1, mentre  $Q_2$  è positivo, assorbito dal corpo 2. Poiché i corpi 1 e 2 scambiano calore solo tra di loro, i valori assoluti dei calori  $Q_1$  e  $Q_2$  devono essere uguali:

$$Q_2 = -Q_1 \quad m_2 c_2 (T_m - T_2) = -c_1 m_1 (T_m - T_1) \quad T_m = \frac{c_1 m_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{c_1 m_1 + m_2 c_2}$$

Per semplificare i calcoli, valutiamo la temperatura finale e la variazione di entropia nel caso particolare in cui i due corpi 1 e 2 sono uguali, quindi  $m_1 = m_2 = m$  e  $c_1 = c_2 = c$ .  
In questo caso la temperatura di equilibrio varrà:

$$T_m = \frac{c_1 m_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{c_1 m_1 + m_2 c_2} = \frac{cmT_1 + mcT_2}{cm + mc} = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

La variazione di entropia del sistema, invece, sarà data da:

$$S_1 + S_2 = m_1 c_1 \ln \frac{T_m}{T_1} + m_2 c_2 \ln \frac{T_m}{T_2} = mc \ln \frac{T_m}{T_1} \frac{T_m}{T_2} = mc \ln \frac{T_m^2}{T_1 T_2}$$

Vogliamo far vedere che è maggiore di zero. Infatti

$$\begin{aligned} \frac{T_m^2}{T_1 T_2} &= \frac{\left(\frac{T_1 + T_2}{2}\right)^2}{T_1 T_2} = \frac{T_1^2 + 2T_1 T_2 + T_2^2}{4T_1 T_2} \stackrel{\text{Sommando e sottraendo al numeratore la quantità } 4T_1 T_2}{=} \frac{T_1^2 + 2T_1 T_2 + T_2^2 + 4T_1 T_2 - 4T_1 T_2}{4T_1 T_2} = \\ &= \frac{4T_1 T_2 + (T_1^2 - 2T_1 T_2 + T_2^2)}{4T_1 T_2} = 1 + \frac{(T_1 - T_2)^2}{4T_1 T_2} > 1 \end{aligned}$$

Quindi  $\ln \frac{T_m^2}{T_1 T_2}$  è maggiore di zero, e così anche  $S_1 + S_2$ .

Anche in questo caso la variazione di entropia dell'universo è proprio uguale alla variazione di entropia del sistema che risulta maggiore di zero. Quindi anche a seguito di questa trasformazione irreversibile l'entropia dell'universo è aumentata. Contemporaneamente il sistema ha perso la capacità a compiere lavoro, che si sarebbe potuto ottenere utilizzando una macchina di Carnot che operante tra i due corpi come serbatoi di calore.

### ***Principio dell'aumento dell'entropia.***

Negli esempi precedenti abbiamo visto che la variazione di entropia dell'universo associata ad alcune trasformazioni irreversibili è maggiore di zero. Le trasformazioni irreversibili che abbiamo considerato sono delle trasformazioni naturali. Infatti se un sistema si trova in uno stato di equilibrio termodinamico, e per qualche ragione, l'equilibrio termodinamico viene rotto, il sistema evolve verso un nuovo stato di equilibrio termodinamico eseguendo una trasformazione irreversibile. Per rompere l'equilibrio termodinamico, è sufficiente

che uno solo dei tre equilibri che lo caratterizzano, meccanico, chimico o termico, venga rotto. Sperimentalmente si vede che in qualunque trasformazione naturale e quindi irreversibile, si ha un aumento dell'entropia dell'universo.

Possiamo dare un altro enunciato del secondo principio della termodinamica: *una trasformazione naturale che inizia e termina in stati di equilibrio, si svolge sempre nella direzione che causa un aumento dell'entropia dell'universo*, dove per universo si intende il sistema e ciò che circonda localmente il sistema stesso.

