Soluzioni degli esercizi sui numeri complessi

1.
   - Si ha $B = 3(\cos\pi/4 + j\sin\pi/4) = 3\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)$ e quindi, ricordando che $(a+jb)(c+jd) = ac - bd + j(ad+bc)$, si ottiene facilmente $AB = 3\frac{\sqrt{2}}{2}(1-2+j(1+2)) = 3\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+3j)$.
   - Si ha $|A| = \sqrt{5}$ e $\arg A = \arctan 2$, da cui si ottiene facilmente $AB = 3\sqrt{5}\exp(j(\pi/4 + \arctan 2))$.
2.
   - Si ha immediatamente $A + B = 1 + 3\sqrt{2}/2 + j(2 + 3\sqrt{2}/2)$.
   - Si tratta di sommare due vettori nel piano, di cui sono note lunghezze e direzioni. Il teorema di Carnot consente di trovare il modulo del risultato e con qualche altro calcolo si trova anche la direzione. Il metodo comunque non è raccomandabile, e può essere conveniente solo se si vuol operare graficamente.
3.
   - $(1+j)^6 = 1 + 6j + 15j^2 + 20j^3 + 15j^4 + 6j^5 + j^6 =$
     $= 1 + 6j - 15 - 20j + 15 + 6j - 1 = -8j$
   - $(1+j)^6 = ((1+j)^3)^2 = (1 + 3j + 3j^2 + j^3)^2 = (1 + 3j - 3 - j)^2 =$
     $((-2(1-j))^2 = 4(1 - 2j + j^2) = -8j$
   - $(1+j)^6 = ((1+j)^2)^3 = (1 + 2j + j^2)^3 = (2j)^3 = -8j$
   - $(j+j)^6 = (\sqrt{2}\exp(j\pi/4))^6 = 8\exp(j3\pi/2) = -8j$
4.
   - $(1+j)^5 = 1 + 5j + 10j^2 + 10j^3 + 5j^4 + j^5 = 1 + 5j - 10 - 10j + 5 + j =$
     $= -4 - 4j$
   - $(j+j)^5 = (\sqrt{2}\exp(j\pi/4))^5 = 4\sqrt{2}\exp(j5\pi/4)$
5. $\sqrt{1+j} = (\sqrt{2}\exp(j\pi/4))^{1/2} = 2^{1/4}\exp(j\pi/8)$; questa è detta la *radice principale*, ma evidentemente anche il risultato opposto $-2^{1/4}\exp(j\pi/8)$ è radice di $1+j$.
6. Da $(a+jb)^2 = 1 + j$ si ottiene, uguagliando parti reali e immaginarie, $a^2 - b^2 = 1$ e $2ab = 1$. Si ha quindi $b = 1/(2a)$ e dunque $a^2 - 1/(4a^2) = 1$ cioè $4a^4 - 4a^2 - 1 = 0$, da cui $a^2 = (1+\sqrt{2})/2$, $a = \ldots$ e $b = \ldots$
7. Basta osservare che si può scrivere $1 = \exp(j2\pi)$, ed è quindi evidente che $\exp(j2\pi/N)$ è una radice N-esima dell'unità. Analogamente si vede che $\exp(j2\pi n/N)$ è radice N-esima dell'unità per tutti gli $n = 1, \ldots, N$. Le radici hanno modulo unitario, e argomento $2\pi n/N$.

8. $\exp(j) = \cos(1) + j\sin(1)$

9. $\exp(\exp(j)) = \exp(\cos(1) + j\sin(1)) = \exp(\cos(1))\exp(j\sin(1)) =$
   $= \exp(\cos(1))(\cos(\sin(1)) + j\sin(\sin(1)))$

10. Il modulo di $A = 3 + 2j$ e di $B = 2 + 3j$ è $\sqrt{13}$. Quindi AA^*, AB, AB^* e BB^* hanno tutti modulo pari a 13 (prodotto dei moduli). $A + B = 5 + 5j$ ha modulo $\sqrt{50}$ e $A - B = 1 - j$ ha modulo $\sqrt{2}$.

11. Impossibile: il modulo della somma non può superare la somma dei moduli (in questo caso $10 + 30 = 40$).

12. Impossibile: il modulo della somma è pari alla somma dei moduli solo se i due numeri hanno lo stesso argomento (nel qual caso si ha la somma di due vettori allineati).

13. Impossibile: sarebbe così solo se $\exp(j5\pi/7)$ fosse immaginario (cioè ortogonale al numero reale 10).

14. No: la parte reale di $30\exp(j5\pi/7)$ è negativa e quindi $10+30\exp(j5\pi/7)$ ha modulo della parte reale minore del modulo della parte reale di $10 - 30\exp(j5\pi/7)$ (le due parti immaginarie hanno modulo uguale).

15. E' reale, perché è il prodotto di numeri complessi coniugati.

16.
    - In forma esponenziale: $\frac{7+3j}{2+j} = \sqrt{\frac{58}{5}}\exp(j(\arctan 3/7 - \arctan 1/2))$.
    - In forma cartesiana: $\frac{7+3j}{2+j} = \frac{(7+3j)(2-j)}{(2+j)(2-j)} = \frac{17-j}{5}$.

17. E' certamente più comodo utilizzare nel calcolo la forma esponenziale: $\frac{(1-j)^3}{(1+j)^2} = \frac{(\sqrt{2})^3}{(\sqrt{2})^2}\exp(-j5\pi/4) = \sqrt{2}\exp(-j5\pi/4) = -1 + j$.

18. Evidentemente sì.

19. In generale no (che condizione devono soddisfare a e b perché il risultato sia vero?)

20. $\frac{1}{(1+j)^2} = \frac{1}{2}\exp(-j\pi/2) = -j/2$.