Nelle trasformazioni che avvengono in natura dunque la variazione di entropia è strettamente maggiore di zero. Cioè:

$$S > 0$$

Nelle trasformazioni reversibili la variazione di entropia è nulla, pertanto per una qualunque trasformazione è verificata la seguente relazione:

$$S = 0$$

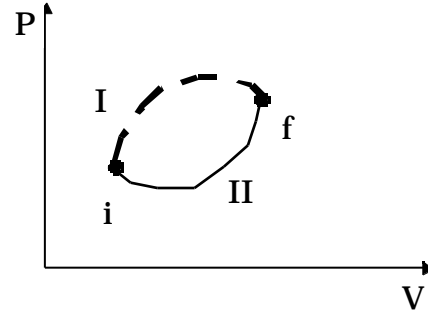
dove il segno di uguaglianza (=) vale per le trasformazioni reversibili e quello di "maggiore di" (>) per le trasformazioni irreversibili.

### **Dimostrazione dell'aumento dell'entropia nelle trasformazioni naturali (irreversibili)**

Consideriamo un sistema termodinamico sottoposto ad una trasformazione irreversibile (I) che lo porti dallo stato iniziale  $i$  allo stato finale  $f$ . Consideriamo una seconda trasformazione questa volta reversibile (II) che porti il sistema dallo stesso stato iniziale  $i$  allo stesso stato finale  $f$ .

Consideriamo il ciclo formato dalla trasformazione I più la trasformazione II percorsa in senso inverso (questo è possibile perché la trasformazione II è reversibile). Per il teorema di Clausius risulta:

$$\oint \frac{Q}{T} = 0$$



in cui, ricordiamo,  $Q$  è il calore scambiato e  $T$  è la temperatura del serbatoio con cui viene scambiato  $Q$ .

Suddividendo l'integrale sul ciclo nella somma degli integrali sulla trasformazione I e sulla trasformazione II percorsa da  $f$  a  $i$ , tenendo poi conto che quest'ultimo integrale è uguale all'opposto dello stesso integrale sulla trasformazione II percorsa però da  $i$  a  $f$  (cambiando il verso di percorrenza della trasformazione reversibile cambiano i segni degli scambi energetici:  $Q$  diventa  $-Q$  mentre  $T$  resta la stessa) e tenendo infine conto che l'integrale eseguito sulla trasformazione reversibile per definizione è uguale alla variazione di entropia si ha:

$$\oint \frac{Q}{T} = \int_{i,I}^f \frac{Q}{T} + \int_{f,II}^i \frac{Q_{rev}}{T} = \int_{i,I}^f \frac{Q}{T} - \int_{i,II}^f \frac{Q_{rev}}{T} = \int_{i,I}^f \frac{Q}{T} - S_{sist} = 0$$

da cui

$$S_{sist} = \int_{i,I}^f \frac{Q}{T}$$

dove l'integrale al secondo membro viene effettuato sulla trasformazione irreversibile. Ricordiamo che  $T$  è la temperatura del serbatoio con cui viene scambiato il calore  $Q$ : essendo la trasformazione irreversibile le

coordinate termodinamiche del sistema non sono note e pertanto occorre fare riferimento esclusivamente alle coordinate termodinamiche dell'ambiente esterno.

Supponiamo ora che il sistema sia isolato: poiché il sistema non scambia calore con l'ambiente circostante, l'integrale a secondo membro è nullo:

$$S_{\text{sist}} = 0$$

In questo caso però l'ambiente circostante non subisce alcuna variazione di entropia, pertanto la variazione di entropia dell'universo è uguale a quella del sistema:

$$S_{\text{un}} = S_{\text{sist}} = 0$$

Il principio dell'aumento dell'entropia è dunque dimostrato nel caso di un sistema isolato che subisce una trasformazione irreversibile.

Se il sistema invece non è isolato e quindi scambia calore con l'ambiente circostante allora si può definire un sistema più ampio che comprende il sistema più tutti i serbatoi con cui esso scambia calore (il nuovo sistema coincide dunque con l'universo termodinamico). Il sistema più ampio così definito è un sistema isolato che subisce una trasformazione irreversibile, e per un tale sistema abbiamo fatto vedere che

$$S_{\text{sist.ampio}} = 0.$$

Stante l'osservazione che il sistema più ampio coincide con l'universo termodinamico, risulta dunque che:

$$S_{\text{un}} = S_{\text{sist.ampio}} = 0$$

Val la pena di osservare che il principio dell'aumento dell'entropia determina il verso in cui scorre il tempo. Tutte le leggi del moto che abbiamo determinato in Meccanica sono compatibili anche con un tempo che scorre all'indietro: lo stesso vale per il primo principio della termodinamica. Il secondo principio invece, e lo si nota chiaramente quando è formulato come principio dell'aumento dell'entropia, impedisce alle trasformazioni naturali di essere percorse in senso inverso, introducendo così una asimmetria tra il passato ed il futuro.



### **Entropia ed energia inutilizzabile.**

Negli esempi precedenti abbiamo visto che ogni qualvolta un sistema compie una trasformazione irreversibile, l'entropia dell'universo aumenta e, contemporaneamente, si riduce la capacità dell'universo a compiere lavoro meccanico.

Si può dimostrare infatti che ogni qualvolta ha luogo una trasformazione irreversibile, tutto avviene come se una certa quantità di energia fosse convertita da una forma utilizzabile per compiere lavoro ad una forma di energia completamente inutilizzabile per compiere lavoro. Questa energia  $E_{in}$  è pari al prodotto della variazione di entropia dell'universo provocata dalla trasformazione irreversibile per la temperatura  $T_0$  del serbatoio più freddo a disposizione ( $E_{in} = T_0 \Delta S_{universo}$ ).

Consideriamo un caso particolare, cioè la conduzione irreversibile di calore dovuta a una differenza finita di temperatura.

Supponiamo che una quantità di calore  $Q$  venga trasmessa lungo una sbarra da un serbatoio a temperatura  $T_1$  ad uno a temperatura  $T_2$  con  $T_2 < T_1$ . Terminata la conduzione, ritroviamo una certa quantità di calore  $Q$ , che prima era alla temperatura  $T_1$ , alla temperatura  $T_2$ . Se avessimo usato una macchina di Carnot operante tra i due serbatoi per estrarre il calore  $Q$  dal serbatoio a temperatura  $T_1$ , si sarebbe potuto generare il lavoro  $W$  pari a :

$$W = \eta_c Q = Q \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right)$$

Il lavoro  $W$  rappresenta, quindi, proprio l'energia non più disponibile per essere trasformata in lavoro meccanico, l'energia divenuta inutilizzabile,  $E_{in}$ , a seguito del passaggio del calore  $Q$  dal serbatoio a temperatura  $T_1$  a quello a temperatura  $T_2$ .

La variazione di entropia dell'universo a seguito del passaggio del calore  $Q$  dal serbatoio a temperatura  $T_1$  a quello a temperatura  $T_2$  è dato da

$$\Delta S_{un} = \frac{Q}{T_2} - \frac{Q}{T_1} = \frac{Q}{T_2} \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right)$$

Come si vede la quantità di energia  $E_{in}$  che è diventata inutilizzabile per compiere lavoro meccanico è data da:

$$E_{in} = W = Q \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right) = T_2 S$$

essendo in questo  $T_2$  la temperatura del serbatoio a più bassa temperatura tra quelli disponibili.

Resta così provato che nel processo irreversibile della conduzione del calore, l'energia che diventa inutilizzabile per compiere lavoro è proporzionale alla variazione di entropia dell'universo prodotta nella trasformazione irreversibile. Il fattore di proporzionalità è la temperatura  $T_0$  del serbatoio di calore più freddo a disposizione.

Questa espressione è valida per un qualunque processo irreversibile: possiamo concludere che tanto maggiore è l'irreversibilità di una trasformazione, cioè tanto maggiore è l'aumento totale di entropia, tanto maggiore sarà l'energia non più utilizzabile per compiere lavoro.

Tutte le trasformazioni naturali sono irreversibili, per cui l'energia diviene continuamente inutilizzabile per compiere lavoro. Questa osservazione va sotto il nome di *principio di degradazione dell'energia*. Esso consente di dare una importante interpretazione dell'entropia: la variazione di questa grandezza in una trasformazione da' una misura dell'energia non più utilizzabile per compiere del lavoro. Questa energia non va considerata come energia scomparsa: il primo principio della termodinamica, la conservazione dell'energia, è sempre verificato. Ciò che avviene è che l'energia si trasforma in una forma in cui non è utilizzabile per produrre del lavoro meccanico.

Se si ha a che fare con trasformazioni reversibili, la variazione totale di entropia è nulla e tale risulta anche l'energia diventata inutilizzabile per compiere del lavoro. La conversione più efficiente di energia interna in lavoro meccanico si ottiene usando una trasformazione o un ciclo reversibile.